Classificação de Pertinência dos Pontos em Objetos da NM-Classe

Wu, Shin-Ting
Luiz Gonzaga da Silveira Júnior

Grupo de Computação de Imagens (GCI)
Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (DCA)
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
C.P. 6101, Unicamp
13083-970 Campinas - SP
`ting,gonzaga@dca.fee.unicamp.br`

Abstract. This paper presents a new set membership classification algorithm that can partition the points of two intersecting non-manifolds A and B in such a way that their Boolean combinations can be readily computed. A concept of minimal embbedding space is used to ensure the consistent point neighborhood classification.

1 Introdução

Operações booleanas constituem uma das mais versáteis ferramentas para modelar formas geométricas complexas a partir de formas simples. O processo de construção com base nessas operações se identifica com vários processos físicos com os quais estamos familiarizados, tais como "retirar" um pedaço de uma peça para fazer um furo ou "encaixar" duas peças para formar uma terceira. Os algoritmos para operações booleanas entre duas formas geométricas consistem basicamente em determinar todas as possíveis interseções geométricas entre os vértices, as arestas e as faces dessas formas e selecionar corretamente os subconjuntos de pontos que devem fazer parte do resultado.

Pode-se obter todas as possíveis combinações booleanas de dois objetos A e B, se os pontos de A forem particionados em relação a B em quatro subconjuntos disjuntos - os pontos de A exterior a B, os pontos de B exterior a A, os pontos de A interior a B e os pontos de B interior a A. Um procedimento ou uma função que particiona os pontos de dois objetos em subconjuntos, a partir dos quais obtém-se as possíveis combinações booleanas, é conhecido como classificação de pertinência dos pontos desses dois objetos.

Como existem distintas formas equivalentes para expressar uma combinação booleana em função dos pontos interiores, de fronteira e complementares (ou exteriores), o desenvolvimento de algoritmos de classificação é intimamente ligado ao desenvolvimento dos algoritmos de operações booleanas. Os procedimentos de classificação tem sido propostos para atender os requisitos particulares de cada conjunto de operadores, que por sua vez são dependentes do domínio de objetos em consideração.

Originalmente, a proposta da classificação de pertinência [7] [8] é definida em termos dos operadores booleanos regularizados [9] para o domínio de *r-sets*[1]. Para garantir que esses operadores sejam fechados no domínio dos *r-sets*, foi mostrado que um conjunto candidato deve ser particionado em subconjuntos regularizados de pontos de fronteira, do interior e do exterior em relação ao conjunto de referência. Requicha e Voelcker [10] aplicaram também este procedimento em algoritmos de *merging* e *boundary evaluation.*

Mäntylä [6] propôs um conjunto de operações booleanas fechadas sobre o domínio de objetos topologicamente equivalentes a variedades bidimensionais fechadas. Ele introduziu uma maneira de considerar o "sobre-positivo" (ON^+) e o "sobre-negativo" (ON^-) para tratar corretamente os pontos de fronteira coincidentes numa combinação booleana. Para isso, foi utilizada a noção de pontos interiores e exteriores de um objeto em relação ao outro.

Gonzaga e Wu [2] propuseram um algoritmo para operações booleanas fechadas sobre o domínio de objetos da NM-classe[2]. Foi mostrado que, neste caso, pode-se também reduzir o problema de operações booleanas em classificação de pertinência. No entanto, as funções de classificação propostas pelos trabalhos anteriores não se aplicam a esse propósito por dois

[1] Denota-se como o conjunto regularizado de um conjunto o fecho dos pontos interiores deste conjunto. Um *r-set* é o conjunto que coincide com o seu conjunto regularizado correspondente.

[2] Objetos representáveis pelos complexos celulares de até dimensão três.

motivos. O primeiro é que os subconjuntos considerados são diferentes; e o segundo, o mais importante, é que, diferentemente das situações já estudadas, o espaço de imersão dos pontos de um objeto da NM-classe em relação ao próprio objeto pode ser distinto do espaço de imersão em relação à combinação booleana deste objeto com um outro da NM-classe.

Este artigo sugere uma estratégia de classificação de pertinência para os pontos de dois objetos da NM-classe. Mostramos que, com a utilização da noção de espaço de imersão mínimo, o problema de classificação se reduz a um problema de determinação do tipo de vizinhança dos pontos. Em relação aos algoritmos de combinações booleanas existentes, antes da classificação de pertinência precisa-se fazer uma classificação da vizinhança dos pontos em relação ao espaço de imersão mínimo, se a interseção envolve objetos de dimensão distinta. Com isso, garante-se a geração de resultados corretos.

