UNICAMP
Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Relatório Técnico
Technical Report
DCA-010/97

Deformação de Superfícies Não-Rígidas: Implementação e Análise

Wu, Shin - Ting
Paulo Fernandes Santa Clara Ramos Júnior
Agnus Azevedo Horta

UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas)
FEEC (Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação)
DCA (Dept.de Engenharia de Computação e Automação Industrial)
{ting, pauloscr}@dca.fee.unicamp.br

Dezembro 1997

Abstract

The deformable model proposed by Terzopoulos et al. [6] is founded on the motion equation in Lagrangean form and adjust the elastic deformation by parameters related to the metric and curvature tensors of surfaces. Since it unifies the description of shape and motion, this model significantly simplifies the approach of animation of complex objects.

The flexibility and the modeling power of this model is recognized by the modeling community. Several subsequent works are made to improve this approach. Two problems, which were not enough discussed, is how to manipulate the parameters to get realistic dynamics behavior and its application domains.

This work addresses these problems. Using concepts from Differential Geometry, we could identify the relevant simplifications on the physically-based models to derive the deformable model proposed by Terzopoulos et al. Then, we took advantages of the geometric potential of this model and deal more intuitively with parameters in order to get realistic simulation or physical movements through an intuitive interface.

A major challenge that we faced was the non-independency between these parameters. This interdependency, which is a consequence of the differential relation between the metric and the curvature tensors, is not considered up to now, and, as we could see, it can yield non-realistic deformations.

In our analysis we deal more specifically with the class of surfaces with a big resistance against stretching and little resistance against curvature. These features would allow us to simulate the behavior of a great variety of physical objects, like a piece of cloth or a sheet of paper.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Técnicas para criação e manipulação de superfícies não-rígidas constituem um tópico de pesquisa na área de Modelagem Geométrica. Entre outras finalidades, elas podem enriquecer uma imagem sintetizada por computador (p. ex., incluir peças do vestuário) ou facilitar a geração de filmes com "objetos animados", ou simplesmente animações.

Entende-se como *superfícies rígidas* aquelas para as quais a distância entre seus pontos não é alteradas no tempo; do contrário, dizemos que a superfície é *não-rígida*, ou que a sua forma geométrica é *deformável.*

Basicamente existem dois paradigmas para alterar a forma geométrica de uma superfície:

Técnicas puramente geométricas: Interage-se diretamente com os parâmetros dos modelos geométricos, tais como os pontos de controle, para modificar a geometria da superfície. Para "criar" formas geométricas complexas, como maçanetas de porta ou uma lata de cerveja amassada, Sederberg e Perry[15] propuseram uma metodologia de deformação mais intuitiva. A técnica consiste em definir um espaço de imersão, de geometria mais simples, para o objeto a ser deformado. Ao invés de atuar nos parâmetros geométricos do objeto, que muitas vezes são implícitos, atua-se nos parâmetros geométricos deste espaço de imersão e o objeto acompanhará as deformações. Associado a uma boa realimentação visual, esta técnica é comumente utilizada para modelamento de objetos "esculturais estáticos". A flexibilidade e a intuitividade desta técnica impulsionou outros trabalhos de aperfeiçoamento[4, 5]. Uma boa revisão bibliográfica sobre esta metodologia foi feito pelo Bechmann[1].

Técnicas baseadas em princípios físicos: Modela-se o comportamento do objeto com o uso de princípios físicos. Em geral, um objeto é modelado como um reticulado de partículas e a sua forma é alterada através das leis cinemáticas e/ou dinâmicas entre estas partículas. Quando o modelo físico é suficientemente completo, obtém-se resultados bastante realísticos. Além disso, a técnica permite geração controlada de seqüências de formas com variações graduais, que poderão ser utilizadas para a produção de filmes com "objetos animados". Diferentemente das aplicações na área de Engenharia e Física, cujo principal objetivo é a simulação de fenômenos físicos, em Computação Gráfica o foco são as imagens sintetizadas. Todos artifícios que levam a resultados desejados são válidos. Esta filosofia tem motivada uma série de trabalhos na Comunidade de Computação Gráfica, que tem procurado modificar os modelos físicos de forma a reduzir o custo computacional requerido para geração de imagens almejadas. Entre os trabalhos desta categoria pode-se citar [6, 18, 14, 8, 19, 3, 17, 9]. Estes trabalhos se diferem basicamente na forma de simplificações.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar e implementar uma ferramenta que facilite a geração de filmes com "objetos animados". Em vista disso, optamos pelo segundo paradigma, utilizando os princípios físicos para modelagem do comportamento de superfícies. Entretanto, um dos principais problemas que se depara ao adotar este paradigma é determinar o ponto ótimo do compromisso entre a complexidade do modelo utilizado e o realismo dos resultados esperados. Modelos sofisticados, utilizados pelos engenheiros e físicos por exemplo, procuram aproximar da "realidade". Normalmente, estes modelos não só demandam um custo computacional elevado como envolvem uma grande quantidade de parâmetros físicos sem uma interpretação geométrica direta, o que dificulta uma manipulação mais intuitiva.

Como uma solução a este problema, Terzopoulos et al. apresentaram em [6] resultados de um trabalho pioneiro no qual, com o uso de Geometria Diferencial, foram estabelecidas algumas relações entre os aspectos físicos e geométricos dos parâmetros envolvidos no modelo. A partir destas relações e dos experimentos, os autores *esboçaram* no mesmo artigo algumas sugestões para "calibrar" intuitiva e empiricamente os parâmetros do modelo, simplificando o processo de simulação. Carignan et al.[12] propuseram uma variante deste modelo, na qual a energia dissipativa é também dada em função dos parâmetros geométricos, e uma conjunto de fórmulas para determinar os valores dos parâmetros do modelo. Eles conseguiram obter imagens de "vestuários animados" bastante realísticas.

O forte apelo geométrico que está subtendido no modelo proposto do Terzopoulos et al. e os resultados obtidos pelo Carignan et al. nos motivaram a resgatar as idéias originais destes autores e fazer uma análise minuciosa deste modelo, em busca de uma metodologia para definir, de forma intuitiva, os valores dos seus parâmetros para obter os efeitos desejados. Isso inclui atividades como:

- Implementar o modelo original proposto em [6] com devidas adaptações;

- Analisar as limitações inerentes ao modelo;

- Obter, empiricamente, combinações de valores para os parâmetros do modelo, onde os resultados tenham aparência realística. Realizar uma primeira avaliação que, embora grosseira, possa retratar a versatilidade do modelo;

- Elaborar algum método para indicar valores adequados para os parâmetros que ditam o comportamento dinâmico do modelo, perante diferentes combinações dos valores dos parâmetros. Em particular, procuramos uma faixa de valores que definam uma classe de superfícies com bastante resistência ao alongamento e pouca resistência à curvatura. Essas características nos possibilitam simular o comportamento de objetos bastante interessantes, como uma peça de tecido ou uma folha papel.

Este relatório é organizado em oito capítulos. O capítulo 2 é uma coletânea de conceitos fundamentais que utilizamos para desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3 é apresentado o modelo proposto em [6]. No capítulo 4 serão discutidos com maiores detalhes a implementação do modelo e os problemas encontrados. Serão ainda comentadas as limitações do modelo e a nossa solução para contorná-las. A controlabilidade do modelo é analisada no capítulo 6. Este capítulo inclui também uma metodologia para escolha de valores para os parâmetros. Um conjunto de experimentos foram feitos para validar a metodologia proposta. No capítulo 7 são mostrados os resultados de algumas simulações para superfícies com bastante resistência ao alongamento e pouca resistência à curvatura. E, finalmente, no capítulo 8 algumas conclusões são feitas.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

O objetivo deste capítulo é sumarizar os principais conceitos utilizados no nosso trabalho para que o relatório seja auto-contido.

