

Exame de Qualificação para Mestrado  
Monografia  
Deformação de Malhas de Arbitrária Topologia

Matias Rodrigues Costa  
Orientadora: Profa. Dr.-Ing. Wu Shin-Ting

15 de Junho de 2012

## 1 Introdução

Existem dois modelos comumente usados para simulações de deformações em tecidos: mecânica de partículas e mecânica do contínuo. No caso do uso de partículas, discretiza-se a superfície em uma malha regular, com cada vértice conectado a seus vizinhos. A interação entre esses vértices pode se dar de diversas formas, sendo geralmente escolhido o modelo massa-mola. Apesar de eficiente em termos de processamento, este modelo é uma simplificação das propriedades físicas do tecido, descartando um efeito direto de propriedades como as curvaturas, e geralmente necessitando de aproximações para resultar visualmente no comportamento esperado. No caso de mecânica do contínuo, embora a simulação seja precisa, ela requer um alto custo computacional e não é aplicável em situações onde se deseja produzir resultados em tempo real.

Esse trabalho propõe-se a estudar e implementar o modelo proposto em Green et al. [1], baseado na teoria de superfícies de Cosserat da Mecânica do Contínuo. Ele utiliza propriedades de geometria diferencial, como tensores métricos e de curvatura, para considerar alterações de área e curvatura na estimação das forças internas, tornando-o um modelo interessante para simulações realistas. Entretanto, por possuir uma formulação complexa, ele não é muito apropriado para implementações numéricas envolvendo malhas discretizadas. Nossa implementação envolve a elaboração de soluções numéricas para superar estas dificuldades e tornar possível a aplicação do modelo de Cosserat em superfícies de topologia arbitrária.

**Contribuições** A principal contribuição do nosso trabalho é apresentar uma solução numérica para a equação diferencial parcial de equilíbrio para cada ponto  $\mathbf{r}$  de valência arbitrária

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \varrho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{\delta \mathbf{r}} &= \mu \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \varrho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}(t) \\ &= \mu \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $\mu$  é densidade de massa (massa por unidade de área),  $\varrho$  é o coeficiente de forças de amortecimento que agem contra as fricções do tecido e as forças externas de fricção de fluidos,  $\mathbf{F}$  denota a contribuição total de forças externas por unidade de massa em  $\mathbf{r}$  e o termo  $\frac{\delta A(\mathbf{r}, t)}{\delta \mathbf{r}}$  corresponde a energia interna por unidade de área associada a aparência de flexibilidade da malha. As equações constitutivas  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, t)$  são geralmente chamadas de *rigidez da malha*.

Nós propomos usar o algoritmo de estimação de curvaturas proposto por Batagelo e Wu [2] para determinar as variações de curvaturas, e usar um referencial de coordenadas curvilíneas variável (*convected curvilinear system*) para obter as derivações métricas ao longo da deformação. Ao introduzir e adaptar essas técnicas nós superamos dificuldades envolvendo a valência dos vértices, presentes em alguns trabalhos anteriores [3, 4]. Em particular, inspirados pelo artigo de Rusinkiewicz [5], nós tentamos discretizar cada termo na equação constitutiva usando sua interpretação geométrica. Em nossos experimentos avaliamos a qualidade e desempenho da simulação e fomos capazes de observar diversos resultados interessantes que validam e delimitam nossa abordagem.

## 2 Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns conceitos fundamentais para desenvolvimento do modelo de superfície de Cosserat.

### 2.1 Notação de Einstein

A notação de Einstein permite escrever equações complexas, especialmente envolvendo somatório de termos, de maneira compacta [6]. Ela é extensivamente utilizada no desenvolvimento das superfícies de Cosserat.

Nessa notação, letras romanas representam os valores 1, 2 e 3 e as gregas apenas 1 e 2, numa combinação de diversos fatores. Por exemplo, uma equação  $A = x_i y_\alpha$ , é uma forma compacta de expressar

$$\begin{aligned} A = x_i y_\alpha &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 x_i y_\alpha \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_3 y_1 \\ &= x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_2 . \end{aligned} \tag{2}$$

### 2.2 Tensores

A descrição quantitativa de propriedades geométricas ou físicas podem mudar na mesma ou na direção oposta de mudanças na base de vetores. Se elas mudam na mesma direção, o tensor é chamado de *contravariante*, e caso contrário, de *covariante*. Uma notação de sobrescrito e subscrito é adotada para distinguir entre estas duas variações. Índices superiores indicam componentes contravariantes, e inferiores covariantes. A *ordem* (ou grau) de um tensor é a dimensão do *arranjo* necessário para representá-lo.

Um conjunto de quantidades  $\bar{T}^{jk}(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$  e  $T^{hl}(x_h, x_l)$  são os componentes de um *tensor contravariante de segunda ordem*, se quando transformamos as coordenadas, essas quantidades se transformam de acordo com a lei

$$\bar{T}^{jk}(x_j, x_l) = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l} T^{hl}(x_h, x_l). \quad (3)$$

Analogamente, o conjunto de valores  $\bar{T}_{jk}(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$  e  $T_{hl}(x_h, x_l)$  formam os componentes de *tensor covariante de segunda ordem* se sua transformação segue a lei

$$\bar{T}_{jk}(x_j, x_k) = \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} T_{hl}(x_h, x_l). \quad (4)$$

### 2.3 Tensores métrico e de curvatura

Seja  $\mathbf{r}: \Omega \rightarrow R^3$  uma superfície regular  $\mathcal{S}$  dada por

