Capítulo 16

Calibração da Câmera

No capítulo 5 vimos que os pontos (x, y, z) de uma cena sintética e os pontos (u, v, z_p) do plano de projeção sintético são relacionados através de uma transformação linear T

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z_p \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Assim, a partir de uma imagem, podemos teoricamente obter os seus correspondentes no espaço 3D aplicando uma transformação inversa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z_p \end{bmatrix}.$$

Teoricamente, se conhecermos a transformação T do processo de imageamento, podemos integrar na imagem real objetos sintéticos e gerar novas imagens, como nas aplicações de realidade aumentada (*augmented reality*). E se as amostras da imagem (x_p, y_p) forem providas da coordenada de profundidade z_p, podemos aplicar T^{-1} sobre estas amostras e reconstruir, a partir das imagens adquiridas, os pontos no espaço 3D. Em conjunto com as informações de *features* extraídos num processo de segmentação (Capítulo 15), podemos tentar ainda agrupar os pontos 3D e reconstruir os modelos geométricos, ainda difíceis de serem confeccionados com as ferramentas de modelagem geométrica disponíveis.

Na prática, a transformação T não é prontamente acessível através de uma imagem fotografada. Um dos procedimentos para derivar esta transformação é a **calibração da câmera**, que consiste essencialmente em derivar os elementos da matriz T a partir de um conjunto de correspondências conhecidas entre os pontos 3D (x, y, z) e a sua imagem 2D (x_p, y_p). Conforme já comentamos na seção 5.2 existem vários modelos de câmera. No Capítulo 5 apresentamos um modelo de câmera amplamente difundido na comunidade de **Computação Gráfica**. É um modelo que engloba as projeções paralelas e perspectivas. Na seção 16.1 mostramos alguns tipos de distorções e ruídos nos sistemas reais de aquisição apresentados na seção 15.1. Estes elementos devem ser integrados no modelo de uma câmera real. Na seção 16.2 apresentamos um modelo simplificado de câmera perspectiva que se aproxima melhor dos dispositivos de captura, incluindo as distorções ópticas, e mostramos como se constrói a matriz T com uso dos parâmetros deste modelo. A partir do modelo de câmera perspectiva, derivamos na seção 16.3 um sistema de equações que relacionam os pontos cujas correspondências são conhecidas. Finalmente, na seção 16.4 mostramos como se deriva a partir da matriz de projeção T os parâmetros do modelo da câmera que utilizamos.

16.1 Distorções na Aquisição

O processo de aquisição de imagens descrito na seção 15.1 tem como pressuposto que tanto a câmera CCD quanto o *frame grabber* não introduzem nenhuma distorção no sinal de vídeo, ou seja, a imagem armazenada no *frame buffer* do computador é uma versão digitalizada fiel do sinal de vídeo capturado pelo arranjo de fotossítios da câmera CCD. Na prática, uma série de fatores podem alterar esta fidelidade.

Em primeiro lugar, pode haver **discrepância entre as dimensões** da unidade de captura do sinal de vídeo (o fotossítio do CCD) e as dimensões da unidade de armazenamento do sinal digitalizado (os *pixels*). A correspondência entre as coordenadas (x_{CCD}, y_{CCD}) da câmera e as coordenadas dos *pixels* não é, portanto, necessariamente 1:1, podendo ocorrer erros no arredondamento

$$u = \frac{n}{N} x_{CCD} = \frac{x_{CDD}}{s_x} \qquad v = \frac{m}{M} y_{CCD} = \frac{y_{CDD}}{s_y},$$

onde (n, m) e (N, M) são, respectivamente, as dimensões do arranjo da câmera CCD e as dimensões do arranjo de *pixels*. Caracterizamos as relações entre as dimensões, s_x e s_y, como os **fatores de escala** das dimensões dos *pixels*.