2.1 Geometria Diferencial

Ao vetor posição $\mathbf{r}(x, y, z)$ de um ponto P qualquer no espaço 3D podemos associar as suas coordenadas a um conjunto único de coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ através das seguintes funções:

$$\begin{array}{l} x = x(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\ y = y(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\ z = z(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \end{array} . \tag{2.1}$$

As coordenadas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ são denominadas as *coordenadas curvilíneas* de P. O valor n corresponde à dimensão do objeto no espaço ao qual o ponto pertence. Para $n = 1$ o objeto é uma curva, $n = 2$, uma superfície e $n = 3$, um corpo sólido.

Sendo

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_2} da_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_3} da_3 + \ldots \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_n} da_n, \tag{2.2}$$

o quadrado de comprimento de arco em coordenadas curvilíneas pode ser expresso por

$$|dl|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i^n \sum_j^n G_{ij} da_i da_j, \tag{2.3}$$

onde

$$G_{ij}(\mathbf{r}(\mathbf{a})) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} . \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j} . \tag{2.4}$$

A equação (2.3) é conhecida como *primeira forma quadrática fundamental* ou *tensor métrico* e as quantidades G_{ij} são denominadas *coeficientes métricos*[2, 16, 7].

A *curvatura* de uma curva qualquer num ponto mede o grau de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente nesse ponto. A *curvatura normal* de uma curva C sobre uma superfície S num ponto P é dada por:

$$k_n = kcos\theta, \tag{2.5}$$

onde k é a curvatura de C em P e θ, o ângulo entre o vetor normal a C e o vetor normal a S em P.

Pode-se mostrar que

$$k_n = \sum_i^2 \sum_j^2 B_{ij} da_i da_j, \tag{2.6}$$

onde

$$B_{ij}(\mathbf{r}(\mathbf{a})) = \mathbf{n}.\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial a_i . \partial a_j} \tag{2.7}$$

A equação (2.6) é denominada *segunda forma quadrática* ou *tensor de curvatura* e as quantidades B_{ij} são denominadas *coeficientes de curvatura.*

Para o caso de uma superfície, pode-se obter ainda os valores de B_{ij} em função de G_{ij}, a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{\begin{bmatrix} x_{a_1a_1} & y_{a_1a_1} & z_{a_1a_1} \\ x_{a_1} & y_{a_1} & z_{a_1} \\ x_{a_2} & y_{a_2} & z_{a_2} \end{bmatrix}}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \\
B_{12} = B_{21} &= \frac{\begin{bmatrix} x_{a_1a_2} & y_{a_1a_2} & z_{a_1a_2} \\ x_{a_1} & y_{a_1} & z_{a_1} \\ x_{a_2} & y_{a_2} & z_{a_2} \end{bmatrix}}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}} \\
B_{22} &= \frac{\begin{bmatrix} x_{a_2a_2} & y_{a_2a_2} & z_{a_2a_2} \\ x_{a_1} & y_{a_1} & z_{a_1} \\ x_{a_2} & y_{a_2} & z_{a_2} \end{bmatrix}}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Os tensores métrico e de curvatura são, portanto, interdependentes. Eles devem satisfazer certas equações diferenciais de compatibilidade, conhecidas como *fórmula de Gauss* e *equações de Mainardi-Codazzi* da teoria de superfícies. Estas equações são deduzidas das relações

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_{a_1a_1})_{a_2} - (\mathbf{r}_{a_1a_2})_{a_1} &= \vec{0} \\
(\mathbf{r}_{a_2a_2})_{a_1} - (\mathbf{r}_{a_2a_1})_{a_2} &= \vec{0} \\
\mathbf{n}_{a_1a_2} - \mathbf{n}_{a_2a_1} &= \vec{0}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por outro lado, dois tensores simétricos G_{ij} e B_{ij}, com $G_{11} > 0, G_{22} > 0$ e o determinante $det(G) > 0$, satisfazendo tais equações de compatibilidade, determinam a menos de um movimento rígido uma única superfície tendo G_{ij} e B_{ij} como tensores métrico e de curvatura.

2.2 Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas

Seja uma função $u = u(x, y)$, que possui um número suficiente de derivadas parciais. Os valores de u nos pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ são relacionados pela expansão de Taylor:

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) &= u(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) u(x,y) + \\ & \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u(x,y) + \ldots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} u(x,y) + R_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde o termo residual R_n é dado por

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u(x + \xi h, y + \xi k), 0 < \xi < 1, \tag{2.11}$$

ou seja,

$$R_n = O[(|h| + |k|)^n] \tag{2.12}$$

Pela equação (2.12), queremos que exista uma constante positiva M, tal que $|R_n| \leq M(|h| + |k|)^n$ com h e k tendendo a zero. O ponto $(i\Delta x, j\Delta y)$, também chamado de ponto (i, j) da malha, é circundado por uma vizinhaça de pontos mostrada na Figura 2.1. Fazendo a expansão na série de Taylor para $u_{i-1,j}$ e $u_{i+1,j}$ sobre o valor central $u_{i,j}$, nós obtemos

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}u_{xxxx} \tag{2.13}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}u_{xxxx}, \tag{2.14}$$

onde $u_x \equiv \partial u/\partial x$, $u_{xx} \equiv \partial^2 u/\partial^2 x$, etc. Assim, consegue-se calcular todas as derivadas no ponto (i, j) da malha. Subtraindo ou adicionando convenientemente estas equações, chega-se às seguintes fórmulas de diferenças finitas para as derivadas de primeira e segunda ordem em (i, j):

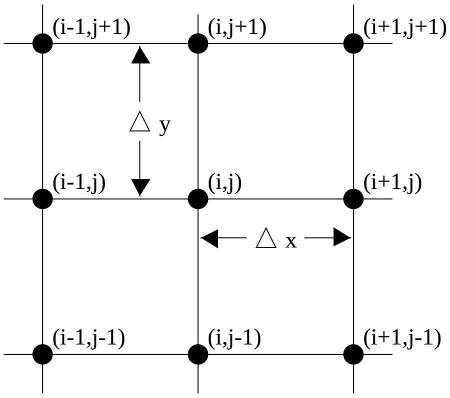

Figura 2.1: Malha de nós

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \tag{2.18}$$

As equações (2.15), (2.16) e (2.17) são conhecidas, respectivamente, como diferenças posterior, anterior e central. Formas similares existem para $\partial u/\partial y$ e $\partial^2 u/\partial y^2$.