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = (x(x^1, x^2), y(x^1, x^2), z(x^1, x^2)), \quad (5)$$

com  $x^1, x^2 \in \Omega$ . Como temos

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} dx^2, \quad (6)$$

o comprimento ao quadrado  $I(\alpha(t))$  de um arco de uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{r}(x^1(t), x^2(t))$  pode ser expresso

$$I(\alpha(t)) = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{r}(a)) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\beta}. \quad (8)$$

A Eq. 7 é a *primeira forma fundamental* da superfície  $\mathcal{S}$ , enquanto  $a_{\alpha\beta}$  são chamados de componentes de *tensor métrico*. Os coeficientes  $a^{\alpha\beta}$  podem ser obtidos através da matriz inversa da Eq. 7, sendo

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a},$$

onde

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

A *segunda forma fundamental* da superfície  $\mathcal{S}$ , que nos dá uma medida da variação do vetor normal ao longo de  $\alpha(t)$ , pode ser expressa como

$$II(\alpha(t)) = b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (10)$$

com

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \right\|. \quad (11)$$

Os componentes  $b_{\alpha\beta}$  formam o *tensor de curvatura*.

De forma simplificada, ao consideramos um ponto  $P$  pertencente a superfície  $\mathcal{S}$ ,  $a_{\alpha\beta}$  está relacionado as propriedades comprimento e área enquanto  $b_{\alpha\beta}$  descreve o quão curva é a superfície.

Em condições onde  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}$  e  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$  são ortonormais, o tensor de curvatura fica igual ao que chamamos de matriz de Weingarten que possui duas propriedades que nos interessam: (1) os autovalores representam as curvaturas principais da superfície no ponto; e (2) os autovetores representam, na base de referência escolhida, as direções principais no ponto. Com isso, podemos escrever as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^1} &= b_{11} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} + b_{12} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^2} &= b_{21} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} + b_{22} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2.4 Sistema de Referência Variável

No nosso modelo, é necessário adotar um sistema de referência para interpretar os valores sendo obtidos. Para cada ponto  $P$  sobre a superfície  $\mathcal{S}$ , existe um sistema de base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  onde

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \right|}. \quad (13)$$

Isto implica que cada ponto  $P$  possui um referencial local, que não é necessariamente igual aos pontos vizinhos. Na verdade, quando começarmos a lidar com deformações ao longo do tempo, o mesmo ponto em instantes diferentes  $t$ , irá possuir referenciais distintos conhecidos como *convected curvilinear system*.

## 2.5 Derivada Covariante

A notação  $T^\alpha|_\beta$  indica o que chamamos de derivada covariante. Como uma derivada ordinária, ela se refere ao diferencial do tensor  $T^\alpha$  em relação a uma das variáveis  $x^\alpha$  do sistema de base ou, se pensarmos no sistema definido anteriormente, à variação de  $T^\alpha$  na direção  $\mathbf{a}_1$  ou  $\mathbf{a}_2$ . Entretanto, esse referencial não é necessariamente o mesmo entre dois pontos distintos. Logo, é necessário levar em consideração a mudança da base quando se quer determinar o diferencial de  $T^\alpha$  entre dois pontos.

Como descrito em Sanchez et al. [7], a derivada covariante de vetor contravariante, na direção  $\mathbf{a}_\alpha$ , envolvendo a variável  $x^\alpha$ , pode ser obtida usando

$$T^m|_k = \frac{\partial T^m}{\partial x^k} + T^j \Gamma_{jk}^m. \quad (14)$$

Em nosso trabalho, também precisaremos de derivadas covariantes de tensores de segunda ordem  $T^{\alpha\beta}$  que assumem a seguinte forma

$$T^{\alpha\beta}|_\gamma = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\beta T^{\lambda\alpha}. \quad (15)$$

As Eqs. 14 e 15 são compostas por uma derivada parcial ordinária, somada a outros termos contendo símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha$  a ser detalhados na Seção 2.6. São justamente esses termos que levam em consideração a alteração entre os referenciais em pontos diferentes da superfície.

## 2.6 Símbolos de Christoffel

Observando a equação para o símbolos de Christoffel do tipo 1

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

vemos que eles estão diretamente ligados aos diferenciais da base, já que estão associados aos tensores métricos. Para a derivada covariante de tensores contravariantes, é necessário utilizar os símbolos de Christoffel do tipo 2

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = a^{1\gamma} \Gamma_{\alpha\beta 1} + a^{2\gamma} \Gamma_{\alpha\beta 2}.$$

## 3 Trabalhos Correlatos

Modelos baseados em propriedades físicas são considerados como os mais promissores para futuro de produções de simulações de tecidos em movimento com um comportamento visualmente natural. Eles consideram que a dinâmica da malha seja regida pela equação diferencial parcial de equilíbrio em cada ponto  $\mathbf{r}$  dada em Eq. 1. Como observado por Nealen et al., pesquisas em modelos deformáveis tem recebido considerável atenção [8]. Apesar dos esforços nas últimas três décadas, ainda é necessário muito trabalho para conseguirmos os resultados esperados. Para manter essa seção sucinta, nós nos referimos a alguns trabalhos focados na aplicação da teoria de superfícies de Cosserat no modelamento de superfícies deformáveis. De acordo com a teoria de superfícies de Cosserat, as forças internas da mecânica contínua podem se expressas como uma função da variação da energia  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  com respeito às medidas de esticamento  $\varepsilon$  e de curvamento  $\kappa$ :

$$K(\mathbf{r}, t)\mathbf{r}(t) = \mu \frac{\delta \mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{\delta \mathbf{r}(t)} = \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial \varepsilon(t)} + \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial \kappa(t)}. \quad (16)$$

Após a publicação de três artigos por Simo et al., onde é demonstrado que, apesar de uma formulação complexa, a teoria clássica de cascas é condutiva para

uma implementação numérica eficiente [9, 10, 11], Eischen et al. apresentam em [12] um modelo de tecido com base na superfície de Cosserat. O ponto-chave de seus achados é uma nova parametrização que evite termos como os símbolos de Christoffel e os coeficientes da segunda forma fundamental. O custo disso é a adoção de relações que não associam explicitamente as propriedades geométricas com as grandezas cinéticas.