Em segundo lugar, a resposta espacial de uma câmera é limitada. De acordo com o **teorema de amostragem**, para um dispositivo de captura cujos fotossítios são dispostos com um espaçamento de d entre eles, sinais com frequência de intensidades até

$$f_{CCD} = \frac{1}{2d}$$

serão capturado sem distorções. No entanto, de acordo com a **teoria de difração** a frequência f_s que consegue sensibilizar os fotossítios da câmera é dependente do diâmetro a da abertura da lente, do comprimento β da onda luminosa, e da distância focal λ. Ela deve ser menor que

$$f_s = \frac{a}{\beta\lambda}.$$

Usualmente, $f_{CCD} \approx 0.1 f_s$. Portanto, os sinais de vídeo capturados podem conter frequências maiores do que a frequência máxima f_{CCD} e gerar efeitos de *aliasing* na imagem digitalizada, como vimos na seção 9.4.2.

Exercício 16.1 *Seja uma imagem de linhas pretas horizontais, igualmente espaçadas, sobre um fundo branco. Seja uma câmera com n linhas verticais de fotossítios que consegue distinguir até $n' \approx \frac{n}{3}$ linhas. Qual é a imagem reproduzida se a quantidade de linhas contidas no campo de abertura da câmera*

1. *for menor que n' linhas e a distância entre as linhas for reduzida?*
2. *for maior que n' e a distância entre as linhas for reduzida?*

Justifique a sua resposta.

Em terceiro lugar, temos as denominadas **distorções radiais** que se acentuam na periferia da imagem. Elas consistem de deslocamentos radiais que os pontos da imagem sofrem, à medida que se distanciam do centro da imagem. Uma forma simples de modelar estas distorções é através das expressões

$$\begin{aligned} x_p &= x_d(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ y_p &= y_d(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \end{aligned} \tag{16.1}$$

onde $r^2 = x_d^2 + y_d^2$ e (x_d, y_d) são as coordenadas dos pontos distorcidos. É comum considerar $k_2 = 0$.

Finalmente, há ruídos no processo de aquisição, que distorcem os valores de cada *pixel* da imagem. Em decorrência disso, duas distintas tomadas feitas por uma mesma câmera e sob as mesmas condições luminosas nunca são exatamente iguais. Chamamos de **desvio padrão do ruído de aquisição** em cada *pixel* (u, v) de n imagens "teoricamente idênticas"

$$\sigma(u,v) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{I(u,v)} - I_k(u,v)^2}, \tag{16.2}$$

sendo

$$\overline{I(u,v)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} I_k(u,v)$$

a média aritmética das intensidades das n imagens no *pixel* (u, v).

16.2 Modelo de Câmera Perspectiva

O modelo de câmera mais utilizado no contexto de **Visão Computacional** é o **modelo de câmera perspectiva**, que consiste de um **plano de projeção** coincidente com o plano xy, de um **eixo óptico** alinhado com o eixo z e um **centro de projeção** a uma distância λ do plano de projeção. Os eixos x, y e z defiem o espaço de câmera.

(Ver Fig. 2.17 do livro-texto de Gonzalez.)

Como vimos no Capítulo 5, pela semelhança de triângulos temos a seguinte relação entre um ponto (x, y, z) no espaço 3D e a sua projeção (x_p, y_p) no plano de projeção

$$\frac{x_p}{\lambda} = -\frac{x}{z-\lambda} = \frac{x}{\lambda - z} \qquad \frac{y_p}{\lambda} = -\frac{y}{z-\lambda} = \frac{y}{\lambda - z},$$

em que os sinais negativos indicam que os pontos da imagem são, de fato, invertidos. Com isso, chegamos a duas equações fundamentais do modelo de câmera perspectiva

$$x_p = \frac{\lambda x}{\lambda - z} \qquad y_p = \frac{\lambda y}{\lambda - z}, \tag{16.3}$$

(Ver Fig. 2.17 do livro-texto de Gonzalez.)

Quando a distância entre dois quaisquer pontos da cena for menor do que a distância média $\overline{z}$ dos pontos da cena em relação ao centro óptico, é comum aproximar a Eq. 16.3 por

$$x_p = \frac{\lambda x}{\lambda - \overline{z}} \qquad y_p = \frac{\lambda y}{\lambda - \overline{z}}, \tag{16.4}$$

que é conhecida como **modelo de câmera perspectiva fraca**, pois ele correponde, na verdade, à concatenação de duas transformações: aplicar um fator de escala $\frac{\lambda}{\lambda-\bar{z}}$ seguida de uma projeção paralela.