Analogamente é possível mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O[(\Delta x + \Delta y)^2]. \tag{2.19}$$

Isso significa que, dada uma função $u[m,n]$ com a qual criamos a malha de pontos conforme a Figura 2.1, podemos definir os *operadores de diferença posterior* de primeira ordem

$$\begin{aligned} D_1^+(u)[m,n] &= (u[m+1,n] - u[m,n])/\Delta x \\ D_2^+(u)[m,n] &= (u[m,n+1] - u[m,n])/\Delta y \end{aligned} \tag{2.20}$$

e *os operadores de diferença anterior* de primeira ordem

$$\begin{aligned} D_1^-(u)[m,n] &= (u[m,n]-u[m-1,n])/\Delta x \\ D_2^-(u)[m,n] &= (u[m,n]-u[m,n-1])/\Delta y. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Utilizando as equações (2.20) e (2.21), podemos ainda definir os *operadores de diferença cruzada posterior* e *anterior*

$$\begin{aligned} D_{12}^+(u)[m,n] &= D_{21}^+(u)[m,n] &= D_1^+(D_2^+(u))[m,n] \\ D_{12}^-(u)[m,n] &= D_{21}^-(u)[m,n] &= D_1^-(D_2^-(u))[m,n]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

e o operador de diferença central de segunda ordem

$$\begin{aligned} D_{11}(\mathbf{u})[m,n] &= \; = D_1^-(D_1^+(\mathbf{u}))[m,n] \\ D_{22}(\mathbf{u})[m,n] &= \; = D_2^-(D_2^+(\mathbf{u}))[m,n] \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3 Cálculo Variacional

O material incluído nesta seção se baseou exclusivamente do livro de Krasnov et al.[13].

Denomina-se *funcional* uma correspondência J, que associa a cada função $y(x)$ de uma classe M um número denotado comumente por $J[y(x)]$. A classe M chama-se *domínio* do funcional J. Por exemplo, o funcional

$$J[y(x)] = \int_b^a \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

associa o comprimento de arco à função com extremidades $A(a, y(a))$ e $B(b, y(b))$ no intervalo $a \leq x \leq b$.

Duas funções $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ dadas em $[a, b]$ serão *próximas na métrica de ordem* k, se

$$|y(x)-y_1(x)|, |y^{'}(x)-y_1^{'}(x)|, \ldots, |y^k(x)-y_1^k(x)|$$

permanecem pequenos em $[a, b]$.

Denomina-se *distância de ordem* n *entre duas funções*, ρ_n, $y = f(x)$ e $y = f_1(x)$, n vezes continuamente deriváveis num intervalo $[a, b]$, o máximo dos supremos em $[a, b]$ de

$$|f(x)-f_1(x)|, |f^{'}(x)-f_1^{'}(x)|, \ldots, |f^n(x)-f_1^n(x)|$$

, ou seja,

$$\rho_n = \rho_n[f_1(x)-f(x)] = \max_{0\leq k\leq n} \sup_{a\leq x\leq b} |f_1^k(x)-f^k(x)|. \tag{2.24}$$

Particularmente, a distância de ordem 0 entre duas funções é dada pela expressão

$$\rho_0 = \rho = \sup_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f(x)|. \tag{2.25}$$

Um funcional $J[y(x)]$ de domínio M se dirá *contínuo* em $y = y_0(x)$ relativamente à métrica de ordem n se, para qualquer $\epsilon > 0$, existir $\eta > 0$ tal que das condições

$$|y(x) - y_0(x)| < \eta, |y\prime(x) - y_0\prime(x)| < \eta, \cdots, |y^{(n)}\prime(x) - y_0^{(n)}\prime(x)| < \eta$$

com $y(x) \in M$, resulta a desigualdade $|J[y(x)] - J[y_0(x)] < \epsilon$. Em outras palavras, do fato que

$$\rho_n[y(x), y_0(x)] < \eta$$

decorre $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$.

Por exemplo, o funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y\prime(x)]dx$$

definido em $0 \leq x \leq 1$ é contínuo para $y_0(x) = x$ relativamente à métrica de ordem um, pois pode-se mostrar que, dado ϵ, existe η tal que $|J[y(x)] - J[x]| < \epsilon$ desde que $|y(x) - x| < \eta$ e $|y\prime(x) - 1| < \eta$.

Um funcional $L[y(x)]$ de domínio M é dito *linear* se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $L[cy(x)] = c \cdot L[y(x)]$; e
2. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$, para quaisquer $y_1(x) \in M$ e $y_2(x) \in M$.

Por exemplo, o funcional

$$L[y(x)] = \int_a^b [y\prime(x) + y(x)]dx$$

definido em $a \leq x \leq b$ é linear.

A qualquer acréscimo ou variação $\delta y(x)$ do argumento corresponderá a uma variação no funcional

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)], \tag{2.26}$$

onde $\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ com $y(x)$, $\tilde{y}(x) \in M$.

Por exemplo, ao variar o argumento de $y(x) = x$ a $y_1(x) = x^2$, o funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)y\prime(x)dx$$

definido em $0 \leq x \leq 1$ sofrerá a seguinte variação:

$$\Delta J = J[x^2] - J[x] = \int_0^1 x^2 2x dx - \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \int_0^1 (2x^3 - x)dx = 0.$$

Se existir um funcional $L[y(x), \delta y(x)]$, linear em relação a $\delta y(x)$, tal que qualquer variação

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

de um funcional J que admite a representação

$$\Delta J = L[y(x)], \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \parallel \delta y \parallel,$$

onde $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ com $\parallel y \parallel \rightarrow 0$, então o número $L[y(x)], \delta y]$ será denominado *deferencial forte*, ou simplesmente *diferencial*, do funcional $J[y(x)]$ em $y(x)$ correspondente a $\delta y(x)$ e se denotará por δJ.

Por exemplo, a diferencial do funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$$

definido no intervalo $a \leq x \leq b$ é

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \delta y(x)dx, pois$$

o acréscimo do funcional é, em um ponto arbitrário $y(x)$, igual a

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b y(x) + \delta y(x)dx - \int_a^b y(x)dx = \int_a^b \delta y(x)dx,$$

que, por ser linear, coincidirá com a diferencial de J em $y(x)$.

Diz-se que um funcional $J[y(x)]$ tem um *máximo (relativo)* em $y = y_0(x)$ se

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0.$$

Se, além de $\Delta J \leq 0$, $\Delta J = 0$ apenas se $y(x) = y_0(x)$, dir-se-á que J tem em $y = y_0(x)$ um *máximo estrito.*

De modo similar, J terá um *mínimo* em $y = y_0(x)$ se $\Delta J \geq 0$ para qualquer função suficientemente próxima de $y = y_0(x)$.

Um *extremo absoluto* de um funcional é um máximo ou um mínimo absoluto deste no seu dimínio de definição.

Uma condição necessária da ocorrência de um extremo em um funcional $J[y(x)]$ no seu domínio de definição é

$$\delta J[y_0(x)] = 0. \tag{2.27}$$

As funções para as quais $\delta J = 0$ são denominadas *pontos estacionários* de J.

Um funcional do aspecto

$$J[z(x_1,x_2)] \quad = \quad \int\int_{\dots}\int_D F\left(x_1,x_2,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial^n z}{\partial x_1^n},\frac{\partial^n z}{\partial x_2^n}\right)dx_1,dx_2,$$

onde F depende das derivadas de $z(x_1,x_2)$ até uma certa ordem n sobre o domínio D, a *condição necessária da ocorrência de um extremo* consiste em satisfazer a equação de Euler-Ostrogradsky

$$\begin{aligned} F_z - \frac{\partial}{\partial x_1}F_{z_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2}F_{z_{x_2}} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1}F_{z_{x_1x_1}} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F_{z_{x_1x_2}} + & \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2}F_{z_{x_2x_2}} - \cdots + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial^n x_2}F_{z\underbrace{x_2x_2\cdots x_2}_{n}} &= 0, \end{aligned}$$

sendo $F_k = \frac{\partial F}{\partial k}$ e $F_z = z$.