Melo e Wu mostram que o modelamento do tecido como uma superfície elástica de Cosserat, com o vetor diretor inextensível e paralelo à normal, permite obter uma expressão algébrica com relações explícitas entre as propriedades geométricas e físicas [3]. Essas propriedades são as curvaturas média e Gaussiana. Eles também observam que suas equações constitutivas diferem da formulação proposta por Terzopoulos et al. [13] em somente um termo adicional – a curvatura média, que pode ser usada para controlar efeitos sutis de enrugamento [14]. Portanto, eles adotam o mesmo método de diferenças finitas para discretizar o termo de energia potencial  $A(\mathbf{r}, t)$  e a mesma forma de integração semi-implícita para mover a superfície durante o tempo. Dessa forma, diversos padrões de deformações são possíveis: não só a suavidade de dobras e rugas é controlada, mas também sua quantidade em uma dada área de superfície.

Ao contrário da técnica de integração semi-implícita, Monteiro e Wu aplicam um método explícito para conseguir uma animação fisicamente plausível a um menor tempo de execução [4]. Eles mostram que pequenos passos temporais são balanceados por cálculos mais simples e equações constitutivas mais precisas. Entretanto, suas implementações são limitadas a malhas quadriculadas regulares, com vértices de valência 4.

Vale ainda comentar que, recentemente, com avanço da tecnologia de dispositivos de captura de movimentos, tornou-se possível sintetizar imagens de movimento de tecidos com bastante realismo e um desempenho interativo [15]. Esta nova classe de métodos toma como base sequências de tecidos em movimento capturadas para estimar os parâmetros de deformação. Diferentemente destas técnicas que requerem um modelo de referência, a técnica que desenvolvemos permite sintetizar até movimentos fisicamente não realizáveis.

## 4 Modelo de Cosserat

Nosso trabalho tem como objetivo achar uma solução numérica plausível para a simulação das dinâmicas de uma superfície de Cosserat para provar nossa conjectura que pode ser uma alternativa para modelamento de tecidos. Nesta seção nós explicamos de forma resumida alguns passos intermediários importantes no desenvolvimento dessa teoria.

Seja  $\mathcal{S}(t) = \mathbf{r}(x^1, x^2, t)$  uma superfície elástica deformável no instante  $t$ , e sejam curva- $x^1$  e curva- $x^2$  as curvas coordenadas sobre  $\mathcal{S}$  e  $x^3$  a normal para  $\mathcal{S}(t)$ .  $x^i$  são identificados como *coordenadas variáveis (convected coordinates)* porque qualquer ponto em  $\mathcal{S}$  possui as mesmas coordenadas curvilíneas tanto no estado de referência como no deformado. As derivadas ao longo dessas curvas, conforme indicado na Eq. 13, são representados por  $a_i$ . Estas quantidades são

linearmente independentes e compõem os *vetores-base*, onde  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}$  e  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$  estão sobre o plano tangente normal a  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$ . Associado a cada ponto de  $\mathcal{S}(t)$ , temos ainda um vetor  $\mathbf{d}$  com direção saindo da superfície, mas não necessariamente ao longo de sua normal, .

Destes elementos, podemos computar os componentes  $a_{\alpha\beta}$  do tensor métrico e os componentes  $b_{\alpha\beta}$  de seu tensor de curvatura para cada ponto de  $\mathcal{S}(t)$ . Particularmente para  $t = t_0$ , a superfície não deformada é referida por  $\mathcal{S}(t_0) = \mathbf{R}(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^1, x^2, t_0)$ , com os tensores métricos e de curvatura em cada ponto denotados por  $A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(t_0)$  e  $B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(t_0)$  respectivamente, e o vetor diretor como  $\mathbf{D} = \mathbf{d}(t_0)$ .

Os vetores diretores de uma superfície de Cosserat não estão necessariamente na direção da normal associada ao mesmo ponto, nem tem obrigatoriamente norma unitária. No caso onde os vetores coincidem com os vetores normais para qualquer  $t$ , ou seja  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{a}_3(t)$ , a superfície passa a ser denominada como *superfície de Cosserat com vetor diretor inextensível e paralelo à normal*. De acordo com Green et al., nesses casos temos relações explícitas entre as *variáveis cinéticas*, *tensão de esticamento*  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  e *tensão de curvatura*  $\kappa_{\beta i}$ , e as propriedades geométricas, tensor métrico  $a_{\alpha\beta}$  e tensor de curvatura  $b_{\alpha\beta}$  [1]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \quad \kappa_{\beta\alpha} = -(b_{\beta\alpha} - B_{\beta\alpha}). \quad (17)$$

Melo e Wu mostram em [3] que pequenas modificações na formulação para energia interna  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  proposta por Green et al. leva a uma expressão onde variáveis possuem um interpretação geométrica mais significativa.

