

IA725 – Computação Gráfica I

Modelos Geométricos

Watt: Capítulo 3

Redbook: Capítulo 2

IA725 - 1s2009 - Ting

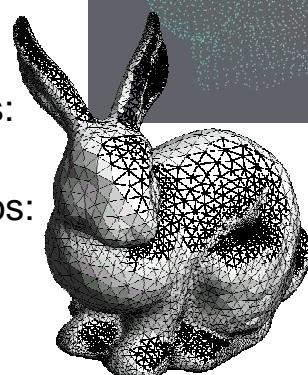
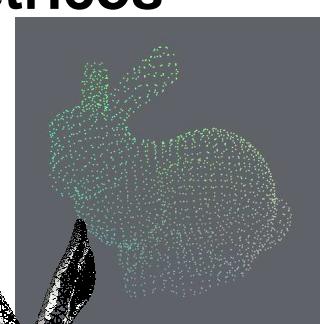
Modelos Geométricos

Descrições da forma de um objeto
com uso de ferramentas da
Geometria

Sub-problemas

1. Lugar geométrico dos pontos:
Geometria
2. Conectividade entre os pontos:
Topologia

IA725 - 1s2009 - Ting

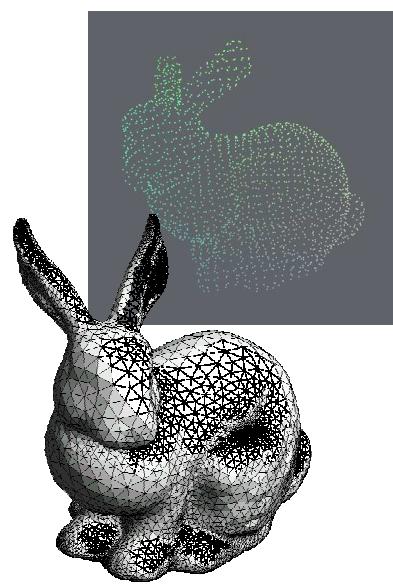


Representação Processável

Principais Considerações

1. Dimensão
2. Representatividade/Precisão
3. Concisão
4. Univocidade
5. Interface
6. Complexidade
7. Estrutura de dados
8. Editabilidade

IA725 - 1s2009 - Ting

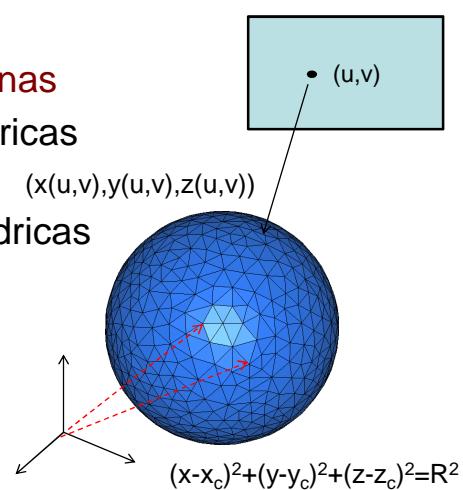


Lugar Geométrico

➤ Representação de Pontos

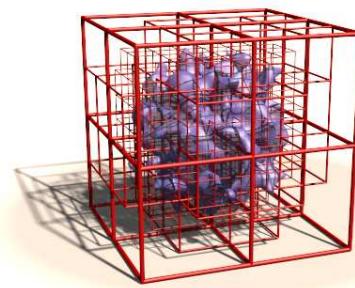
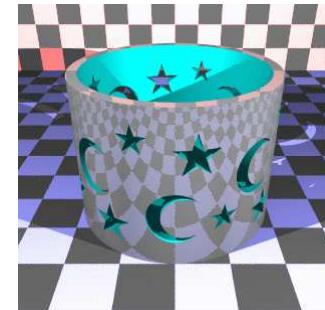
- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas baricêtricas
- Coordenadas polares/esféricas/cilíndricas
- Coordenadas afins

IA725 - 1s2009 - Ting



Modelos

- Malhas Poligonais
- **Funções Paramétricas**
- CSG
- Subdivisão Espacial
- Funções Implícitas

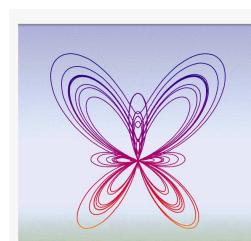
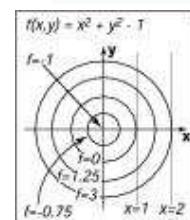
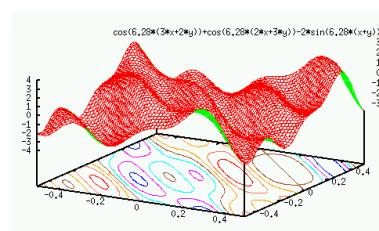


IA725 - 1s2009 - Ting

Representação Analítica

Caracterizar o lugar geométrico pela relação (matemática) entre as coordenadas (cartesianas) dos pontos

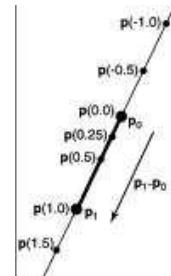
- Dimensão
- Precisão
- Concisão
- Intuitividade