2.4 Sistemas Lineares

Um *sistema linear* de n equações com n icógnitas $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ é um conjunto de equações $E_1, \cdots, E_n$ da forma

$$\begin{aligned} E_1 : a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ E_2 : a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ E_n : a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \quad , \end{aligned} \tag{2.28}$$

com $a_{jk} \in \Re$ e $b_j \in \Re$. O sistema é denominado *homogêneo*, se $b_j = 0$ para todos j; senão ele é dito *não-homogêneo*. Usando a notação matricial, podemos reescrever o sistema (2.28) como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2.29}$$

onde a matriz de coeficientes $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ é uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ,$$

$\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ são os vetores-coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

O método clássico para solucionar um sistema linear é o *Método de Gauss*. Este método consiste em reduzir o sistema (2.28) em um sistema triangular (superior ou inferior) equivalente, o qual se resolve facilmente por substituição.

Usando a técnica de *fatoração LU*, pode-se reduzir o número de operações envolvidas em Método de Gauss. Esta técnica se baseia no fato de que qualquer matriz não-singular $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em duas matrizes triangulares $\mathbf{L}$ (inferior) e $\mathbf{U}$ (superior)

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Com isso podemos resolver a equação (2.29) em dois passos, pos simples substituições:

1. $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$; e
2. obtendo $\mathbf{y}$, determinar $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

Um método de fatoração, conhecido como *Método Doolittle*, determina os coeficientes da matriz triangular superior $\mathbf{U}$ através das seguintes equações

$$\begin{aligned} u_{1k} &= a_{1k}, k = 1, \cdots, n \\ u_{jk} &= a_{jk} - \sum_{s=1}^{j-1} m_{js} u_{sk}, k = j, \cdots, n; j \geq 2; \end{aligned}$$

e os coeficientes da matriz trianuglar inferior $\mathbf{L}$,

$$\begin{aligned} m_{j1} &= \frac{a_{j1}}{u_{11}}, j = 2, \cdots, n \\ m_{jk} &= \frac{1}{u_{kk}}(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js} u_{sk}), j = k+1, \cdots, n; k \geq 2; \end{aligned}$$

Quando a matrix $\mathbf{A}$ é simétrica e definida positiva, isto é $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ para todos $x \neq 0$, podemos fatorar $\mathbf{A}$ em

$$\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T \quad ,$$

pelo *Método de Cholesky*. As fórmulas de fatoração são

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ m_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} {m_{js}}^2}, j = 2, \cdots, n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_{j1} &= \frac{a_{j1}}{m_{11}}, j = 2, \cdots, n \\
m_{jk} &= \frac{1}{m_{kk}}(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js} m_{sk}), j = k+1, \cdots, n; k \geq 2.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Um Modelo Físico

Os objetos estudados neste trabalho deformam de acordo com a equação de movimento da Mecânica Newtoniana, onde no instante t as forças aplicadas externamente sobre um ponto devem igualar à somatória das forças inercial, de resistência a atritos e "potencial". Esta equação pode ser escrita na forma de Lagrange:

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\delta \varepsilon(\mathbf{r})}{\delta \mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) , \tag{3.1}$$

onde μ representa a densidade de massa e γ a constante de amortecimento no ponto $\mathbf{r}$. O vetor $\mathbf{f}$ denota a contribuição total das forças externas em $\mathbf{r}$ no instante t.

Uma implementação deste modelo é apresentada em [6]. O nosso objetivo, porém, não se restringe a produção de códigos que reproduzem os mesmos efeitos obtidos pelos autores. Gostaríamos de compreender melhor os parâmetros envolvidos no modelo e as limitações inerentes a ele para estabelecer uma metodologia mais intuitiva de escolha dos valores de parâmetros.

Neste capítulo apresentamos alguns importantes resultados deste estudo.

3.1 Energia de Forma

A equação (3.1) expressa o modelo clássico de movimento, onde ao aplicar uma força sobre um sistema, a energia correspondente deve ser igual à somatória da energia cinemática (inercial), dissipativa (atritos) e potencial (elástica).

Sendo os objetos deformáveis objetos de interesse, consideramos que a energia potencial, denotada por $\epsilon(\mathbf{r})$ na equação (3.1), seja devida

1. à posição $\mathbf{r}$ de cada ponto do objeto no espaço; e

2. à variação dos deslocamentos "relativos" entre os pontos do objeto. A esta parcela de energia denominamos *energia de forma*, pois veremos

que ela está associada diretamente com diversos efeitos geométricos macroscópicos, como alongamento e esgaçamento.

De acordo com os estudos da Mecânica de Materiais a computação da energia de forma deve se baseiar na *lei generalizada de Hook*[10], em que se leva em consideração o módulo de elasticidade e as tensões e deformações sofridas pelos pontos do objeto em cada direção. Esse procedimento consegue simular de forma bastante fiel o comportamento de uma grande variedade de materiais, mas é computacionalmente caro. Como os resultados requeridos em muitos sistemas de animação são apenas imagens *próximas* do realismo, tem-se procurado por uma técnica que contrabalance o custo e o realismo.

Em termos de Geometria Diferencial, pode-se traduzir o comportamento de deslocamentos relativos entre os pontos em duas grandezas geométricas - os *tensores métricos* e os *tensores de curvatura* (seção 2.1). Cremos que isso motivou Terzopoulos et al.[6] a estimar a energia de forma em função das normas (Frobenius[11]) ponderadas das diferenças dos tensores métricos e de curvatura em cada ponto do estado deformado da superfície em relação aos tensores deste ponto no seu estado de repouso. Em outras palavras, esta energia pode ser expressa como

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \int_\Omega \|\mathbf{G} - \mathbf{G}^0\|_\alpha^2 + \|\mathbf{B} - \mathbf{B}^0\|_\beta^2 da_1 da_2 \tag{3.2}$$

onde Ω denota o domínio no qual a superfície é definida.

Reescrevendo a equação (3.2) em termos dos coeficientes que compõem os tensores, obtemos

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \int_\Omega \sum_{i,j} (\zeta_{ij}(G_{ij} - G_{ij}^0)^2 + \varsigma_{ij}(B_{ij} - B_{ij}^0)^2) da_1 da_2 \ . \tag{3.3}$$

3.2 Uma Aproximação para Força Elástica

A equação (3.3) representa o componente da energia potencial devido à configuração interna de um objeto deformável. Por outro lado, cada elemento $da_1 da_2$ da superfície adquire, devido às forças externas $\mathbf{f}$ uma parcela de energia.

Seja $-\mathbf{e}(\mathbf{r})$ a "parcela" de forças externas que contribuam com $-\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$ à energia potencial em cada elemento $da_1 da_2$ da superfície. Então para a superfície toda a energia será

$$\int_\Omega -\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} da_1 da_2.$$

Por conseguinte, a energia potencial total acumulada na superfície poderá ser obtida atravé de

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \int_\Omega -\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} da_1 da_2 + \int_\Omega \sum_{i,j} (\zeta_{ij}(G_{ij} - G_{ij}^0)^2 + \varsigma_{ij}(B_{ij} - B_{ij}^0)^2) da_1 da_2 \ , \tag{3.4}$$

que é um funcional de duas variáveis (a_1 e a_2) com derivadas até a segunda ordem. Este funcional associa a cada ponto $\mathbf{r}$ de Ω uma energia potencial.