$$\begin{aligned} \mu \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = & \Phi^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta}(t) \varepsilon_{\gamma\delta}(t) + \Psi^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta}(t) \kappa_{\gamma\delta}(t) + \\ & \Theta^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta}(t) \kappa_{\gamma\delta}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $\mu$  é a densidade de massa por unidade de área de  $\mathcal{S}$  no instante  $t$ , e

$$\begin{aligned} \Phi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \zeta[A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})] \\ \Psi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \xi[A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma}] \\ \Theta^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \phi[A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Os termos  $\Phi^{\alpha\beta\gamma\delta}$  e  $\Psi^{\alpha\beta\gamma\delta}$  afetam predominantemente os comportamentos de esticamento e curvamento, respectivamente. Logo, denominamos  $\zeta$  e  $\xi$  *coeficientes elásticos* e os parâmetros  $\Phi^{\alpha\beta\gamma\delta}$  e  $\Psi^{\alpha\beta\gamma\delta}$  *propriedades do material*. O termo  $\Theta^{\alpha\beta\gamma\delta}$  por sua vez, afeta de maneira mais significativa o número de ondulações (comportamento fora-do-plano) na superfície sendo deformada, sendo chamado de *fator de enrugamento*.

Seja  $\sigma$  a área de uma superfície de Cosserat com vetor diretor inextensível no instante  $t$ , limitada por uma curva fechada  $\mathcal{C}$ . Se cortamos  $\mathcal{S}$  ao longo da curva  $\mathcal{C}$ , e designamos os lados de  $\mathcal{S}$  como um sendo positivo e outro negativo, a parte no lado positivo exerce uma força na parte negativa de  $\mathcal{S}$ . Esta força por unidade de comprimento é transmitida por um comprimento incremental  $ds$  de  $\mathcal{C}$  por contato direto das duas partes de  $\mathcal{S}$ . Seja o vetor  $\nu = \nu_\alpha \mathbf{a}^\alpha$ , tangente à

superfície e perpendicular a  $\mathcal{C}$ , o vetor normal exterior. Se para todos os campos de velocidade arbitrários  $\mathbf{v}$  existe um campo de força tri-dimensional  $\mathbf{N} = N^i \mathbf{a}_i$ , tal que o escalar  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}$  representa o trabalho por unidade de comprimento  $ds$  de  $\mathcal{C}$ , então  $\mathbf{N}$  é um *vetor força de curvamento* medido por unidade de comprimento. Analogamente, se  $\mathbf{M} = M^i \mathbf{a}_i$  é um campo vetorial tri-dimensional e se para quaisquer campos vetoriais de velocidade arbitrários  $\mathbf{w}$ , o escalar  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}$  representa o trabalho por unidade de comprimento de  $\mathcal{C}$ , então  $\mathbf{M}$  é o *vetor força diretor* medido por unidade de comprimento. Eles podem ser expressos em termos da base de vetores  $\mathbf{a}_i$ .

$$\mathbf{N} = N^i \mathbf{a}_i = \nu_\alpha \mathbf{N}^\alpha = \nu_\alpha (N^{i\alpha} \mathbf{a}_i) = (\nu_\alpha N^{i\alpha}) \mathbf{a}_i \quad (20)$$

$$\mathbf{M} = M^i \mathbf{a}_i = \nu_\alpha \mathbf{M}^\alpha = \nu_\alpha (M^{i\alpha} \mathbf{a}_i) = (\nu_\alpha M^{i\alpha}) \mathbf{a}_i, \quad (21)$$

onde  $N^{\beta\alpha}$ ,  $N^{3\alpha}$ ,  $M^{\beta\alpha}$  e  $M^{3\alpha}$  são tensores de superfície contravariantes sob a transformação de coordenadas de superfície.

Green et al. mostrou que para uma superfície de Cosserat com vetor diretor inextensível e paralelo à normal, as seguintes igualdades são válidas

$$\begin{aligned} N^{*\alpha\beta} &= \mu \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \\ M^{i\alpha} &= \mu \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_{i\alpha}}, \end{aligned} \quad (22)$$

e o tensor de contado de superfície pode ser obtido usando

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= N^{*\alpha\beta} - a^{\rho\alpha} b_{\lambda\rho} M^{\beta\lambda} \\ N^{3\alpha} &= l^\alpha + M^{3\gamma} b_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Se aplicarmos, por unidade de massa de  $\mathcal{S}$ , campos de força  $\mathbf{F} = F^i \mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{L} = L^i \mathbf{a}_i$  no instante  $t$ , tal que  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  e  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{w}$  representam o trabalho por unidade de área de  $\mathcal{S}$  para quaisquer  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  respectivamente, Green et al. demonstra em [1] as seguintes equações de conservação de momento linear

$$\mu \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{N}^\alpha|_\alpha = \mu \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (24)$$

e para o momento angular,

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \mu \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, t),$$

onde  $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}$  e  $\mathbf{m}$  é vetor força diretor

Ignorando momento angular e velocidades de corpos rígidos sobrepostos, a equação de movimento fica a reduzida a Eq. 24, que quando colocada em forma de componentes fica

$$\begin{aligned} N^{\beta\alpha}|_\alpha - b_\alpha^\beta N^{3\alpha} + \mu F^\beta &= \mu v^\beta \\ N^{3\alpha}|_\alpha - b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + \mu F^3 &= \mu v^3, \end{aligned} \quad (25)$$

Com isso o nosso problema se reduz à computação do sistema 25 para obter os deslocamentos de cada ponto da malha em cada intervalo de tempo  $[t_i, t_{i+1})$ . Métodos simples de diferenças finitas impõem a limitação de que a valência para cada amostra seja 4, e os métodos de elementos finitos são ainda proibitivos para produção de resultados interativos. Nós discutimos na seção 5 nossa proposta para solução numérica.