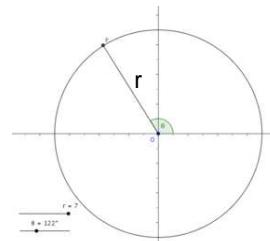
IA725 - 1s2009 - Ting

Intuitividade

- Segmentos
 $p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$



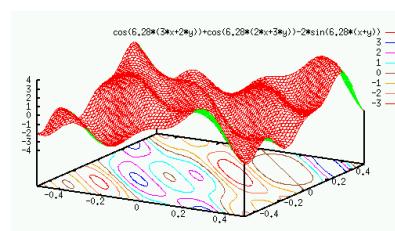
- Curvas
 $p(t) = (r \cos t, r \sin t)$



IA725 - 1s2009 - Ting

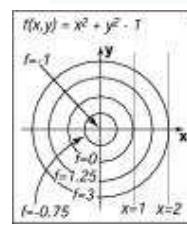
Representação Analítica

- Funções Explícitas:
 Uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras.



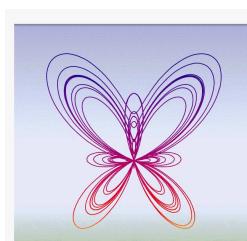
- Funções Implícitas:

As coordenadas são relacionadas por uma função.



- Funções Paramétricas:

As coordenadas são dadas em termos de um conjunto de parâmetros.



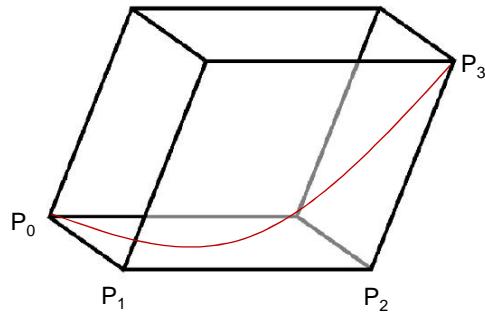
IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Curvas de Bézier

Substitui curvas por varredura e curvas francesas.

Conceito Original: curvas fixas num paralelepípedo que controla a sua forma



$$P(t) = \sum B_{n,i}(t) P_i \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

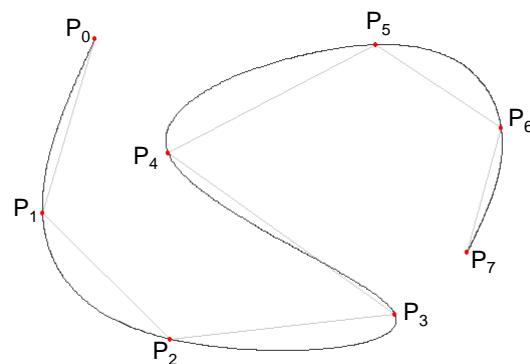
IA725 - 1s2009 - Ting

Combinação convexa de P_i

Representação de Curvas

Curvas de Bézier

Bezier Curves Interpolation B-Spline Help



$$P(t) = \sum B_{n,i}(t) P_i \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

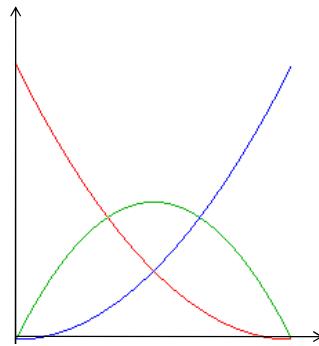
IA725 - 1s2009 - Ting

Combinação convexa de P_i

Representação de Curvas

Curvas de Bézier Quadráticas

$$P(t) = \sum B_{2,i}(t) P_i \text{ onde } B_{2,i}(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}$$



$$\begin{aligned} B_{2,0}(t) &= (1-t)^2 \\ B_{2,1}(t) &= 2t(1-t) \\ B_{2,2}(t) &= t^2 \end{aligned}$$

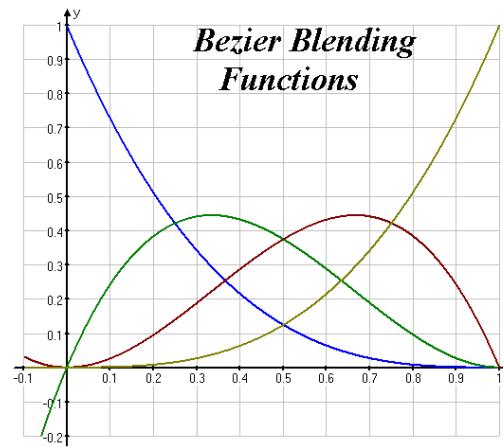
IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Curvas de Bézier Cúbicas

$$P(t) = \sum B_{3,i}(t) P_i \text{ onde } B_{3,i}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$$\begin{aligned} B_{3,0}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$



IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas de Bézier

Outros Exemplos de Funções de Base

<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html>

IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas de Bézier

Controle da Forma

<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/RenderBezierC/AppRenderBezierC/index.html>

IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas de Bézier

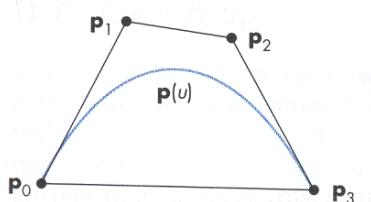
Propriedades

- É polinomial. O grau do polinômio é n.
- Acompanha a forma do polígono de controle.
- Está no fecho convexo dos pontos de controle.
- Influência global de cada ponto de controle.
- Pontos extremos da curva e do polígono coincidem.
- Tangente nos pontos extremos coincidem com os segmentos extremos do polígono de controle.
- A curva não oscila mais que o polígono de controle.
- São invariantes sob transformações afins.

IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas de Bézier Cúbicas

OpenGL



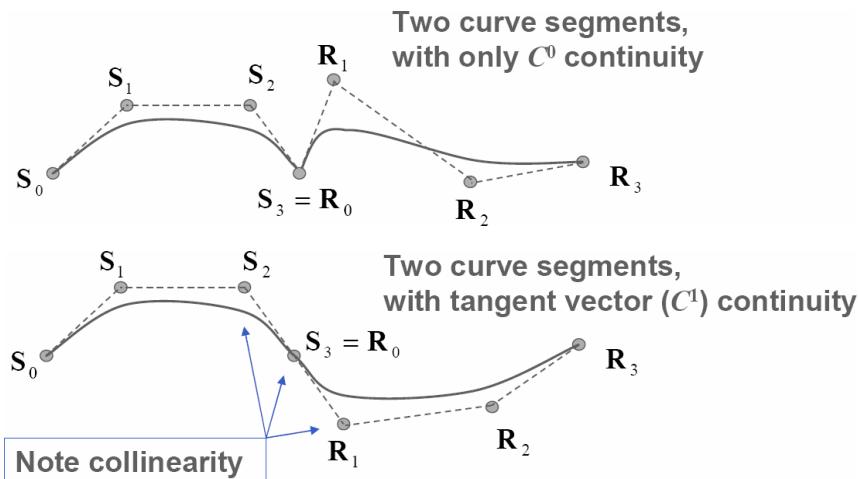
```
GLfloat ctrlpoints[4][3] = {
    { -4.0, -4.0, 0.0},
    { -2.0, 4.0, 0.0},
    {2.0, -4.0, 0.0},
    {4.0, 4.0, 0.0}};
```

$$\begin{aligned}
 P(t) &= B_{3,0}(t) P_0 + B_{3,1}(t) P_1 + B_{3,2}(t) P_2 + B_{3,3}(t) P_3 \\
 &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \\
 &= (1-3t+3t^2-t^3) P_0 + (3t-6t^2+3t^3) P_1 + (3t^2-3t^3) P_2 + t^3 P_3
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Curvas de Bézier

Concatenação de curvas S e R



IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Continuidade

Diferenciabilidade:

C^0 : $S_3 = R$

C^1 : primeiras derivadas são iguais

C^2 : primeiras e segundas derivadas são iguais

C^n : as primeiras n derivadas são iguais

Continuidade Geométrica:

G^0 : $S_3(1) = R(0)$

G^1 : $\partial S(1)/\partial t_1 = k_1 \partial R(0)/\partial t_2$

G^2 : $\partial S(1)/\partial t_1 = k_1 \partial R(0)/\partial t_2; \partial^2 S(1)/\partial^2 t_1 = k_2 \partial^2 R(0)/\partial^2 t_2$

G^n : as primeiras n derivadas são iguais

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Splines de Base (B-Splines)

➤ n=0

➤ grau: n

➤ vetor de nós: $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{m+1+n}\}$

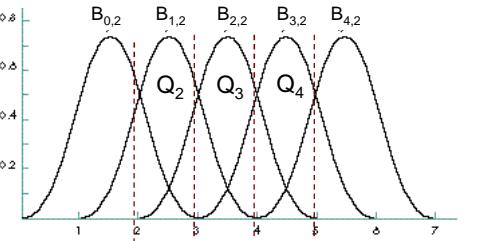
➤ $(m-n+1)$ "segmentos de curvas"

$$Q_i(t) = \sum_{k=0}^n B_{i-n+k, n}(t) P_{i-n+k}$$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(t) = \frac{(t - t_i) B_{i,n-1}(t)}{(t_{i+n} - t_i)} + \frac{(t_{i+n+1} - t) B_{i+1,n-1}(t)}{(t_{i+n+1} - t_{i+1})}$$

IA725 - 1s2009 - Ting



$n=2$
3 segmentos

Splines de Base (B-Splines)

Funções de Base

➤ vetor de nós: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$B_{0,0}(t) = 1, t \in [0,1)$$

$$B_{0,1}(t) = t, t \in [0,1)$$

$$B_{1,0}(t) = 1, t \in [1,2)$$

$$B_{0,1}(t) = (1-t), B_{1,1}(t) = (t-1), t \in [1,2)$$

$$B_{2,0}(t) = 1, t \in [2,3)$$

$$B_{1,1}(t) = (3-t), B_{2,1}(t) = (t-2), t \in [2,3)$$

$$B_{3,0}(t) = 1, t \in [3,4)$$

$$B_{2,1}(t) = (4-t), B_{3,1}(t) = (t-3), t \in [3,4)$$

$$B_{4,0}(t) = 1, t \in [4,5)$$

$$B_{3,1}(t) = (5-t), B_{4,1}(t) = (t-4), t \in [4,5)$$

$$B_{5,0}(t) = 1, t \in [5,6)$$

$$B_{4,1}(t) = (6-t), t \in [5,6)$$

IA725 - 1s2009 - Ting

Splines de Base (B-Splines)