Em fenômenos físicos, a posição de equilíbrio de qualquer sistema corresponde ao estado em que todos os seus pontos atinjam a menor energia potencial. Portanto, para obter o estado de equilíbrio de qualquer superfície sujeita à força $-\mathbf{e}(\mathbf{r})$, deve-se encontrar o minimante de $\epsilon(\mathbf{r})$.

Denotando

$$-\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} da_1 da_2 + [\sum_{i,j} (\zeta_{ij}(G_{ij} - G^0_{ij})^2 + \varsigma_{ij}(B_{ij} - B^0_{ij})^2]$$

por

$$F(\mathbf{r}, \partial\mathbf{r}_{a_1}, \partial\mathbf{r}_{a_2}, \partial\mathbf{r}_{a_1a_1}, \partial\mathbf{r}_{a_1a_2}, \partial\mathbf{r}_{a_2a_2}) \ ,$$

os pontos estacionários do funcional $\epsilon(\mathbf{r})$ devem ser soluções da equação de Euler-Ostrogradsky (seção 2.3) correspondente, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial a_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1a_1}}\right) + & \\ 2\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1a_2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2a_2}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Conforme mostra no apêndice A, a partir da equação (3.5) pode-se obter a seguinte aproximação *necessária* para que a superfície tenha uma configuração de equilíbrio

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j} -\frac{\partial}{\partial a_i}.\left(\alpha_{ij}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left(\beta_{ij}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial a_i \partial a_j}\right) \ , \tag{3.5}$$

onde as variáveis α e β são definidas como

$$\alpha_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \eta_{ij}(\mathbf{a})(G_{ij} - G^0_{ij}) \tag{3.6}$$

$$\beta_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \xi_{ij}(\mathbf{a})(B_{ij} - B^0_{ij}) \ . \tag{3.7}$$

Com isso consegue-se "geometrizar" os parâmetros da parcela de energia potencial da equação (3.1), pois as grandezas G_{ij} são os coeficientes do tensor métrico, relacionados com o alongamento da superfície e os valores de B_{ij}, são os coeficientes do tensor de curvatura, relacionados à curvatura média.

É fácil ainda ver a partir das equações (3.6) e (3.7) que o comportamento de oposição da superfície a uma força externa será tão mais pronunciado quanto maiores forem os valores dos parâmetros η e ξ. No capítulo 6 discutiremos mais detalhadamente sobre a controlabilidade da deformação utilizando este modelo.

Capítulo 4

Uma Implementação

O objetivo deste capítulo é apresentar os detalhes da nossa implementação. A partir desta implementação foi possível experimentar diversos aspectos do modelo descrito no capítulo 3.

Por completitude será transcrito na seção 4.1 o procedimento descrito em [6].

4.1 Discretização

Para calcular numericamente, em cada instante t, os vetores-posição $\mathbf{r}[m,n]$ dos pontos da superfície definida sobre o domínio Ω, foi realizada a discretização da equação (3.5) pela técnica de diferenças finitas conforme sugere Terzopoulos et al.[6]. Esta discretização consegue reduzir a equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O espaço contínuo Ω é discretizado em uma malha de M por N nós, onde cada nó (m,n) representa um ponto discreto (ou uma *variável nodal*) $\mathbf{r}(m,n)$ no espaço 3D. Ao conjunto de variáveis nodais $\mathbf{r}(m,n)$ definidas para MN nós denomina-se a *malha de funções*, representada por $\mathbf{r}[\mathbf{m},\mathbf{n}]$.

As equações (3.5), (3.6) e (3.7) são discretizadas, respectivamente, para:

$$\mathbf{e}_{ij}[m,n] = \sum_{i,j}^{2} -D_i^-(\mathbf{p})[m,n] + D_{ij}^{(-)}(\mathbf{q})[m,n] \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \alpha_{ij}[m,n] D_j^+(\mathbf{r})[m,n] \\ \mathbf{q} &= \beta_{ij}[m,n] D_{ij}^{(+)}(\mathbf{r})[m,n] \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\alpha_{ij}[m,n] = \eta_{ij}[m,n](D_i^+(\mathbf{r})[m,n].D_j^+(\mathbf{r})[m,n] - G_{ij}^0) \tag{4.3}$$

e

$$\beta_{ij}[m,n] = \xi_{ij}[m,n](\mathbf{n}[m,n].D_{ij}^{(+)}(\mathbf{r})[m,n] - B_{ij}^0). \tag{4.4}$$

Se as variáveis nodais das malhas de funções $\mathbf{r}[\mathbf{m},\mathbf{n}]$ e $\mathbf{e}[\mathbf{m},\mathbf{n}]$ forem agrupadas, respectivamente, em matrizes coluna $\mathcal{R}$ e $\mathcal{E}$, de dimensão MN , a equação (4.1) pode ser escrita em forma matricial

$$\mathcal{E} = \mathbf{K}(\mathbf{r})\mathcal{R} \tag{4.5}$$

onde $\mathbf{K}$ é conhecida como *matriz de rigidez*.

A forma discreta da equação (3.1) pode ser então expressa pelo seguinte sistema acoplado de equações diferenciais:

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial\mathbf{t}^2} + \mathbf{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathbf{t}} + \mathbf{K}(\mathbf{r})\mathcal{R} = \mathcal{F} \quad , \tag{4.6}$$

onde

- $\mathbf{M}$ é a matriz diagonal formada pela densidade de massa de cada elemento;
- $\mathbf{C}$, a matriz diagonal formada pela densidade de amortecimento de cada elemento; e
- $\mathcal{F}$, a matriz coluna contendo a força externa aplicada a cada elemento, calculada a partir de $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$.

Observe que os valores dos operadores de diferença são indeterminados para os pontos nas fronteiras do domínio Ω. Entretanto, uma condição natural de fronteira pode ser simulada igualando-se a zero o valor de qualquer operador de diferença na equação (4.2) envolvendo $\mathbf{r}(m,n)$ que não correspondem aos pontos da malha MN.

Para simular a dinâmica (em Computação Gráfica, uma animação) de um objeto não-rígido, a equação (4.6) deve ser integrada no tempo. Isso é realizado através de um procedimento passo-a-passo, o qual converte um sistema de equações diferenciais não-lineares em uma seqüência de sistemas lineares.

O intervalo de tempo $[0,T]$ é dividido em subintervalos de tempo iguais Δt, e o processo de integração computa a seqüência de soluções aproximadas nos instantes t, t+Δt, t+2Δt, ... , T. Calculando $\mathcal{E}$ em $t+\Delta t$ e $\mathcal{F}$ em t, e substituindo as aproximações discretas no tempo

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial t} = (\mathcal{R}_{t+\Delta t} - 2\mathcal{R} + \mathcal{R}_{t-\Delta t})/\Delta t^2 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial t} = (\mathcal{R}_{t+\Delta t} - \mathcal{R}_{t-\Delta t})/2\Delta t \tag{4.8}$$

na equação (4.6), obtém-se

$$\mathbf{A}_t\mathcal{R}_{t+\Delta t} = \mathcal{G}, \tag{4.9}$$

onde

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{K}(\mathbf{r}_t) + \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right) \tag{4.10}$$

e

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t + \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathcal{R}_t + \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} - \frac{1}{2}\mathbf{C}\right)\mathcal{V}_t. \tag{4.11}$$

A matriz-coluna de velocidades $\mathcal{V}_t$ é dada por:

$$\mathcal{V}_t = (\mathcal{R}_t - \mathcal{R}_{t-\Delta t})/\Delta t. \tag{4.12}$$

4.2 Tratamento de Restrições

Restrições são condições que impomos a determinados pontos da malha para que eles permaneçam estacionários. Isto nos permite modelar situções em que fixamos um objeto não-rígido em um ou mais pontos, como uma bandeira presa a um mastro, uma cortina pendurada ou uma rede pendurada.