## 5 Implementação

Para poder realizar nossa simulação, são necessários os seguintes passos, para cada vértice:

- Determinação das bases  $\mathbf{a}_i$ .
- Cálculo dos tensores métrico e símbolos de Christoffel.
- Cálculo das curvaturas principais, e do tensor de curvatura.
- Cálculo dos tensores  $N^{\alpha\beta}$  e  $M^{\alpha\beta}$ .
- Cálculo de  $M^{\beta\alpha}|_{\alpha}$
- Cálculo de  $N^{\alpha}|_{\alpha}$
- Estimar nova posição do vértice.

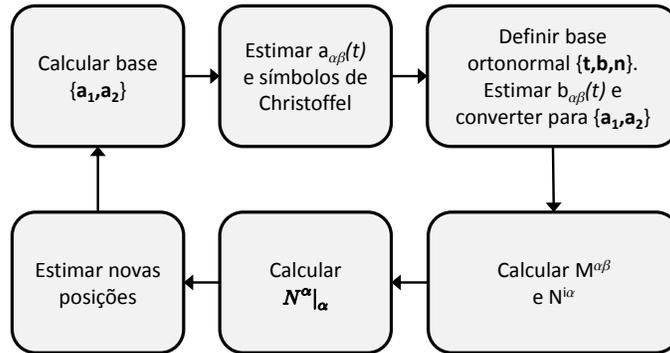


Figura 1: Fluxo do algoritmo.

### 5.1 Determinação da base $\mathbf{a}_i$ e símbolos de Christoffel.

Para criar uma base de vetores  $\mathbf{a}_i$  que satisfaçam as propriedades de *coordenadas móveis (convected coordinates)*, são escolhidos em passo de inicialização, para cada vértice  $v$ , vértices vizinhos de referência, e a aresta relacionada é usada para determinar  $\mathbf{a}_\alpha$ .  $\mathbf{a}_3$  é determinado utilizando-se métodos tradicionais de cálculo

de normal de superfícies. Finalmente, para tentar tornar o modelo discretizado mais próximo do modelo teórico, os vetores  $\mathbf{a}_\alpha$  são girados para que fiquem pertencentes ao plano perpendicular a  $\mathbf{a}_3$ .

Com  $\mathbf{a}_i$  estimado, é possível calcular os componentes  $a_{\alpha\beta}$  do tensor métrico e, usando métodos tradicionais de diferenças finitas, os valores para os símbolos de Christoffel.

## 5.2 Estimativa de tensores métrico e de curvatura

Para cada vértice  $v$  da malha, é escolhida arbitrariamente uma das arestas adjacentes como  $v_0v$  para definir um referencial local (Figura 2).

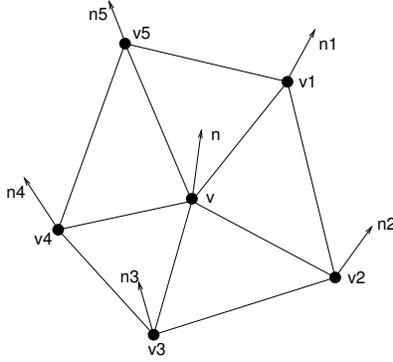


Figura 2: Vizinhança de um vértice  $v$

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{v_0v}{|v_0v|} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{n} \times \mathbf{t} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Todas as arestas adjacentes a  $v$ ,  $\mathbf{e}_i$ , são representadas como combinações lineares dos vetores-base desse referencial local  $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i &= t_i \mathbf{t} + b_i \mathbf{b} \\ t_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t} \\ b_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Utilizando Eq. 12, podemos montar o seguinte sistema de equações cuja solução nos daria os elementos do tensor de curvatura em  $v$  com respeito a  $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{n}_{i,t} t_i &= b_{11} t_i^2 + b_{12} t_i b_i \\ \Delta \mathbf{n}_{i,b} b_i &= b_{12} b_i t_i + b_{22} b_i^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{n}_{i,t} b_i &= b_{11} t_i b_i + b_{12} b_i^2 \\ \Delta \mathbf{n}_{i,b} t_i &= b_{12} t_i^2 + b_{22} t_i b_i\end{aligned}$$

Para produzir boas estimativas independente das distribuição das arestas, resolvemos de fato um sistema de equações que se resultam da soma das equações envolvendo as mesmas incógnitas de todas as arestas adjacentes. Com isso, nossa técnica aproveita todos os dados disponíveis para cada vértice, inclusive em regiões críticas como as de fronteira da malha. Embora essas regiões possuam menos dados para o cálculo da estimativa, e os erros sejam comparativamente maiores, eles não parecem ser grandes o suficiente para chegar a comprometer a simulação como um todo.

### 5.3 Forças e tensores de deformação

Na equação 24 temos os vetores força de deformação  $\mathbf{N}^\alpha$ . Este vetores possuem as componentes

$$\mathbf{N}^\beta = N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + N^{3\beta} \mathbf{a}_3, \quad (26)$$

onde  $N^{\alpha\beta}$  é chamado tensor componente de deformação da superfície. De maneira análoga, os vetores força de giro  $\mathbf{M}^\alpha$  são compostos pelo tensor de giro  $M^{\alpha\beta}$ .