Funções de Base

➤vetor de nós: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$B_{0,2}(t) = t^2, t \in [0,1]$$

$$B_{0,2}(t) = \frac{t}{2}(1-t) + \frac{3-t}{2}(t-1), B_{1,2}(t) = \frac{(t-1)^2}{2}, t \in [1,2]$$

$$B_{0,2}(t) = \frac{(3-t)^2}{2}, B_{1,2}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(4-t)(t-2)}{2}, B_{2,2}(t) = \frac{(t-2)^2}{2}, t \in [2,3]$$

$$B_{1,2}(t) = \frac{(4-t)^2}{2}, B_{2,2}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}, B_{3,2}(t) = \frac{(t-3)^2}{2}, t \in [3,4]$$

$$B_{2,2}(t) = \frac{(5-t)^2}{2}, B_{3,2}(t) = \frac{(t-3)(5-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2}, t \in [4,5]$$

$$B_{3,2}(t) = \frac{(6-t)^2}{2}, t \in [5,6]$$

IA725 - 1s2009 - Ting

Splines de Base (B-Splines)

Exemplos de Funções de Base

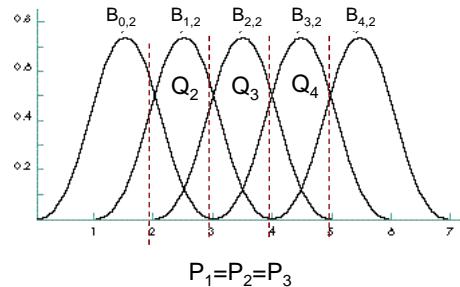
<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/BSplineBasis/AppBSplineBasis/index.html>

IA725 - 1s2009 - Ting

Splines de Base

Multiplicidade de Pontos

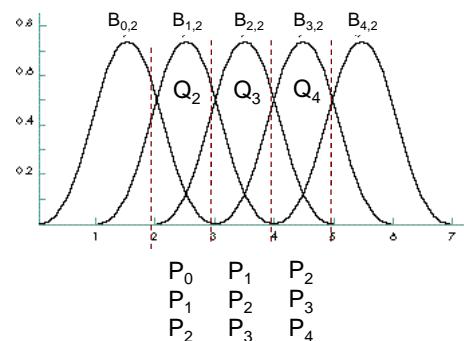
Interpolação da Curva: multiplicidade = n+1



IA725 - 1s2009 - Ting

Splines de Base

Influência Local de Pontos de Controle

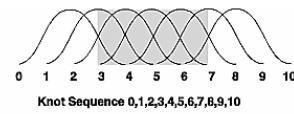


IA725 - 1s2009 - Ting

Splines de Base

Influência de Vetor de Nós

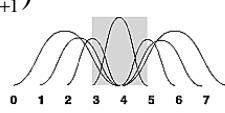
Spline de base uniforme



Basis Functions

$$B_{i,n}(t) = \frac{(t - t_i)B_{i,n-1}(t)}{(t_{i+n} - t_i)} + \frac{(t_{i+n+1} - t)B_{i+1,n-1}(t)}{(t_{i+n+1} - t_{i+1})}$$

$$0/0=0$$

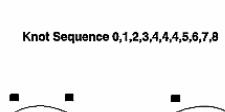


Example of a Curve

Basis Functions

Spline de base não-uniforme

IA725 - 1s2009 - Ting



Example of a Curve

Splines de Base

Exemplos

<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/IntBSpline/AppSubdivision/index.html>

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Propriedades de Splines de Base

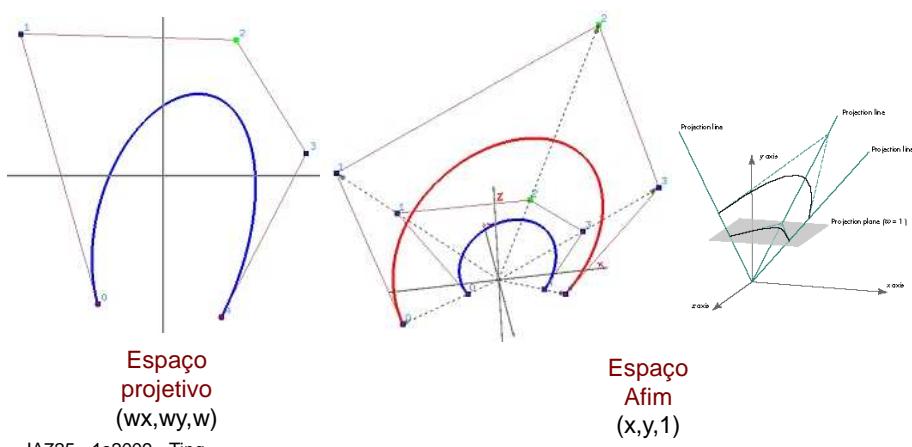
- É polinomial. O grau do polinômio é n .
- Acompanha a forma do polígono de controle. Está no fecho convexo dos pontos de controle de cada segmento de curva.
- Influência local de cada ponto de controle.
- A curva não oscila mais que o polígono de controle.
- São invariantes sob transformações afins.
- Multiplicidade de um ponto “puxa” a curva para ele. Para $m=n$, curva interpola o ponto. Diferenciabilidade C^{n-1} .
- Multiplicidade de nós altera a diferenciabilidade C^{n-m} .