Todos os parâmetros, como

- a distância focal λ, que caracteriza a a projeção perspectiva (Eqs. 16.3 ou 16.4);
- os coeficientes k_1, k_2 que aparecem no modelo de distorções radiais (Eq. 16.1); e
- o centro do dispositivo de saída (o_x, o_y) e o *aspect ratio* $\frac{s_y}{s_x}$, que nos permitem mapear as coordenadas no espaço da câmera para o espaço do dispositivo

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x_p}{s_x} + o_x \\ v &= -\frac{x_p}{s_y} + o_y, \end{aligned}$$

caracterizam a propriedade óptica, digital e geométrica de uma câmera. Eles são, portanto, denominados **parâmetros intrínsecos**.

Observe que Eq. 16.3 e 16.4 só são válidas para o espaço de câmera. Tanto a posição $w_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ quanto a orientação (θ, ϕ) da câmera são, no entanto, especificados no espaço do universo, como vimos na seção 5.2. Portanto. deve-se fazer uma transformação do referencial do universo para o referencial da câmera antes do uso dessa equações.

(Ver Fig. 2.18 do livro-texto de Gonzalez.)

Os parâmetros necessários na transformação do espaço do universo para o espaço da câmera são chamados **parâmetros extrínsecos** da câmera.

Vamos mostrar agora como se constrói a matriz de transformação T com uso dos parâmetros da câmera.

16.2.1 Matriz de Parâmetros Extrínsecos

Usando um procedimento análogo ao apresentado na (seção 5.4), podemos obter a matriz de transformação dos referenciais através da concatenação de quatro matrizes:

$$CR_\phi R_\theta G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sen\phi & 0 \\ 0 & -sen\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 & -Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.5)$$

onde (r_1, r_2, r_3) denota o vetor de deslocamento do centro de mecanismo de sustentação da câmera para o centro do plano de projeção.

16.2.2 Matriz de Parâmetros Intrínsecos

Eq. 16.3 é fundamental na caracterização da propriedade óptica de uma câmera. Utilizando a notação matricial, ela pode ser reescrita em

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (16.6)$$

Homogeneizando e projetando todos os pontos no plano $z = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{x_p}{w_p} \\ \frac{y_p}{w_p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_p}{w_p} \\ \frac{y_p}{w_p} \\ \frac{z_p}{w_p} \end{bmatrix}.$$

Se houver distorções radiais, devemos justar as coordenadas (x_p, y_p) com base na sua distância r em relação ao centro de projeção e os coeficientes de distorção k_1 e k_2, conforme Eq. 16.1.

Se o centro do dispositivo não coincidir com o centro do plano de projeção e os fatores de escala forem diferentes de 1, temos que aplicar ainda a seguinte transformação para obter as coordenadas (u, v)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & o_x \\ 0 & 1 & o_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_p}{w_p} \\ \frac{y_p}{w_p} \end{bmatrix}$$

16.3 Determinação da Matriz de Transformação Projetiva

Vamos considerar que as distorções radiais sejam desprezíveis, $s_x = s_y = 1$, e que o centro do dispositivo coincida com o centro do plano de projeção.

A matriz T é então a concatenação das Eqs. 16.6 e 16.5. Após algumas manipulações algébricas, chegamos a

$$PCRG = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 & -X_0cos\theta - Y_0sen\theta - r_1 \\ -sen\theta cos\phi & cos\theta cos\phi & sen\phi & X_0sen\theta cos\phi - Y_0cos\theta cos\phi - Z_0sen\phi - r_2 \\ \frac{-sen\theta sen\phi}{\lambda} & \frac{cos\theta sen\phi}{\lambda} & \frac{-cos\phi}{\lambda} & \frac{X_0sen\theta sen\phi - Y_0cos\theta sen\phi + Z_0cos\phi + r_3 + \lambda}{\lambda} \end{bmatrix} \tag{16.7}$$

Exercício 16.2 *Derive a Eq. 16.7.*

Exercício 16.3 *Dados os seguintes parâmetros de um modelo de câmera: $w_0 = (0,0,1)$, $\theta = 135^o$, $\phi = 135^o$, $r = (0.03, 0.02, 0.02)$ e $\lambda = 0.035$. Qual é a matriz de transformação das coordenadas em WC para as coordenadas referentes a VRC? Determine as coordenadas de projeção de (1,1,0.2) em WC.*