Para uma superfície de Cosserat com vetor diretor inextensível e paralelo à normal, é possível deduzir que

$$\begin{aligned}M^{\alpha\beta}(t) &= \Psi^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}(t) + \Theta^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}(t) \\ N'^{\alpha\beta}(t) &= \Phi^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}(t) + \Theta^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}(t).\end{aligned} \quad (27)$$

O passo final para a determinação de  $\mathbf{N}^\alpha$  é

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta}(t) &= N'^{\alpha\beta}(t) - M^{\beta\gamma}(t) (a^{\alpha\delta}(t) b_{\delta\gamma}(t)) \\ N^{3\beta} &= M^{\beta\alpha} \Big|_\alpha.\end{aligned} \quad (28)$$

### 5.4 Deformação do tecido

Com  $\mathbf{N}^\alpha$  estimado para cada vértice no instante  $t$ , usamos agora a Eq. 14 para obter as forças internas  $N_{|\alpha}^\alpha$ . Aplicando estes valores em uma versão discretizada da Eq. 24, é possível estimar a nova posição de cada vértice

$$\begin{aligned}\mu \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} &= \mathbf{N}_{|1}^1 + \mathbf{N}_{|2}^2 + \mu \mathbf{F} \\ \mu \mathbf{v}(t + \Delta t) &= \Delta t (\mathbf{N}_{|1}^1 + \mathbf{N}_{|2}^2 + \mu \mathbf{F}) + \mu \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

completando assim a simulação física do instante  $t$ .

## 6 Resultados

Como nossa solução envolve diversos passos que não possuem algoritmos e técnicas tradicionais, é essencial avaliar os resultados de cada etapa para tentar garantir que as estimativas estão dentro do esperado e não comprometem os valores calculados nas etapas seguintes.

### 6.1 Tensores Métrico e de Curvatura

Para avaliar nossos resultados, utilizamos algumas superfícies paramétricas conhecidas para comparar os valores estimados pela nossa técnica com os calculados algebricamente. Nestas deformações o deslocamento de cada vértice está sendo determinado apenas pela equação parametrizada, sem levar em conta forças internas. Na Figura 3 nós temos uma visualização para os erros em nossas

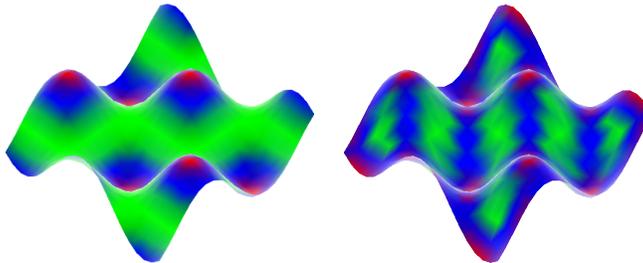


Figura 3: Erros nas estimações do tensor (a) Métrico e de (b) Curvatura

estimativas, para uma superfície discretizada em 20x20 segmentos. Para o tensor métrico a cor azul representa um erro numérico de 0.001 e a cor vermelha um erro de 0.0065. Para o tensor de curvatura esses valores são 0.01 e 0.09, respectivamente. Como é possível visualizar nessas imagens, os erros estão bem razoáveis e concentrados nas áreas esperadas. Caso seja necessário o aumento da resolução de discretização reduz esses erros significativamente, mas os valores apresentados já nos deixam confiantes que as estimativas podem ser usadas nos próximos passos.

### 6.2 Energia Potencial

Utilizando a Eq. 18, podemos obter estimativas da energia potencial para cada ponto. Como isso não envolve os cálculos das derivadas covariantes, serve como uma boa avaliação dos resultados intermediários.

Na Figura 4, vemos a energia potencial, mas observando separadamente os efeitos das variações dos tensores métrico e de curvatura. O estado inicial  $t_0$  para essa superfície é um plano. Como esperado, regiões que tiveram uma deformação mais forte de esticamento tem uma energia maior devido a  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  enquanto as que passaram a ser mais curvadas, próximas ao centro, tem maior contribuição por  $\kappa_{\alpha\beta}$ .

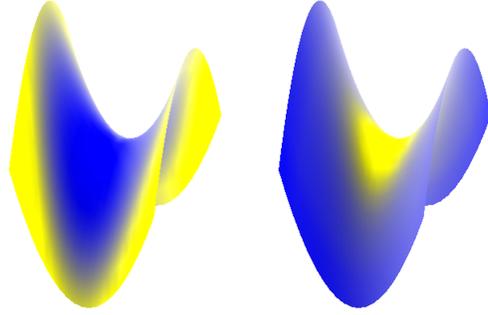


Figura 4: Energia potencial codificada em cor amarela (alta) e azul (baixa), considerando contribuição de (a) tensor métrico e (b) de curvatura.

### 6.3 Derivadas covariantes

Como elas são muito importantes para a estimativa das forças internas, é importante observar se os valores obtidos para derivadas covariantes estão dentro do esperado. Para facilitar essa avaliação visual, observamos apenas os valores para