O artigo é organizado em 7 seções. Na seção 2 são apresentadas as definições das operações booleanas fechadas sobre o domínio de objetos da NM-classe em termos de 8 subconjuntos. Na seção 3 será introduzida a noção do espaço de imersão mínimo. Na seção 4 mostraremos como pode ser feita a reclassificação dos pontos a partir dos espaços de imersão mínimos para obter corretamente os subconjuntos utilizados em combinações booleanas definidas de acordo com [2]. A seção 5 descreve sucintamente uma implementação e alguns resultados são apresentados na seção 6. E, finalmente, na seção 7 são feitas algumas considerações finais.

2 Operadores Booleanos Fechados

O domínio de objetos que formam a *NM-Classe* congrega sólidos, entidades desprovidas de volumes como "cascas", curvas e pontos. Matematicamente, eles podem ser modelados por complexos celulares de dimensões inferiores ou igual a três. Uma célula n-dimensional, ou simplesmente uma célula-n, é um subconjunto do espaço $\Re^n$ homeomorfo[3] a uma bola aberta n-dimensional $B^n(p;R)$[4]. Um complexo celular C^n de dimensão n é uma coleção finita de células e_λ, com $\lambda \in \Lambda = \{0, 1, ..., n\}$, tal que [3, 4]:

1. $C^n = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$
2. Se $\dim(e_\lambda)=k+1$ $(\lambda \in \Lambda)$, então $([e_\lambda] - e_\lambda) \subseteq C^k$
3. $e_i \cap e_j = \emptyset$, $i \neq j$

Wu [11] implementou uma estrutura de dados com uma interface funcional simples para manipular consistentemente esse domínio de objetos. Essa estrutura de dados é denominada Modelo de Dados Topológico, TDM.

Gonzaga e Wu [2] sugeriram uma forma de representar os operadores booleanos fechados sobre o domínio dos objetos da NM-classe em função dos operadores booleanos ordinários. Nesta seção são transcritos os principais resultados obtidos em [1], usando as seguintes notações:

- iA: conjunto de pontos do interior de A
- bA: conjunto de pontos de fronteira de A
- kA: fecho de A

O operador interseção fechado $\otimes$ para dois objetos A e B, obtido a partir do fecho do resultado da interseção ordinária de A e de B, é dado por:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= [(iA \cap iB) \cup (bA \cap iB)] \cup \\ &\quad [(bB \cap iA) \cup (bB \cap bA)] \end{aligned} \tag{1}$$

A união fechada $\oplus$ entre A e B, obtida a partir do fecho do resultado da união ordinária de A e B, é dada por:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= [(iA - B) \cup (iB - A)] \cup \\ &\quad [(iA \cap iB) \cup (bA - B)] \cup \\ &\quad [(bA \cap iB) \cup (bB \cap iA)] \cup \\ &\quad [(bB - A) \cup (bA \cap bB)] \end{aligned} \tag{2}$$

A diferença fechada $\ominus$ entre A e B, obtida a partir do fecho do resultado da diferença ordinária de $A - B$, é dada por:

$$\begin{aligned} A \ominus B &= [(iA - B) \cup (bA - B)] \cup \\ &\quad [(iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)]^* \end{aligned} \tag{3}$$

Já que a diferença não é comutativa, temos que o fecho da diferença ordinária de $B - A$ pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} B \ominus A &= [(iB - A) \cup (bB - A)] \cup \\ &\quad [(iB \cap bA) \cup (bA \cap bB)]^* \end{aligned} \tag{4}$$

[3] Dois espaços M e N são topologicamente equivalentes ou homeomorfos, se e somente se, existe uma bijeção contínua de M para N cuja inversa é também contínua[5].

[4] Sejam p um ponto em $\Re^n$ e $R > 0$ um número real. Define-se como uma **bola aberta** $B^n(p;R)$ de centro p e raio R o conjunto dos pontos de $\Re^n$ cuja distância ao ponto p é menor do que R [4]. Particularmente, $B^1(p;R)$ e $B^2(p;R)$ são comumente conhecidas como intervalo e disco abertos, respectivamente.