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Cônicas = Curvas Racionais

Aumentar representatividade, preservando precisão



Representação de Curvas

Curvas Racionais

$$\frac{x}{a} = u^2 + \frac{b}{a}u + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{p} = u^2 + \frac{q}{p}u + \frac{r}{p}$$

$$u = \frac{p(x-c) - a(y-r)}{bp - aq}$$

$$x = a \left[\frac{p(x-c) - a(y-r)}{bp - aq} \right]^2 + b \left[\frac{p(x-c) - a(y-r)}{bp - aq} \right] + c$$

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

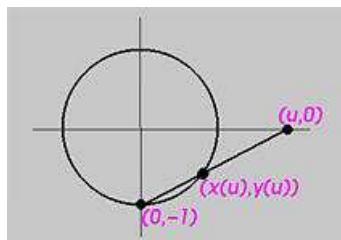
$$\begin{aligned} A &= ap^2 \\ B &= a^2p \end{aligned}$$

IA725 - 1s2009 - Ting

$$C = a^3$$

Curvas Racionais

Arco Circular



$$\begin{cases} x = uy + u \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$y = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas Racionais

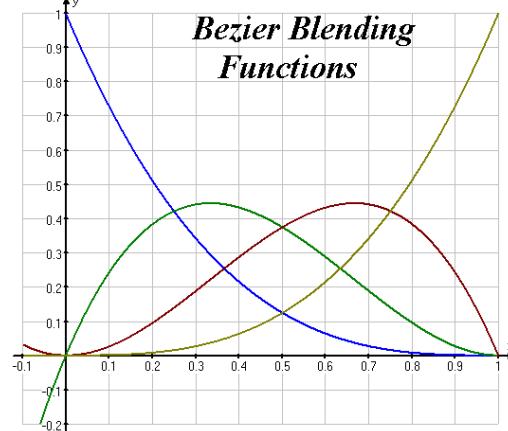
Curvas de Bézier Racionais

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \sum B_{3,i}(t) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ w_i \end{pmatrix} \text{ onde } B_{3,i}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$$\begin{aligned} B_{3,0}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

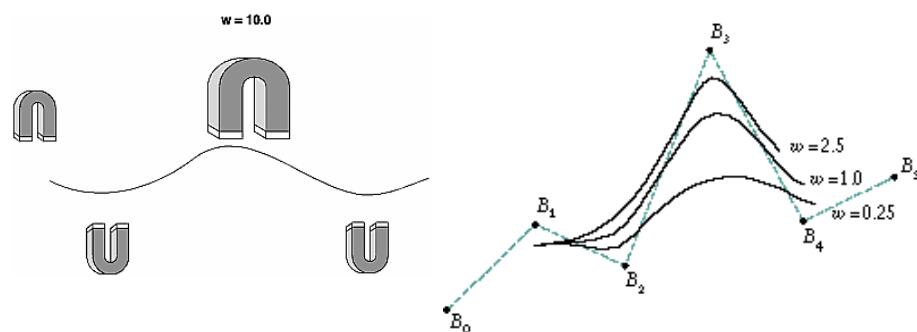
$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 P_i B_{3,i}(t)}{\sum_{i=0}^3 w_i B_{3,i}(t)}$$

IA725 - 1s2009 - Ting



Curvas Racionais

Influência de pesos



IA725 - 1s2009 - Ting

Curvas de Bézier Racionais

Propriedades

- É polinomial. O grau do polinômio é n .
- Acompanha a forma do polígono de controle.
- Está no fecho convexo dos pontos de controle.
- Influência global de cada ponto de controle.
- Pontos extremos da curva e do polígono coincidem.
- Tangente nos pontos extremos coincidem com os segmentos extremos do polígono de controle.
- A curva não oscila mais que o polígono de controle.
- **Não são invariantes sob transformações afins.**

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas

Splines de Base Racionais

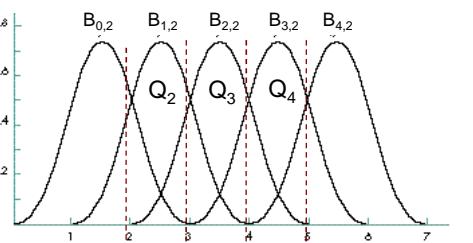
➤ $n=0$

➤ grau: n

➤ vetor de nós: $\{t_0, t_1, t_2 \dots, t_{m+1+n}\}$

➤ $(m-n+1)$ "segmentos de curvas"

$$\begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n B_{i-n+k, n}(t) \begin{bmatrix} x_{i-n+k} \\ y_{i-n+k} \\ z_{i-n+k} \\ w_{i-n+k} \end{bmatrix}$$



$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(t) = \frac{(t-t_i)B_{i,n-1}(t)}{(t_{i+n}-t_i)} + \frac{(t_{i+n+1}-t)B_{i+1,n-1}(t)}{(t_{i+n+1}-t_{i+1})}$$

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Curvas NURBS

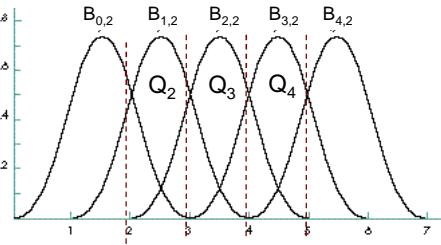
➤ n=0

➤ grau: n

➤ vetor de nós não igualmente espaçados: $\{t_0, t_1, t_2 \dots, t_{m+1+n}\}$

➤ (m-n+1) "segmentos de curvas"

$$\begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n B_{i-n+k, n}(t) \begin{bmatrix} x_{i-n+k} \\ y_{i-n+k} \\ z_{i-n+k} \\ w_{i-n+k} \end{bmatrix}$$