As restrições podem ser modeladas através da especificação de *pontos fixos* ou *pontos congelados*. Estes pontos possuem a característica de suas coordenadas permanecerem invariantes durante todas as iterações.

Segundo a proposta de Celniker e Gossard[3] o efeito de um ponto congelado $\mathbf{r}$ pode ser facilmente obtido eliminando da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ da equação (4.5) a linha e a coluna correspondentes a ele. Fisicamente isso significa desvincular totalmente a dependência entre o ponto fixo dos seus pontos vizinhos, podendo levar à geração de comportamentos não-correlatos (imprevisíveis) desses pontos vizinhos.

Preferimos abordar este problema de uma maneira diferente. Ao invés de zerar a linha e a coluna, propomos zerar da matriz $\mathbf{K}$ apenas a linha correspondente ao ponto congelado, exceto o elemento da diagonal principal (Figura 4.1). Uma interpretação física dessa abordagem seria eliminar a influência dos demais pontos neste ponto congelado, mantendo porém a influência deste nos demais. Esta influência é expressa através dos operadores de diferença. Além disso devem ser observadas as seguintes condições:

- $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0$ para $\forall t$, porque as deformações são função das forças aplicadas e como desejamos que neste ponto não ocorram deformações devemos zerar esta componente na equação (4.6), e

- $\mathbf{v_0}(\mathbf{r}) = 0$, pelo fato do ponto ser estacionário.

É interessante mencionar aqui que em [6] foi sugerido o método de Cholesky (seção 2.4) para resolver a equação (4.9). Mas, ao introduzirmos restrições nos pontos, a matriz $\mathbf{K}$ não é mais simétrica. Portanto, foi utilizado na nossa implementação um método genérico de fatoração LU (seção 2.4).

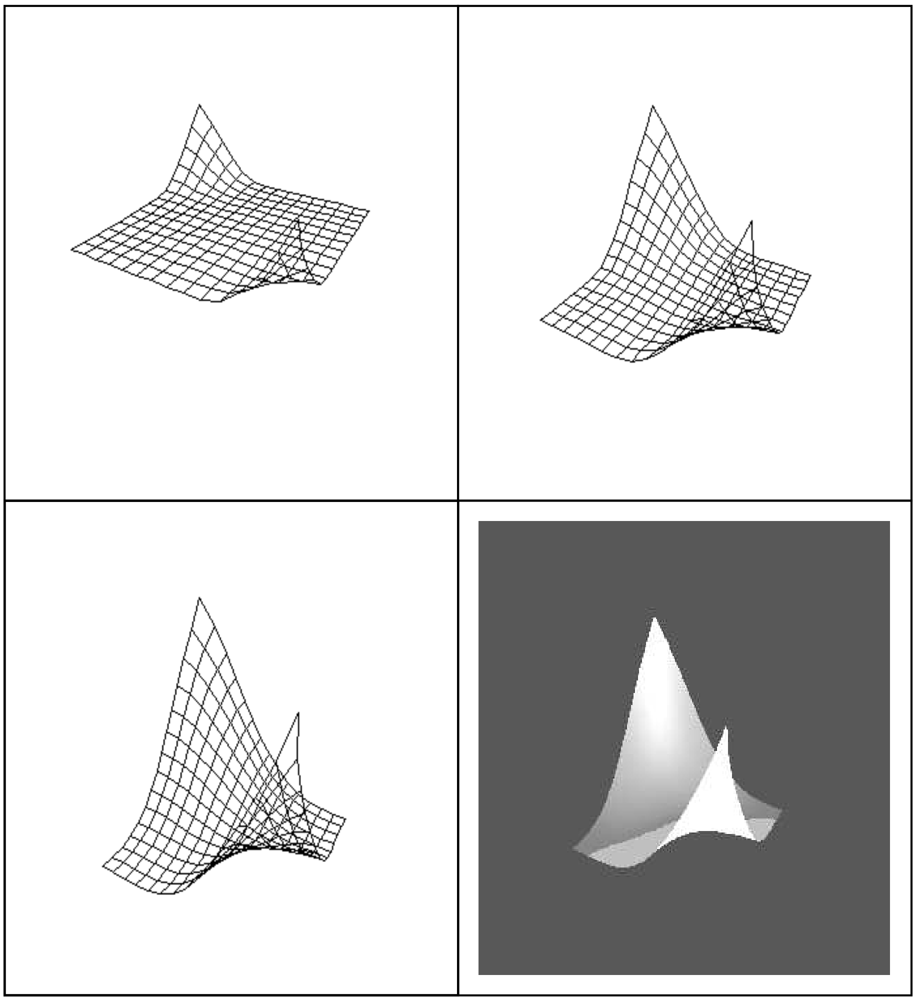

Figura 4.1: Uma rede pendurada em dois pontos, sujeita à força de gravidade.

4.3 Tratamento de Descontinuidades

Segundo Terzopoulos et al.[6] descontinuidades irão geralmente ocorrer nos pontos da fronteira de uma superfície. Para tratar esses pontos, eles sugeriram que seja igualado a zero todo operador de diferença que envolve $\mathbf{r}(m,n)$ em lados opostos da fronteira. Uma interpretação física a esta abordagem seria anular a influência dos pontos inexistentes em lados opostos da fronteira.

Observamos, entretanto, que pontos distintos no espaço Ω, coordenadas (a_1, a_2), podem ser mapeados num mesmo ponto no espaço $\Re^3$, coordenadas (x, y, z), de forma que discontinuidades no espaço Ω não implicam necessariamente discontinuidades visuais no espaço $\Re^3$. E se adotarmos a estratégia de Terzopoulos et al., uma superfície originalmente fechada em $\Re^3$, porém aberta em Ω, (por exemplo, um cilindro) pode ficar aberto no processo de deformação, mesmo que nenhuma "força de corte" seja aplicada (Figura 4.2), podendo produzir efeitos bastante interessantes como mostra a Figura 4.3. Mas, para algumas aplicações esse fenômeno pode ser indesejável.

Como uma forma de contornar isso, propomos uma nova abordagem para tratar as descontinuidades no espaço Ω.

Quando os pontos são contínuos visualmente, mesmo que eles não sejam contínuos no espaço Ω, utilizaremos os seus pontos vizinhos no espaço $\Re^3$ para computar os operadores de diferenças. Esta abordagem está fundamentada no fato de que, como vimos na seção 4.1, para estimar a energia potencial de deformação só interessam ao modelo proposto as diferenças entre os vetores-posição dos pontos *vizinhos* da superfície no espaço $\Re^3$. A Figura 4.4 foi gerada com uso deste princípio.

Essa nova abordagem requer, porém, o conhecimento das informações de adjacência (ou conectividade) entre os pontos de uma superfície no espaço $\Re^3$.