As equações (1), (2), (3) e (4) nos permitem identificar oito subconjuntos de pontos básicos para determinar qualquer combinação booleana fechada. Esses oito subconjuntos são agrupados na Tabela 1. Atribuimos a cada grupo um identificador para facilitar referências posteriores.

Grupo			*ID*
iA	$\cap$	iB	1
iA	$-$	B	2
iB	$-$	A	3
bA	$\cap$	iB	4
bB	$\cap$	iA	5
bA	$-$	B	6
bB	$-$	A	7
bA	$\cap$	bB	8
$(bA$	$\cap$	$bB)^*$	8^*

Tabela 1: Subconjuntos básicos para combinações booleanas fechadas.

O subconjunto $(bA \cap bB)^*$ difere do subconjunto $(bA \cap bB)$ no fato que ele só considera os pontos de fronteira que tenham como vizinhança os pontos pertencentes a um dos três primeiros subconjuntos que aparecem nas equações (3) e (4).

Para distinguir os 8 subconjuntos de pontos listados na Tabela 1 é necessário distinguir os pontos do interior e de fronteira de cada objeto. Para isso, necessita-se classificar a vizinhança dos pontos. A noção de vizinhança é uma noção relativa, isto é, ela diz respeito a um espaço de ambiente (ou espaço de imersão). Por exemplo, um ponto sobre uma reta tem como a vizinhança um intervalo aberto nesta reta; enquanto se o considerarmos sobre um plano a vizinhança será um disco aberto. O algoritmo de pertinência proposto pelo Tillove [7] [8] tem como premissa que a vizinhança de todos os pontos seja topologicamente equivalente a uma bola tridimensional aberta, uma vez que o domínio de objetos é constituído por *r-sets*. Mäntylä [6], por outro lado, trabalhou com a premissa que a vizinhança de cada ponto seja homeomorfa a um disco aberto, já que o seu domínio cobria variedades bidimensionais fechadas.

No nosso caso, devido à heterogeneidade das dimensões das componentes dos objetos, deparamos com o problema de determinar um espaço de imersão conveniente para classificar os pontos dos objetos em consideração. Esse espaço deve ser definido de tal forma que possibilite uma classificação refinada da vizinhança dos pontos comuns aos objetos de dimensões distintas, procurando preservar a distinção entre o interior e a fronteira. Isso facilita a filtragem topológica no modelo que se resulta de uma operação booleana[5].

3 Espaço de Imersão Mínimo

Para nosso propósito introduzimos o conceito de **bola topológica aberta**. Entendemos como uma bola topológica aberta $\mathcal{B}^n(p)$ "centrado" em p um conjunto de pontos no espaço topologicamente equivalente a uma bola aberta $B^n(p; R)$.

Sejam (W, τ) um espaço topológico[6] e $\mathcal{B}^n(p)$ uma bola topológica aberta. A vizinhança $N(p, C)$ de um ponto p em relação a um complexo celular C no espaço (W, τ) é dita:

- **completa**, se $N(p, C) = \mathcal{B}^n(p)$, ou seja, se p pertence ao interior de C.
- **nula**, se $N(p, C) = \emptyset$, ou seja, se p pertence ao complemento de C.
- **parcial**, se $N(p, C) \neq \mathcal{B}^n(p)$ e $N(p, C) \neq \emptyset$, ou seja, se p pertence à fronteira de C.

De acordo com essa definição, $\mathcal{B}^n(p)$ desempenha o papel de espaço de imersão (local) do ponto $p \in C$. A princípio, n pode assumir qualquer valor inteiro desde que $\mathcal{B}^n(p)$ cubra a vizinhança de interesse. No nosso caso, para evitar a "descaracterização" dos pontos interiores, tomamos o menor valor inteiro m que satisfaz esta condição. $\mathcal{B}^m(p)$ é chamada **espaço de imersão mínimo** (local) de p.

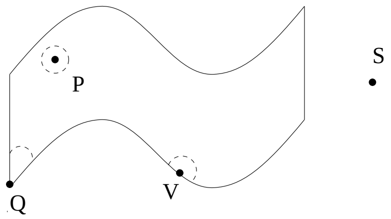

Figura 1: *Classificação de vizinhança em relação a um complexo celular.*

Figura 1 ilustra as vizinhanças de alguns pontos em relação ao complexo celular C_f (uma superfície com bordo). No caso, podemos tomar $\mathcal{B}^2(p)$, $\forall p \in C_f$, para classificar p. Assim, a vizinhança $N(P, C_f)$ é completa; as vizinhanças $N(Q, C_f)$ e $N(V, C_f)$ são parciais e a vizinhança $N(S, C_f)$ é nula.