$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

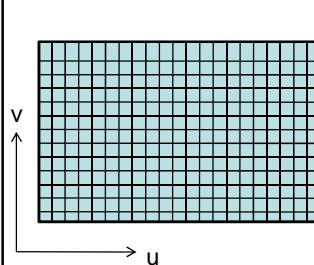
$$B_{i,n}(t) = \frac{(t - t_i)B_{i,n-1}(t)}{(t_{i+n} - t_i)} + \frac{(t_{i+n+1} - t)B_{i+1,n-1}(t)}{(t_{i+n+1} - t_{i+1})}$$

IA725 - 1s2009 - Ting

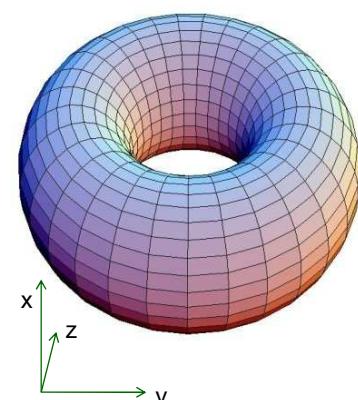
n=2
3 segmentos

Representação de Superfícies Superfícies Paramétricas

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



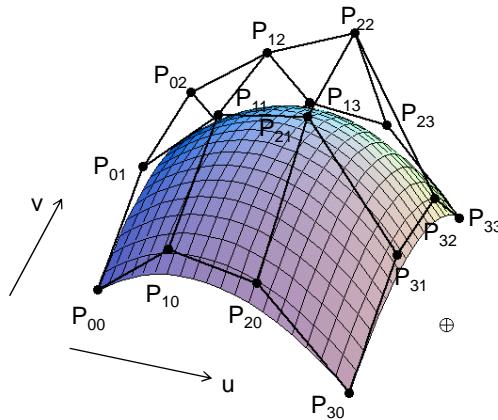
$$\begin{aligned} h + R \cos u, \\ (k + R \sin u) \cos v, \\ (k + R \sin u) \sin v \end{aligned}$$



IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Superfícies

Superfícies de Bézier



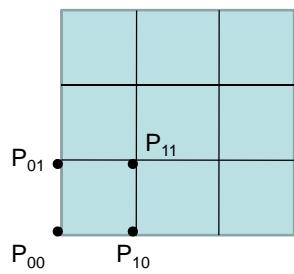
$$P(u, v) = \sum B_{m,j}(v) \left(\sum B_{n,i}(u) P_{ij} \right) \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

EA978 – 2s2008 - Ting

Representação de Superfícies

Superfícies de Bézier Bicubicas

Pontos de controle na borda:
p.ex.: P_{00}, P_{01}, P_{10}



Vetores-tangente na borda
p.ex.: $3(P_{10} - P_{00}), 3(P_{01} - P_{00})$

Vetores-torsão (derivada cruzada) na borda
p.ex.: $9(P_{00} - P_{01} - P_{10} - P_{11})$

$$\text{Se } 9(P_{00} - P_{01} - P_{10} - P_{11}) = 0 \\ P_{00} - P_{01} - P_{10} = P_{11}$$

EA978 – 2s2008 - Ting

Representação de Superfícies

Exemplos de Superfícies de Bézier Biquadráticas

<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/TPBezierSurface/AppTPBezierSurface/index.html>

EA978 – 2s2008 - Ting

Representação de Superfícies

Exemplos de Superfícies de Bézier Bicúbicas

Uma implementação do algoritmo descrito em Watt

<http://www.nbb.cornell.edu/neurobio/land/OldStudentProjects/cs490-96to97/anson/BezierPatchApplet/>

EA978 – 2s2008 - Ting

Superfície de Bézier Bicubicas

OpenGL

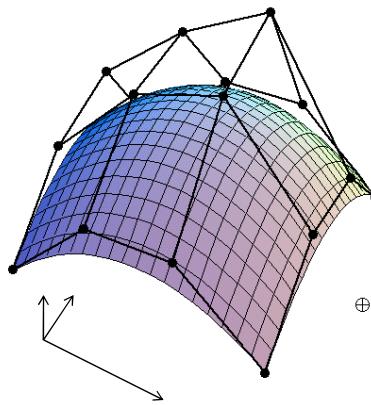
$$P(u,v) = \sum B_{m,j}(v) \sum B_{n,i}(u) P_{ij} \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

GLfloat ctrlpoints[4][4][3] = {

```

{ {-1.5, -1.5, 4.0},
  {-0.5, -1.5, 2.0},
  {0.5, -1.5, -1.0},
  {1.5, -1.5, 2.0}},
{ {-1.5, -0.5, 1.0},
  {-0.5, -0.5, 3.0},
  {0.5, -0.5, 0.0},
  {1.5, -0.5, -1.0}},
{ {-1.5, 0.5, 4.0},
  {-0.5, 0.5, 0.0},
  {0.5, 0.5, 3.0},
  {1.5, 0.5, 4.0}},
{ {-1.5, 1.5, -2.0},
  {-0.5, 1.5, -2.0},
  {0.5, 1.5, 0.0},
  {1.5, 1.5, -1.0}}}
```