4.4 Tratamento de Colisões

A colisão ocorre quando dois objeto ficam tão próximos um do outro que a força de interação entre eles não possa ser mais desprezada. Dependendo do material do objeto e da força de interação, os objetos colididos podem sofrer deformações, procurando se moldar um ao outro.

Terzopoulos et al. propuseram um tratamento de colisão entre um obstáculo rígido e um objeto não-rígido. Eles associam ao obstáculo uma força de repulsão que atua como força externa sobre o objeto não-rígido. Essa força de repulsão é expressa em função da equação implícita do obstáculo $h(\mathbf{r})$

$$\mathbf{f}_{colisao} = -\left(\frac{\nabla h(\mathbf{r})}{\epsilon} exp\left(-\frac{h(\mathbf{r})}{\epsilon}\right).\mathbf{n}\right)\mathbf{n}, \tag{4.13}$$

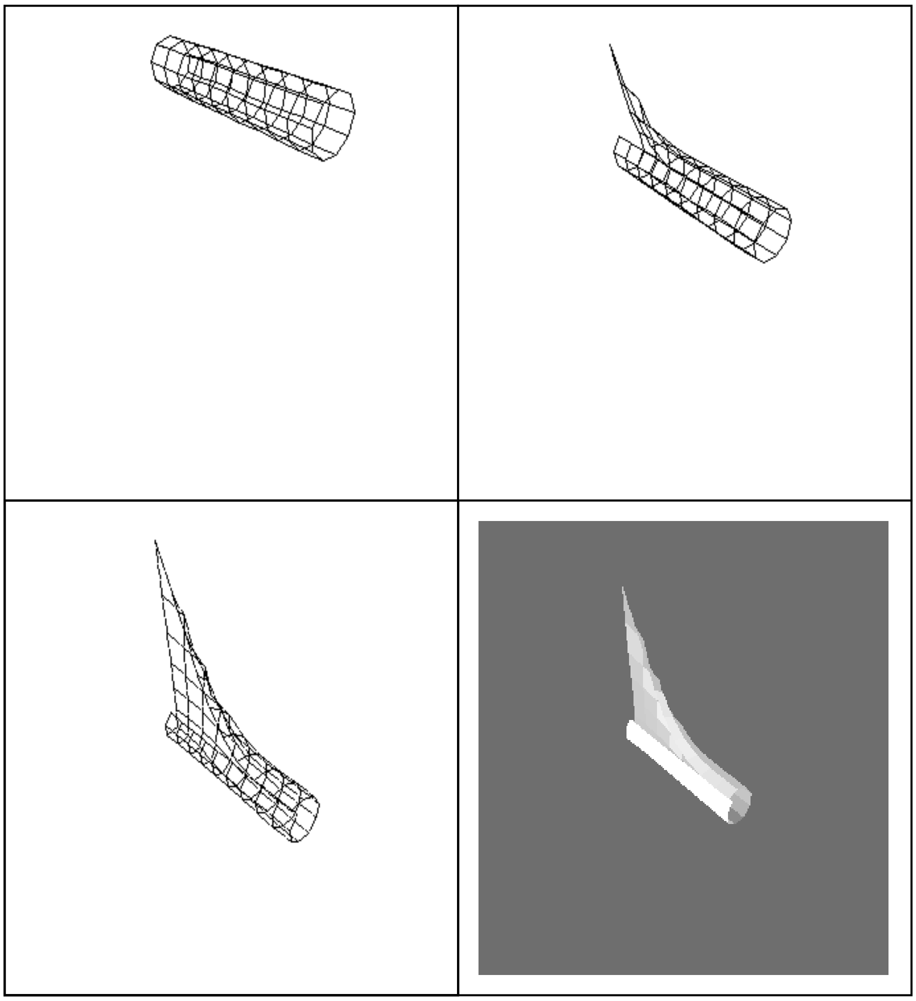

Figura 4.2: Uma cilindro se "rasgando" durante o processo de deformação.

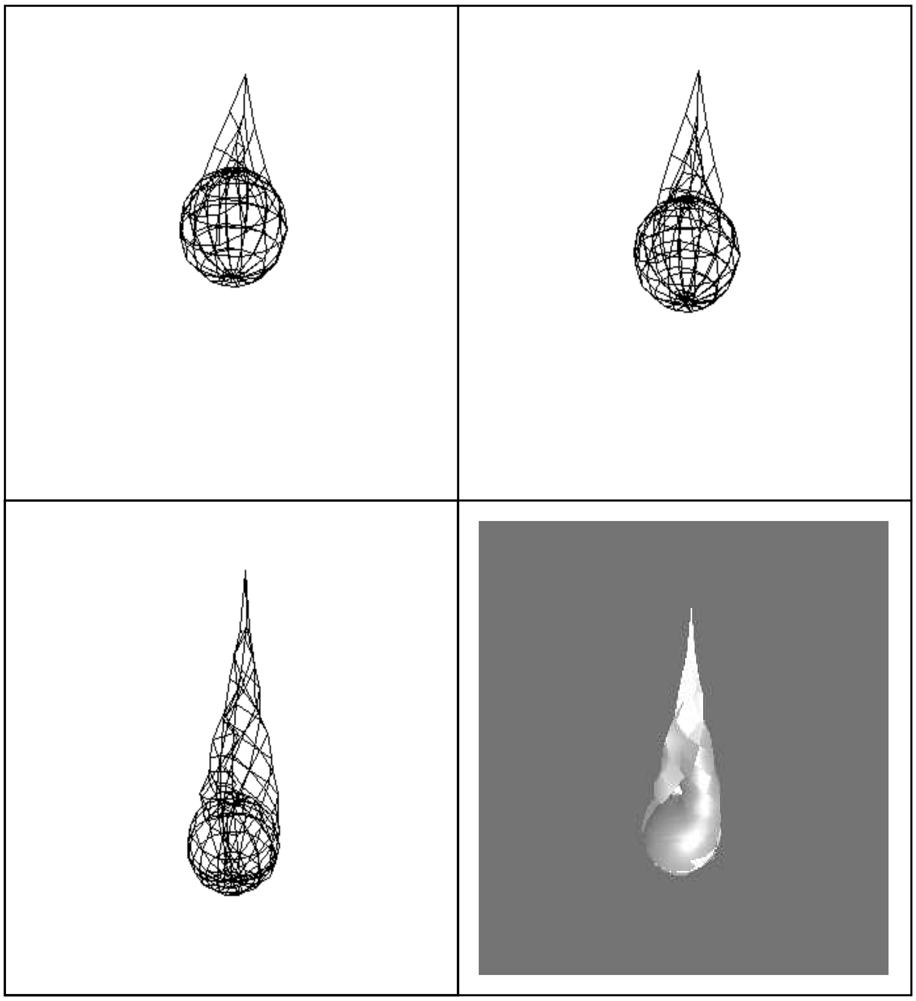

Figura 4.3: Uma bola se enroscando durante o processo de deformação.