[5] Filtragem topológica é um procedimento que elimina redundâncias de informações geométricas através da exclusão de entidades topológicas.

[6] Um espaço topológico (W, τ) é um conjunto W provido de uma topologia τ [5].

De forma análoga, ao considerarmos dois ou mais complexos celulares, podemos determinar consistentemente a vizinhança dos pontos em relação a estes complexos desde que sejam atribuídos aos pontos destes complexos o mesmo espaço de imersão. Figura 2 ilustra a classificação de vizinhança dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 em relação a dois complexos C_1 e C_2, considerando que o espaço de imersão comum aos dois seja $\mathcal{B}^2(p)$, $\forall p \in C_1, C_2$.

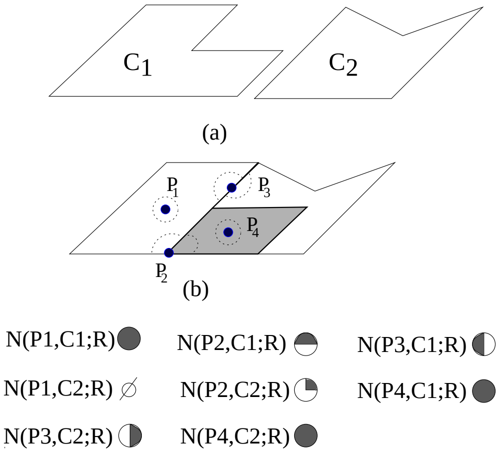

Figura 2: *Classificação de vizinhança dos pontos em relação a dois complexos celulares.*

Quando as vizinhanças de um ponto p em relação a dois complexos celulares tiverem espaços de imersão (locais) distintos, precisa-se "normalizar" esses espaços de tal forma que as classificações de vizinhança de p em relação a ambos os complexos sejam consistentes. Normalizamos esses espaços com a menor bola topológica $\mathcal{B}^{\mu}(p)$ que cubra a união das vizinhanças de p. Esta bola é denominada **espaço de imersão mínimo comum**. Veremos a seguir que essa normalização pode ser feita com base na classificação de vizinhança dos pontos em relação a cada complexo ao qual eles fazem parte individualmente.

Consideremos duas células A e B de dimensão até dois (vértices, arestas ou faces), cujos pontos foram devidamente classificados em relação a dois complexos celulares, C_A e C_B, aos quais elas fazem parte. Se essas duas células se interceptam em um ponto p, distinguem-se basicamente três situações quanto à relação de pertinência entre as vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ classificadas, respectivamente, conforme os espaços de imersão $\mathcal{B}^k(p)$ e $\mathcal{B}^l(p)$:

1. A vizinhança $N(p, C_A)$ está contida em $N(p, C_B)$, ou vice-versa: Considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum $\max\{k, l\}$. As Figuras 3.(a,b) mostram duas células que se sobrepõem. Na Figura 3.(a) são apresentadas duas curvas cujos pontos p são classificados na base de $\mathcal{B}^1(p)$; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 1. Enquanto na Figura 3.(b) os pontos p das células são classificadas com base em $\mathcal{B}^1(p)$; porisso, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2. Na Fig 3.(c) um segmento (cujos pontos p tem como o espaço de imersão mínimo $\mathcal{B}^1(p)$) intercepta com o bordo de um polígono (cujos pontos p classificados de acordo com o espaço de imersão $\mathcal{B}^2(p)$); então, o espaço de imersão mínimo comum a duas células é 2. Finalmente, na Figura 3.(d) uma curva intercepta com o interior de um polígono; segue-se que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2.