};



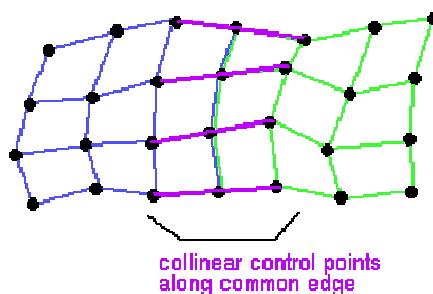
⊕

Representação de Superfícies Continuidade

Continuidade Geométrica:

$$G^0: S(1, v_1) = R(0, v_2)$$

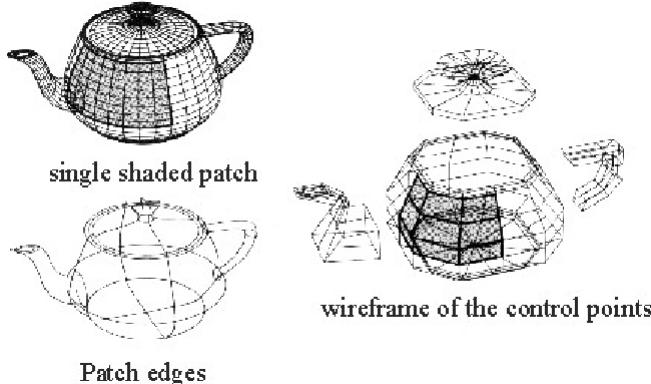
$$G^1: \partial S(1, v_1) / \partial v_1 = k_1 \partial R(0, v_2) / \partial v_2$$



IA725 - 1s2009 - Ting

Superfícies de Bézier

Bule de Utah

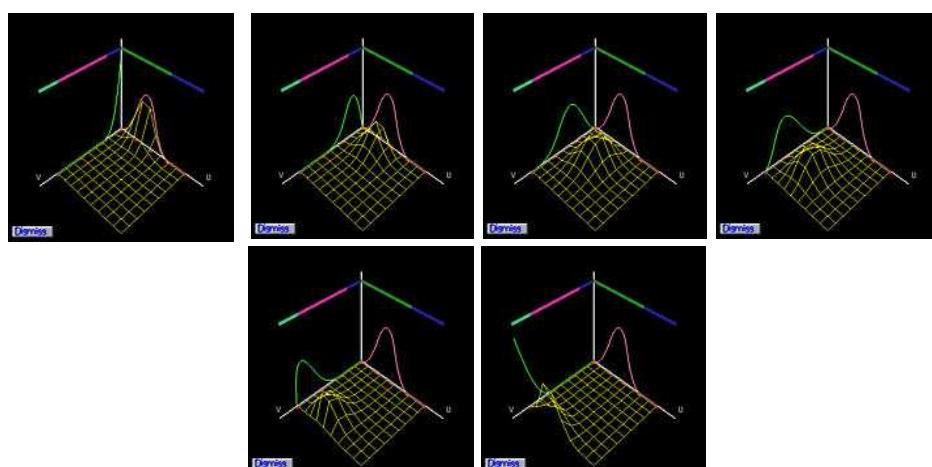


<http://www.holmes3d.net/graphics/teapot/>

IA725 - 1s2009 - Ting

Representação de Superfícies

Funções de Base Bi-dimensionais

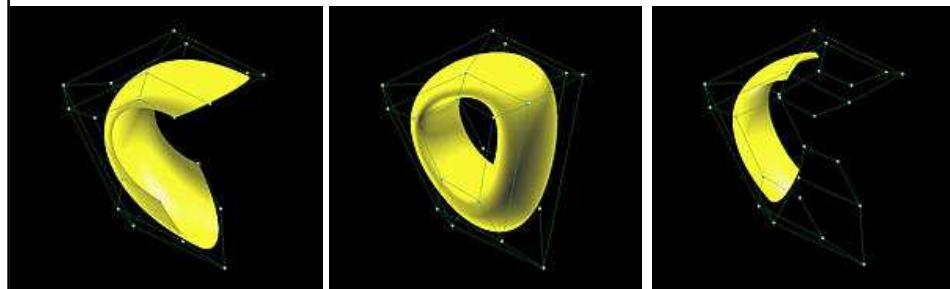


$P(u,v) = \sum B_{m,j}(v) (\sum B_{n,i}(u) P_{ij})$ onde $B_{n,i}(t)$ são funções de base

EA978 – 2s2008 - Ting

Representação de Superfícies

Superfícies de Base

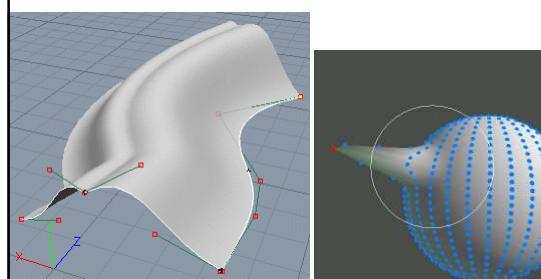


$$P(u,v) = \sum B_{m,j}(v) (\sum B_{n,i}(u) P_{ij}) \text{ onde } B_{n,i}(t) \text{ são funções de base}$$