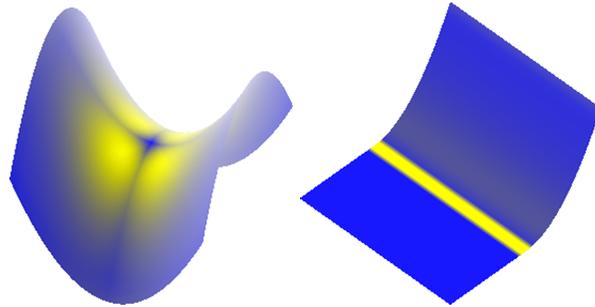


Figura 5: Visualização da derivada covariante  $M^{\beta\alpha}|_{\gamma}$

$M^{\beta\alpha}|_{\gamma}$  na Figura 5. O valor representado pela cor amarela é a soma de todos os valores absolutos (8 no total) de cada um dos componentes do tensor de giro  $M^{\beta\alpha}$ , derivados covariantemente para  $\mathbf{a}_{\gamma}$ . Pela Eq. 27 sabemos que este tensor depende da variação do tensor métrico e de curvatura. Entretanto, a constante  $\Theta$  é três ordens de grandeza menor que  $\Psi$ , portanto espera-se que  $\kappa_{\alpha\beta}$  seja o termo dominante. Para o primeiro caso, temos uma superfície  $h(u, v) = u^2 - v^2$ . Pensando em diferenças finitas, espera-se que no ponto crítico das curvas, o valor mostrado na imagem seja pequeno, já que avaliando nos dois sentidos, irá se observar os mesmos valores de  $M^{\beta\alpha}$ , implicando em um diferencial nulo, e de fato é isso que se constata.

Para o segundo caso, temos uma superfície plana que passa ter uma deformação do tipo  $u^2$  a partir de uma certa linha. Como  $M^{\beta\alpha}$  é zero no plano, mas passa a ter um valor considerável quando uma curvatura aparece, espera-se

que na região de encontro a derivada detectada seja grande. Na medida que se avança na curva da parábola, para cada ponto considerado, a superfície se curva cada vez menos em relação ao estado inicial plano, e portanto espera-se valores pequenos para a derivada. Mais uma vez, o comportamento visual é o esperado.

Além dessa visualização, comparações numéricas entre valores estimados pela malha e calculados algebricamente por superfícies conhecidas, não apresentaram erros maiores que 10% para uma malha composta por 40x40 segmentos.

## 6.4 Simulação de Movimento

Com as etapas anteriores avaliadas, produzimos agora as simulações de comportamento físico das malhas. Infelizmente, encontramos uma limitação que ainda não foi superada nas regiões de fronteira, que é discutida em um pouco mais de detalhes na Seção 7. Em decorrência disso, nossas simulações estão limitadas a cenários onde as bordas das malhas não se deslocam.

Na avaliação da nossa técnica, foi utilizada uma superfície discretizada em uma malha dividida em segmentos, com vértices contendo uma valência entre 4 e 8. Nesta malha, nós aplicamos uma força externa em região central, e dependendo do caso, também uma força de gravidade presente em todos os vértices. A Figura 6 mostra uma das simulações produzidas.

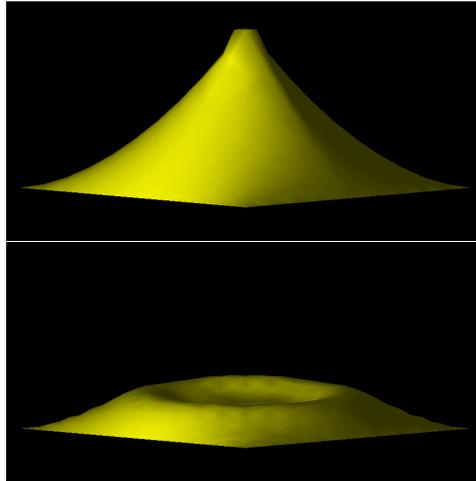


Figura 6: Simulação de esticamento de um tecido, soltando logo em seguida, sem forças de gravidade

Foram realizados dois experimentos para podermos analisar alguns aspectos específicos do modelo implementado.

### 6.4.1 Desempenho

Para uma simulação como a representada na Figura 6, foi considerado como estado final quando o sistema se estabiliza novamente, e feitas medidas do tempo de processamento. O hardware utilizado foi um processador Intel i5-2500k, com 8GB de RAM. A animação total gerada tem 19 segundos e o  $\Delta t$  usado para a Eq. 29 foi  $2.10^{-4}$ . Os resultados estão na Tabela 1

Tabela 1: Desempenhos (tempos são expressos em milissegundos)

Tam. Malha	Tempo Passo	Tempo Renderização
20 x 20	7.52	$14 \cdot 10^3$
40 x 40	24.97	$140 \cdot 10^3$
80 x 80	70.87	$400 \cdot 10^3$

O algoritmo atual não está otimizado, utiliza apenas um *thread* e roda exclusivamente na CPU, sem auxílio de GPU fora a visualização da imagem. Mesmo nessas condições, para uma malha discretizada em 20x20 divisões, já é possível produzir resultados em tempo real. Entretanto, isto deixa de ser viável para resoluções maiores, mesmo se mantiver  $\Delta t$  constante, o que aumenta a possibilidade de erros que gerem colisões internas.

### 6.5 Estabilidade

A simulação anterior já demonstra que a malha volta ao estado inicial depois de sofrer uma perturbação, quando todas as forças externas se tornam nulas. Agora observamos o caso onde é aplicada uma força equivalente a força da gravidade, constante em todos os vértices, com exceção dos pertencentes a borda.

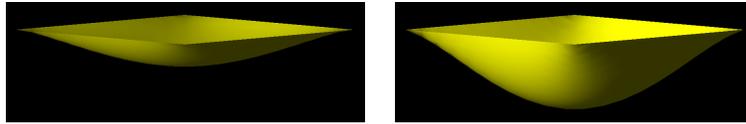


Figura 7: Estado estável com gravidade presente, para (a)  $\zeta = 10^{-1}$ ,  $\xi = 10^{-4}$ ,  $\phi = 10^{-6}$  e (b)  $\zeta = 10^{-2}$ ,  $\xi = 10^{-5}$ ,  $\phi = 10^{-7}$

A Figura 7 mostra dois casos, com constantes diferentes, que chegam a estados estáveis que refletem as diferentes propriedades físicas simuladas.