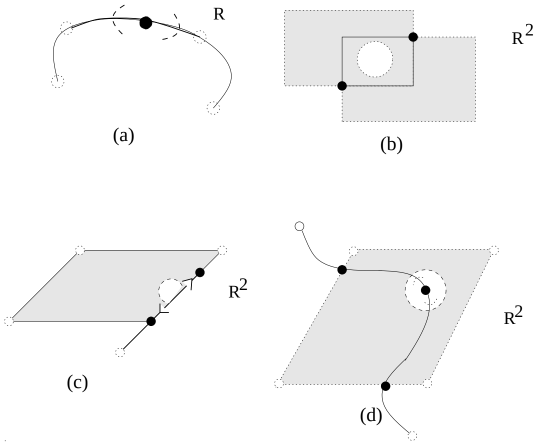

Figura 3: *Espaços de imersão mínimo para vizinhanças sobrepostas.*

2. As vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ são parciais e disjuntas: Considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum a dimensão da menor bola topológica $\mathcal{B}^j(p)$ que inclui tanto os pontos de $N(p, C_A)$ quanto os pontos de $N(p, C_B)$. Em modelagens restritas a $\Re^3$, pode-se mostrar que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é sempre $\max\{k, l\}$. A Figura 4(a) ilustra a interseção de uma curva e um polígono num ponto p. Em relação ao polígono, este ponto tem como espaço de imersão mínimo $\mathcal{B}^2(p)$; e em relação à curva, o espaço $\mathcal{B}^1(p)$; então, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2. Caso dois polígonos se interceptam num segmento (Figura 4.(b)), este segmento tem

vizinhanças homeomorfas a "semi-discos"; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo é também 2. Na Figura 4.(c) é apresentado o caso de interseção de duas curvas num ponto extremo p, cujo espaç de imersão mínimo é $\mathcal{B}^1(p)$; segue-se que o espaço de imersão mínimo comum é 1.

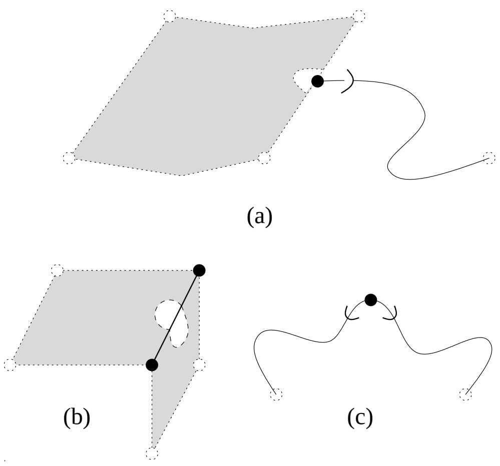

Figura 4: *Espaços de imersão mínimo para pontos com vizinhanças parciais.*

3. As vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ são disjuntas e uma delas é completa: Como no caso anterior, considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum a dimensão da menor bola topológica $\mathcal{B}^j(p)$ que inclui tanto os pontos de $N(p, C_A)$ quanto os pontos de $N(p, C_B)$. Em modelagens restritas a $\Re^3$, pode-se mostrar que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é sempre $(\max\{k, l\} + 1)$. A Figura 5(a) apresenta a interseção de uma curva e um polígono num ponto p. Em relação ao polígono este ponto é classificado com base em $\mathcal{B}^2(p)$ e em relação à curva, $\mathcal{B}^1(p)$; então, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 3. Caso dois polígonos se interceptam num segmento (Figura 5.(b)), os pontos deste segmento são ambos classificados em relação a uma bola topológica bidimensional; assim, a dimensão do espaço de imersão mínimo é também 3. Na Figura 5.(c) temos a interseção de duas curvas num ponto, cujas vizinhanças são classificadas de acordo com a bola topológica unidimensional; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2.

Ressaltamos aqui que, por questão de consistência, ao alterarmos o espaço de imersão dos pontos de

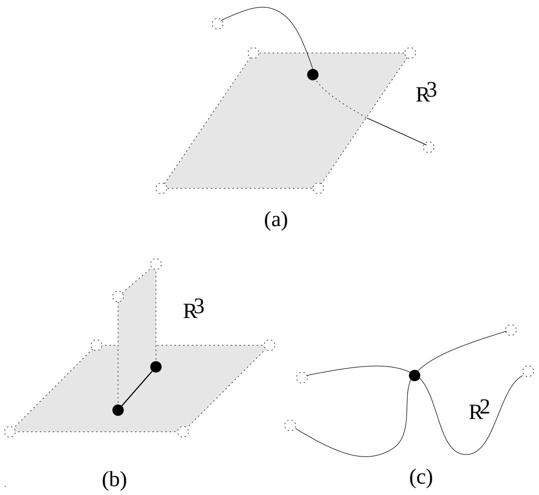

Figura 5: *Espaços de imersão mínimo para vizinhanças disjuntas, sendo uma delas completa.*

uma célula, precisamos reclassificar todas as células vizinhas recursivamente até que não haja ambiguidade na distinção entre os pontos de fronteira e os pontos do interior para o operador fecho.