Escrevendo Eq. 16.7 no formato

$$PCRG = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

considerando que o plano de projeção seja em $z_p = 0$ e homogeneizando o resultado

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = PCRG \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

fica claro que o problema consiste em determinar os 12 elementos da matriz $PCRG$ para que pares de pontos correspondentes $(\frac{x_p}{w_p}, \frac{y_p}{w_p})$ e (x, y, z) possam ser relacionados por ela, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como as coordenadas homogeneizadas

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_p}{w_p} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}} \\ v &= \frac{y_p}{w_p} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}} \end{aligned}$$

tem o mesmo denominador, cada par de correspondência $((x, y, z), (u, v))$ satisfaz a igualdade

$$a_{11}xv + a_{12}yv + a_{13}zv + a_{14}v = a_{21}xu + a_{22}yu + a_{23}zu + a_{24}u. \qquad (16.8)$$

Com 8 pares de correspondência $((x_i, y_i, z_i), (u_i, v_i))$ temos um sistema de equações homogêneas

$$A \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1v_1 & y_1v_1 & z_1v_1 & v_1 & -x_1u_1 & -y_1u_1 & -z_1u_1 & -u_1 \\ x_2v_2 & y_2v_2 & z_2v_2 & v_2 & -x_2u_2 & -y_2u_2 & -z_2u_2 & -u_2 \\ x_3v_3 & y_3v_3 & z_3v_3 & v_3 & -x_3u_3 & -y_3u_3 & -z_3u_3 & -u_3 \\ x_4v_4 & y_4v_4 & z_4v_4 & v_4 & -x_4u_4 & -y_4u_4 & -z_4u_4 & -u_4 \\ x_5v_5 & y_5v_5 & z_5v_5 & v_5 & -x_5u_5 & -y_5u_5 & -z_5u_5 & -u_5 \\ x_6v_6 & y_6v_6 & z_6v_6 & v_6 & -x_6u_6 & -y_6u_6 & -z_6u_6 & -u_6 \\ x_7v_7 & y_7v_7 & z_7v_7 & v_7 & -x_7u_7 & -y_7u_7 & -z_7u_7 & -u_7 \\ x_8v_8 & y_8v_8 & z_8v_8 & v_8 & -x_8u_8 & -y_8u_8 & -z_8u_8 & -u_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \end{bmatrix} = 0.$$

Segundo a Álgebra Linear, a dimensão do domínio V de uma transformação linear $F: V \to U$ é

$$dimV = dim(Ker(F)) + dim(Img(F)),$$

onde $Ker(F)$ é o núcleo de F, ou seja, o conjunto de elementos em V que são transformados em elemento nulo de U e $Img(F)$ são os outros elementos não nulos de U. Se o posto do sistema de equações é 7, ele admite uma solução não trivial. Esta solução pode ser determinada pela técnica de decomposição por valores singulares (SVD – *singular value decomposition*) que decompõe a matriz A em UDV^t, onde U e V são matrizes ortonormais e D é uma matriz diagonal. Qualquer coluna da matriz V que corresponde a um elemento nulo da matriz diagonal D é uma solução para o sistema. No entanto, por causa dos ruídos e das imprecisões, o posto da matriz A é usualmente 8 e escolhemos como uma solução a coluna que tiver o menor auto-valor associado.

Observação 16.1 *No sítio* `http://www.miislita.com/information-retrieval-tutorial/matrix-tutorial-3-eigenvalues-eigenvectors.html` *encontra-se uma apresentação didática sobre autovalores e autovetores.*

Exercício 16.4 *Derive a matriz A considerando que $s_x \neq 1$ e $s_y \neq 1$ e que o centro do plano de projeção (o_x, o_y) não seja coincidente com a origem do referencial da câmera.*

Falta ainda saber como se obtém os 8 pares de correspodências. Uma solução é delegar esta tarefa aos usuários. Uma outra possível solução é definir algumas marcas discriminadoras na cena 3D, denominadas *landmarks*, e tentar extraí-las automaticamente da imagem para obter as coordenadas (u, v) correspondentes. Técnicas de segmentação, que vimos no capítulo 15, podem ser aplicadas nesta extração.