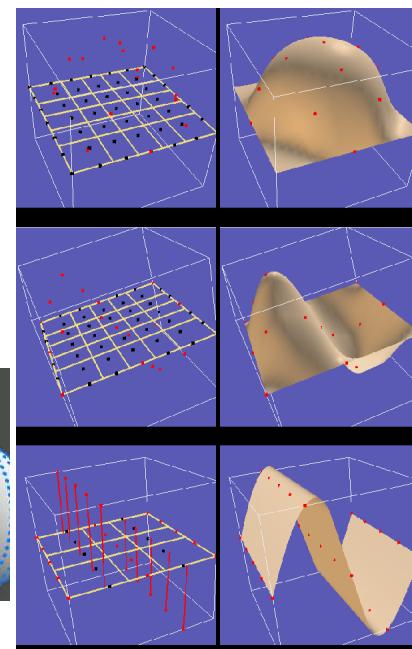
EA978 – 2s2008 - Ting

Geração de Superfícies

- Manipulação interativa dos pontos de controle
- Técnica de varredura a partir de uma curva
- Técnica de ajuste ou interpolação de amostras

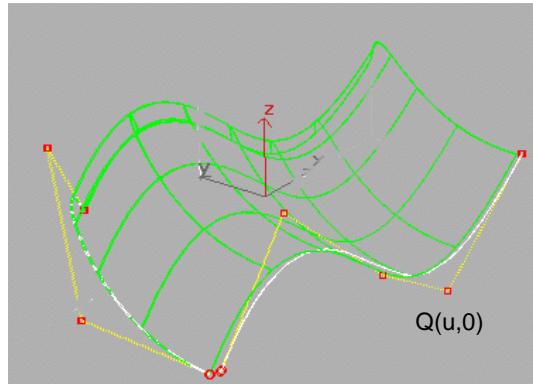


EA978 – 2s2008 - Ting



Geração de Superfícies

Técnica de Varredura



$$Q(u,0) = \sum_{i=0}^n B_{i,3}(u) P_i$$

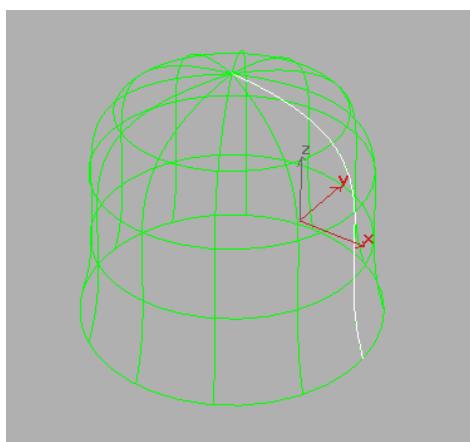
Transformação $T(u)$, tal que

$$\sum_{i=0}^n B_{i,3}(u) P_i = \sum_{j=0}^m N_{j,3}(v) P_j$$

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^n B_{i,3}(u) P_i + T(u) \sum_{j=0}^m N_{j,3}(v) P_j$$

Geração de Superfícies

Revolução



Rotação em torno do eixo z

$$Q(u, \theta) = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad 1 \quad 1] P(u) = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad 1 \quad 1] \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u) P_i$$

Geração de Superfícies

Interpolação por Curva

Dados $D_1, D_2, D_3, \dots, D_j$, determine a curva que os interpole

$$D_i(t_i) = \sum_{k=0}^n B_{i-n+k,n}(t_i) P_{i-n+k}, i = \{1, 2, \dots, j\}$$

$$[D] = [B][P]$$

$$[B]^t [D] = [B]^t [B][P]$$

$$[P] = [[B]^t [B]]^{-1} [B]^t [D]$$

EA978 – 2s2008 - Ting

Representação de Curvas

Splines de Base (B-Splines)

➤ $n=0$

➤ grau: n

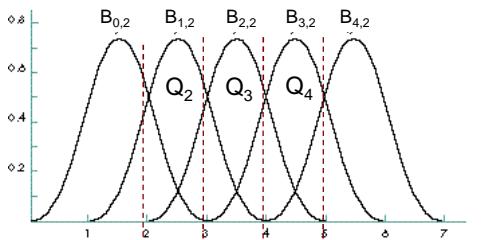
➤ vetor de nós: $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{m+1+n}\}$

➤ $(m-n+1)$ "segmentos de curvas"

$$Q_i(t) = \sum_{k=0}^n B_{i-n+k,n}(t) P_{i-n+k}$$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(t) = \frac{(t-t_i)B_{i,n-1}(t)}{(t_{i+n}-t_i)} + \frac{(t_{i+n+1}-t)B_{i+1,n-1}(t)}{(t_{i+n+1}-t_{i+1})}$$



IA725 - 1s2009 - Ting

Geração de Superfícies

Interpolação de Pontos

Estimar t_i :

- Igualmente espaçado
- comprimento de arco aproximado.

$$t_1 = 0$$

$$\frac{t_l}{t_{\max}} = \frac{\sum_{s=2}^l |D_s - D_{s-1}|}{\sum_{s=2}^j |D_s - D_{s-1}|}$$

EA978 – 2s2008 - Ting

Geração de Superfícies

Interpolação por Superfície

1. Organizar os dados em sequências de pontos
2. Interpolar cada sequência por um *spline* de base
3. Converter *spline* de base em segmentos de curva de Bézier cúbica
4. Formar polígono de controle

EA978 – 2s2008 - Ting