4 Função de Classificação de Pertinência

Dados dois objetos A e B da NM-classe. Se determinarmos os pontos de interseção e reclassificarmos as vizinhanças dos pontos de A e B em função destes pontos de interseção de acordo com o algoritmo dado na seção 3, podemos particioná-los em 8 subconjuntos de pontos listados na Tabela 1. Nesta seção é apresentado um procedimento de partição ou uma função de classificação de pertinência.

Uma análise rápida aos tipos de pontos existentes em cada subconjunto listado na Tabela 1 nos leva a concluir que a partição, em termos do tipo de vizinhança, deve ser feita de acordo com os seguintes critérios:

- subconjunto 1: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a A e em relação a B.
- subconjunto 2: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a A e a vizinhança nula em relação a B.
- subconjunto 3: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a B e a vizinhança nula em relação a A.

- subconjunto 4: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança completa em relação a B.
- subconjunto 5: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a B e a vizinhança completa em relação a A.
- subconjunto 6: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança nula em relação a B.
- subconjunto 7: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a B e a vizinhança nula em relação a A.
- subconjunto 8: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança parcial em relação a B.

Como o subconjunto $(bA \cap bB)^*$ é definido em função dos subconjuntos 2, 5 e 6 para $(A \ominus B)$, e em função dos subconjuntos 3, 4 e 7 para $(B \ominus A)$, podemos considerar que, tendo esses 8 subconjuntos identificados, gera-se qualquer combinação booleana entre A e B. Se a operação for diferença fechada, basta aplicar o operador fecho sobre os subconjuntos 2, 5 e 6 para obter $(bA \cap bB)^*$ no lugar de $(bA \cap bB)$.

Figura 6 exemplifica a identificação das células que se resultaram da interseção entre uma superfície e uma curva de acordo com os grupos listados na Tabela 1.

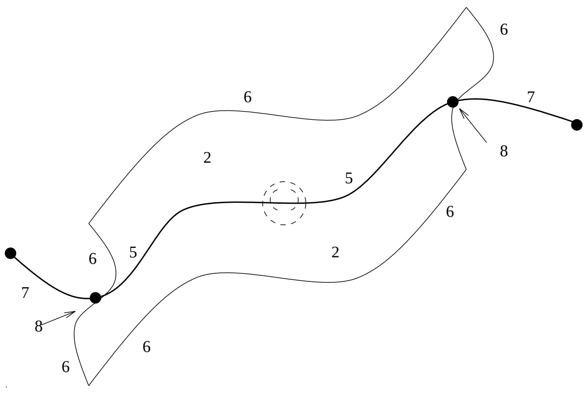

Figura 6: *Identificação de subconjuntos conforme a Tabela 1.*

5 Uma Implementação

Para testar o algoritmo apresentado neste artigo, é necessário dispor de funções de interseção entre as formas geométricas. No início deste trabalho só tinhamos funções de interseção para formas geométricas simples - polígonos, segmentos de reta e pontos no $\Re^3$ - no nosso laboratório. Como o objetivo deste trabalho é prover um procedimento para classificação de pertinência dos pontos de dois objetos da NM-classe que se interceptam, e não um algoritmo de interseção, decidimos implementar o nosso algoritmo em função dos algoritmos já implementados.

Para processar corretamente os sólidos maciços e as cascas fechadas que coexistem no domínio de objetos da NM-classe, decidimos ainda introduzir uma segunda reclassificação da vizinhança dos pontos no lugar da implementação de novas funções para computar a interseção entre os pontos de uma célula de dimensão três com outras células. Com isso, a interseção entre um sólido e um objeto é calculada indiretamente através da interseção da sua "casca envoltória" com o objeto. E, através da interseção obtida, infere-se os pontos comuns com o interior do sólido. Por exemplo, a interseção de um segmento com um cubo maciço é calculada através das interseções deste segmento com as seis faces do cubo. Se o resultado for dois pontos, sabe-se que um dos três trechos do segmento coincide com o interior do cubo. Para determinar este trecho, pode-se tomar um ponto qualquer e verificar a sua vizinhança em relação ao sólido.