## 7 Conclusão

Nossa proposta de utilizar modelos de superfícies de Cosserat para produzir simulações mais realistas quando comparados com modelos massa-mola, mas sem o alto custo computacional associado a modelos tradicionais de mecânica contínua, está produzindo resultados positivos.

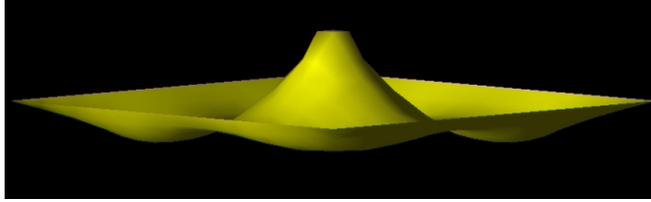


Figura 8: Simulação de movimento físico de uma malha

**Limitação na borda** O maior problema atual é falha da técnica nas regiões de fronteira. Como descrito na Seção 4 o modelo de superfícies de Cosserat trabalha com curvas fechadas  $\mathcal{C}$  que delimitam áreas dentro de uma superfície, o que o torna problemático para regiões de fronteiras na discretização, pois elas não são originalmente contempladas. Entretanto, trabalhos anteriores envolvendo superfícies de Cosserat, como o de Wu e Melo [16] obtiveram sucesso em resolver esse problema, o que sugere que também será possível no nosso modelo.

Apesar dessa limitação, os resultados obtidos como o ilustrado na Figura 8 já mostram animações com comportamento bem complexo. Para malhas discretizadas em  $20 \times 20$  segmentos, a técnica já é capaz de produzir resultados iterativos em tempo real, e as possibilidades de otimização são consideráveis. Em cada estágio da fluxograma mostrado na Figura 1, cada vértice pode ser processado independentemente, o que implica em enormes ganhos com paralelização. A maioria das operações envolve vetores ou matrizes simples, que foi uma escolha deliberada para permitir que trabalhos futuros implementes esse algoritmo em GPUs, oferecendo mais ganhos de desempenho.

Portanto, o objetivo inicial de produzir animações realistas em tempo real parece bem possível, apesar de algumas dificuldades ainda estarem presentes.

## Referências

- [1] A. E. Green, P. Naghdi, and W. Wainwright, “A general theory of a cosserat surface,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 20, pp. 287–308, 1965.
- [2] H. C. Batagelo and S.-T. Wu, “Application-independent 3D interaction using geometry attributes computed on the GPU,” in *Proceedings of the 20th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*. IEEE CS Press, October 2007, pp. 19–26.
- [3] S.-T. Wu and V. F. de Melo, “A deformable surface model on the basis of the theory of a cosserat surface,” in *Proceedings of the Computer Graphics and Image Processing, XVII Brazilian Symposium on (SIBGRAPI’04)*. Curitiba, Brazil: IEEE Computer Society, 2004, pp. 274 – 281, ISBN:0-7695-2227-0.

- [4] L. P. Monteiro and S.-T. Wu, “Realistic simulation of fabrics,” in *Digital Proceedings of the V Brazilian Symposium on Computer Games and Digital Entertainment*, Recife, November 2006, p. 22.FP.C, (in Portuguese). [Online]. Available: <http://www.cin.ufpe.br/~sbgames/proceedings/index.htm>
- [5] S. Rusinkiewicz, “Estimating curvatures and their derivatives on triangle meshes,” in *3DPVT '04: Proceedings of the 3D Data Processing, Visualization, and Transmission, 2nd International Symposium on (3DPVT'04)*. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2004, pp. 486–493.
- [6] L. Kuptsov, “Einstein rule,” *Hazewinkel, Michiel, Encyclopaedia of Mathematics*, 2001.
- [7] E. Sanchez, *Caclulo Tensorial*. Springer, 2011, iSBN: 978-85-7193-251-1.
- [8] A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman, and M. Carlson, “Physically based deformable models in computer graphics,” *Computer Graphics Forum*, vol. 25, no. 4, pp. 809–836, 2006. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x>
- [9] J. C. Simo and D. D. Fox, “On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parameterization,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, vol. 72, pp. 267–304, 1989.
- [10] —, “On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: The linear theory; computational aspects,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, vol. 73, pp. 53–92, 1989.
- [11] —, “On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Aspects of the nonlinear theory,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, vol. 79, pp. 21–70, 1989.
- [12] J. Eischen, S. Deng, and T. Clapp, “Finite-element modeling and control of flexible fabric parts,” *IEEE Computer Graphics and Application*, vol. 16, no. 5, pp. 71–S80, 1996.
- [13] D. Terzopoulos, J. C. Platt, A. H. Barr, and K. Fleischer, “Elastically deformable models,” *Computer Graphics*, vol. 21, no. 4, pp. 205–214, July 1987.
- [14] E. Grinspun, A. Hirani, M. Desbrun, and P. Schröder, “Discrete shells,” *Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, pp. 62–67, 2003.
- [15] E. Miguel, D. Bradley, B. Thomaszewski, W. Bickel, Bernd Otaduy, and S. Marschner, “Data-driven estimation of cloth simulation models,” may 2012. [Online]. Available: <http://www.gmrv.es/Publications/2012/MBTBMOM12>

- [16] V. F. de Melo, “Modeling and controle of drape and wrinkles in deformable surfaces,” Ph.D. dissertation, FEEC/State University of Campinas, 2004, (in Portuguese).