16.4 Estimação dos Parâmetros da Câmera

A partir dos elementos da matriz A podemos estimar o parâmetro intrínseco λ e os extrínsecos, θ e ϕ, da câmera, a partir das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
tg\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \\
tg\phi &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{a_{23}}{a_{33}} \\
\frac{-\cos\phi}{\lambda} &= a_{43}
\end{aligned}$$

Para determinar a posição da câmera (X_0, Y_0, Z_0) e o vetor de deslocamento do plano de projeção em relação à base de sustentação (r_1, r_2, r_3), nós podemos substituir na Eq. 16.8

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\theta \\
a_{12} &= \sin\theta \\
a_{14} &= -X_0\cos\theta - Y_0\sin\theta - r_1 \\
a_{21} &= \sin\theta\cos\phi \\
a_{22} &= \cos\theta\cos\phi \\
a_{23} &= \sin\phi \\
a_{24} &= X_0\sin\theta\cos\phi - Y_0\cos\theta\cos\phi - Z_0\sin\phi - r_2
\end{aligned}$$

e obter uma outra igualdade na qual aparecem explicitamente os parâmetros procurados

$$\begin{aligned}
\cos\theta xv + \sin\theta yv + (-X_0\cos\theta - Y_0\sin\theta - r_1)v - (\sin\theta\cos\phi)xu - (\cos\theta\cos\phi)yu \\
-(\sin\phi)zu - (X_0\sin\theta\cos\phi - Y_0\cos\theta\cos\phi - Z_0\sin\phi - r_2)u = 0
\end{aligned}$$

Agora com 5 pares de correspondência construimos um sistema de equações, no formato $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} v_1\cos\theta + u_1\sin\theta\cos\phi & v_1\sin\theta - u_1\cos\theta\cos\phi & u_1\sin\phi & v_1 & -u_1 \\ v_2\cos\theta + u_2\sin\theta\cos\phi & v_2\sin\theta - u_2\cos\theta\cos\phi & u_2\sin\phi & v_2 & -u_2 \\ v_3\cos\theta + u_3\sin\theta\cos\phi & v_3\sin\theta - u_3\cos\theta\cos\phi & u_3\sin\phi & v_3 & -u_3 \\ v_4\cos\theta + u_4\sin\theta\cos\phi & v_4\sin\theta - u_4\cos\theta\cos\phi & u_4\sin\phi & v_4 & -u_4 \\ v_5\cos\theta + u_5\sin\theta\cos\phi & v_5\sin\theta - u_5\cos\theta\cos\phi & u_5\sin\phi & v_5 & -u_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta x_1v_1 + \sin\theta y_1v_1 - (\sin\theta\cos\phi)x_1u_1 - (\cos\theta\cos\phi)y_1u_1 - (\sin\phi)z_1u_1 \\ \cos\theta x_2v_2 + \sin\theta y_2v_2 - (\sin\theta\cos\phi)x_2u_2 - (\cos\theta\cos\phi)y_2u_2 - (\sin\phi)z_2u_2 \\ \cos\theta x_3v_3 + \sin\theta y_3v_3 - (\sin\theta\cos\phi)x_3u_3 - (\cos\theta\cos\phi)y_3u_3 - (\sin\phi)z_3u_3 \\ \cos\theta x_4v_4 + \sin\theta y_4v_4 - (\sin\theta\cos\phi)x_4u_4 - (\cos\theta\cos\phi)y_4u_4 - (\sin\phi)z_4u_4 \\ \cos\theta x_5v_5 + \sin\theta y_5v_5 - (\sin\theta\cos\phi)x_5u_5 - (\cos\theta\cos\phi)y_5u_5 - (\sin\phi)z_5u_5 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz C for inversível, a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = C^{-1}\mathbf{b}.$$

Agora, podemos computar o parâmetro r_3 substituindo os valores conhecidos em

$$a_{44} = \frac{X_0 sen\theta sen\phi - Y_0 cos\theta sen\phi + Z_0 cos\phi + r_3 + \lambda}{\lambda},$$

ou seja,

$$r_3 = \lambda a_{44} - X_0 sen\theta sen\phi + Y_0 cos\theta sen\phi - Z_0 cos\phi - \lambda.$$