Como resultado dessa decisão implementamos um algoritmo com três módulos distintos conforme mostra o fluxograma na Figura 7.

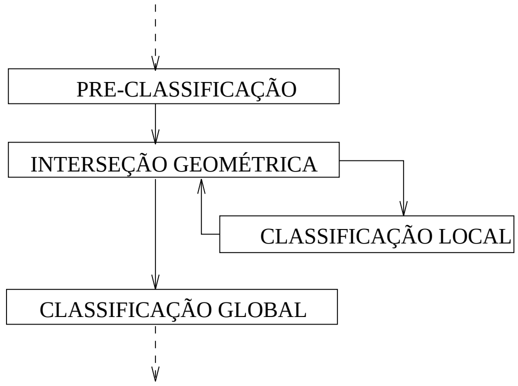

Figura 7: *Fluxograma de Classificação.*

O módulo de pré-classificação classifica a vizinhança dos pontos de cada célula levando em consideração do espaço de imersão do complexo de células ao qual ela faz parte. Por simplicidade, sem comprometer o resultado, consideramos como o espaço de imersão a própria célula e que os dois complexos sejam disjuntos. Assim as células recebem um dos quatro seguintes identificadores da Tabela 1: 2, 3, 6 e 7.

O módulo de classificação local leva em consideração do espaço de imersão mínimo comum e reconsidera o tipo de vizinhança atribuído aos pontos comuns aos dois complexos. Os pontos comuns são determinados pelo algoritmo de interseção. À medida que o tipo de vizinhança for atualizado, atribui-se ainda a esses pontos um identificador da Tabela 1 segundo os critérios descritos na seção 4. Nesta etapa, fizemos uso da estrutura de dados TDM para facilitar a atualização recursiva do tipo de vizinhança dos pontos "vizinhos" dos pontos identificados e identificá-los também com um dos rótulos da Tabela 1.

O módulo de classificação global só é executado se existir alguma célula de dimensão três. Ele detecta os pontos comuns com as células de dimensão três e faz uma segunda reclassificação do tipo de vizinhança desses pontos. Simultâneamente são atualizados também os identificadores atribuídos a esses pontos pelo módulo de pré-classificação ou classificação local.

6 Resultados

Os resultados apresentados aqui são provenientes de operações booleanas fechadas implementadas para o sistema ProSIm[7] com base no algoritmo de classificação de pertinência apresentado.

A Figura 8 mostra a operação booleana entre duas faces planares no espaço.

A Figura 9 mostra a operação booleana entre duas faces perpendiculares a uma superfície composta de duas faces.

Observe que os resultados gerados são válidos para o domínio de objetos da NM-classe.

7 Considerações Finais

A principal contribuição deste trabalho é o uso da noção de espaço de imersão mínimo para classificar corretamente o tipo de vizinhança dos pontos comuns a objetos de dimensão distinta. Com isso, foi possível utilizar o mesmo padrão de algoritmos de combinações boolenas existentes, cujo maior trunfo é a redução de um problema complexo em um problema local de determinação do tipo de vizinhança dos pontos.

O procedimento de classificação de pertinência proposto não é só um mecanismo eficiente na implementação dos operadores booleanos fechados sobre os objetos da NM-classe como mostrado neste trabalho. Ele é também útil para quaisquer problemas que possam ser reduzidos ao problema de classificação de

[7] *ProSIm*é um sistema para prototipação e síntese de imagens desenvolvido pelo DCA/FEEC/UNICAMP

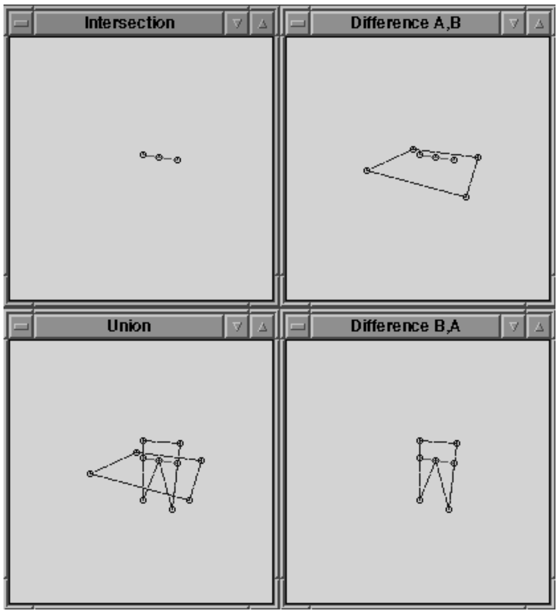

Figura 8: *Combinações booleanas fechadas entre duas faces planares.*

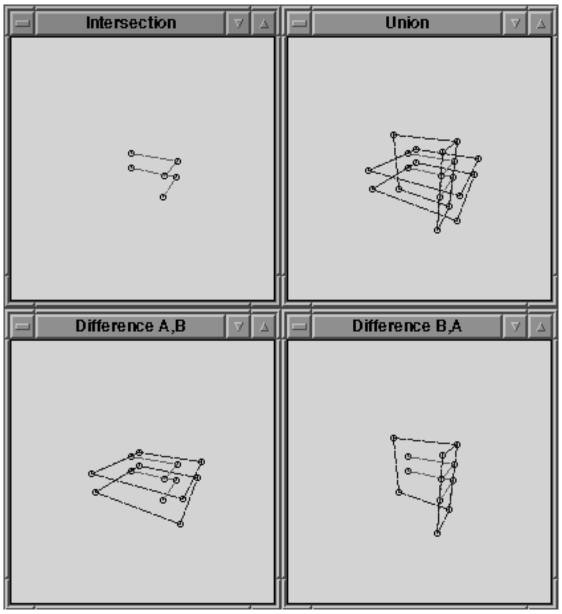

Figura 9: *Combinações booleanas fechadas entre quatro faces.*

pertinência como o problema de deteção de colisão entre os objetos da NM-classe.

O algoritmo proposto viabiliza ainda a concepção de algoritmos de operação booleana interativos, porque ele particiona indistintamente todos os pontos dos dois objetos que se interceptam. A partir dos subconjuntos obtidos é possível computar todas as possíveis combinações booleanas. Podemos, portanto, oferecer por exemplo ao usuário a facilidade de verificar essas possibilidades sem maior custo computacional.

A função de classificação de pertinência foi implementada para processar pontos, segmentos e polígonos. Está em fase de desenvolvimento um algoritmo de interseção para superfícies racionais no nosso laboratório. Pretende-se, como um dos futuros trabalhos, a inclusão dessas superfícies no domínio dos nossos objetos da NM-classe.

Referências

[1] L. G. da Silveira Júnior. Operadores booleanos para objetos modelados por complexos celulares. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Dep. de Eng. da Comput. e Aut. Industrial - Fac. de Eng. Elétrica e de Computação, ago. 1996.

[2] L.G. da Silveira Júnior; S.T. Wu. Operadores booleanos para a classe de *nm*-conjuntos. In K. de Geus; S. Scheer (editores) C.S.Freitas, editor, *SIBGRAPI'94*, pages 271–279, Curitiba-PR, nov. 1994.

[3] K. Numao; S. Kawabe H. Masuda, K. Shimada. A mathematical theory and applications of non-manifold geometric modeling. In *Advanced Geometric Modeling for Engineering Applications*, pages 89–103. North-Holland, Nov. 1989.

[4] K. Jänich. *Topology.* Springer-Verlag, 1984.

[5] E.L. Lima. *Espaços métricos.* Impa-CNPq. (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1983.

[6] M. Mäntylä. Boolean opeartions of 2-manifolds through vertex neighborhood classification. *ACM Transactions on Graphics*, 5(1):1–29, Jan. 1986.

[7] R.B. Tilove. A study of geometric set-membership classification. Technical memoradum, College of Engineering and Applied Science. University of Rochester, Rochester, New York, Nov. 1977. Production Automation Project.

[8] R.B. Tilove. Set membership classification: A unified approach to geometric intersection problems. *IEEE Transactions on Computers*, 29(10):847–883, Oct. 1980.

[9] A.A.G. Requicha; H.B. Voelcker. Constrcutive solid geometry. Technical Memoradum 25, College of Engineering and Applied Science. University of Rochester, Rochester, New York, Nov. 1977. Production Automation Project.

[10] A.A.G. Requicha; H.B. Voelcker. Boolean operations in solid modeling: Boundary evaluation and merging algorithms. *Proceedings of the IEEE*, 73(1):30–44, Jan. 1985.

[11] S.T. Wu. *Topologie von Hybriden Objekten.* PhD thesis, Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Germany, 1991.