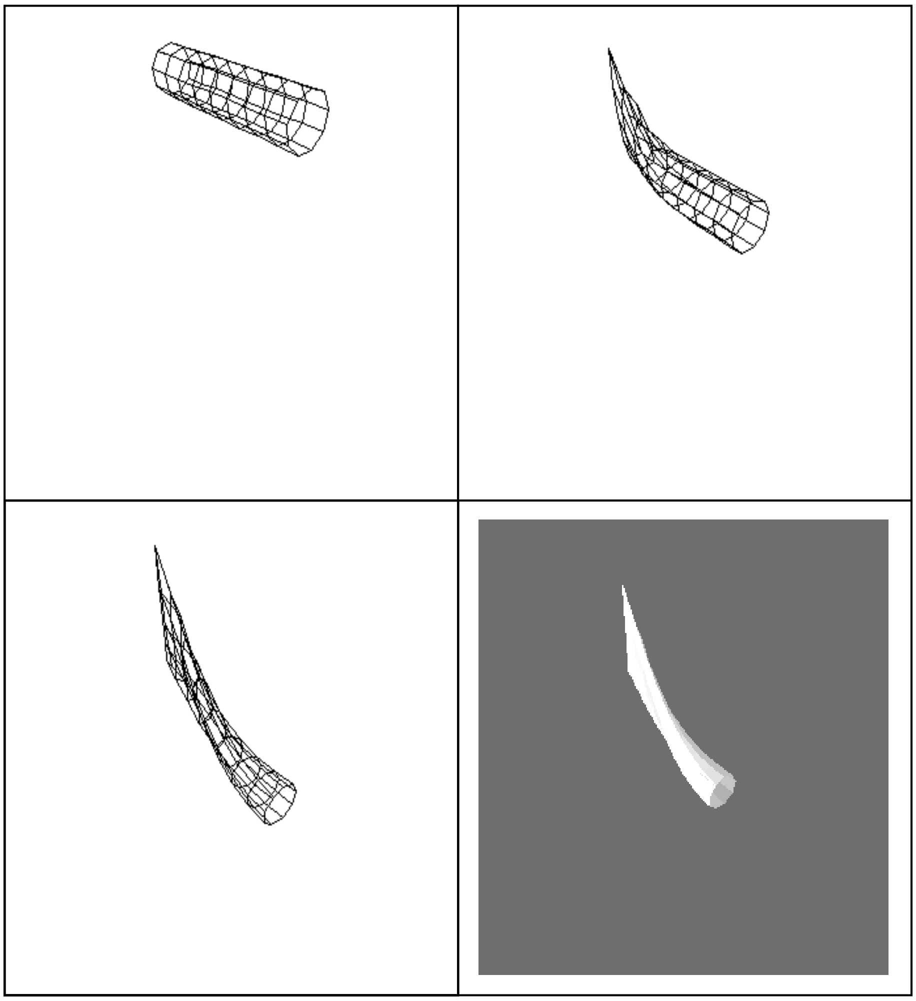

Figura 4.4: A deformação de um cilindro sem rasgo.

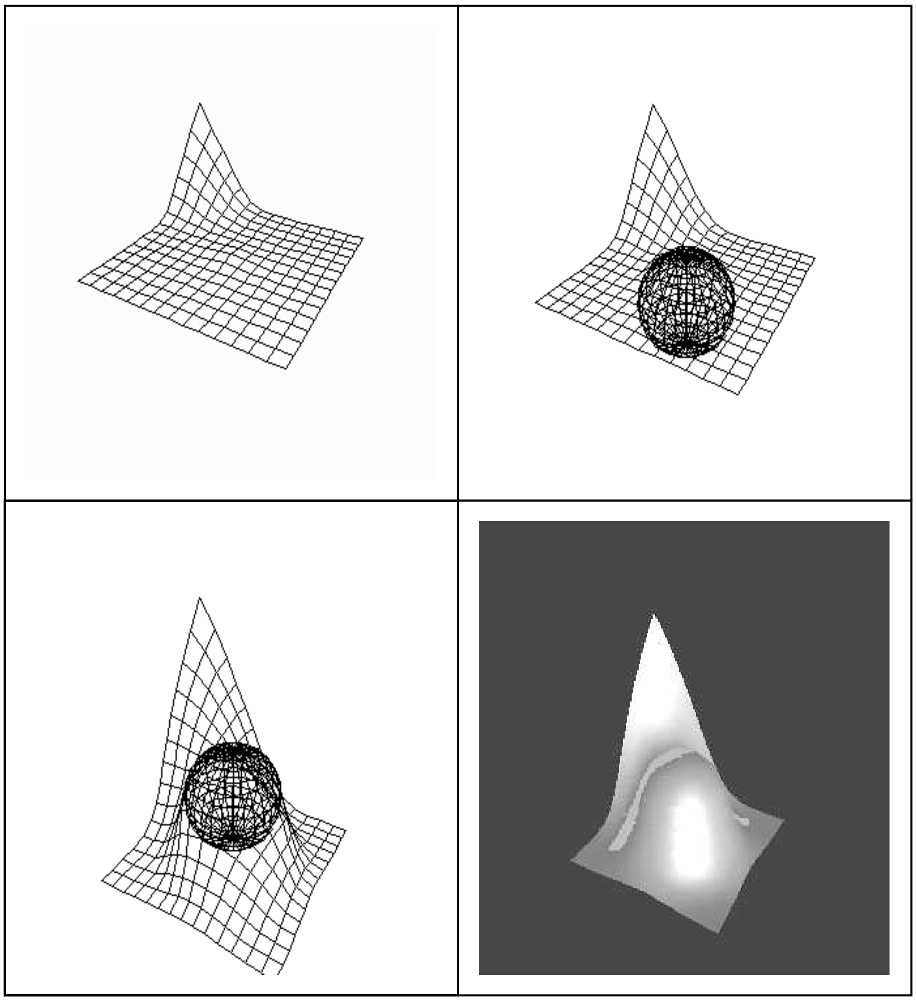

Figura 4.5: Um pano pendurado num ponto, caindo suavemente sobre uma bola.

de forma que pontos de equilíbrio se encontram sobre a superfície do obstáculo. Observe que, em cada ponto, essa força tem uma direção contrária à do vetor normal da superfície do objeto e aumenta exponencialmente à medida que ele se aproxima do obstáculo ou penetra nele. Portanto, a direção do vetor normal da superfície tem um papel importante no tipo de comportamento desejado. Por exemplo, se quisermos que um plano caia "livremente" na direção de um obstáculo, a direção do vetor normal desse plano deve coincidir com a direção da força gravitacional, como foi feita para gerar a Figura 4.5.

A grande inconveniência da solução de Terzopoulos et al. é que ela requer o conhecimento da representação em forma implícita da geometria dos obstáculos. Para vencer esta limitação, introduzimos uma nova definição da força de colisão.

A nossa proposta é definir em volta de cada ponto do obstáculo uma esfera rígida de raio δ e considerar que a colisão seja entre essas pequenas esferas rígidas e o objeto não-rígido. Isso significa que, ao invés de atribuir a força de repulsão a um objeto, atribuiremos essa força a um conjunto de objetos. Embora esse procedimento seja computacionalmente mais caro, ele tem a vantagem de ser independente da geometria do obstáculo em consideração.

Outro ponto crítico na simulação de colisões é a determinação do instante em que inicia uma colisão, uma vez que o tempo é discretizado. As iterações são computadas a intervalos de tempo regulares, porisso é possível que a colisão ocorra exatamente no intervalo entre dois instantes subsequentes. Para evitar isso podemos introduzir uma função para detectar o instante em que os objetos ficam bem próximos e aplicar a sugestão dada em [6] que consiste em reduzir automaticamente o intervalo entre dois instantes de iteração subsequentes.

4.5 Tratamento de Compatibilidade

Como os valores G_{ij} e B_{ij} são computados iterativa e independentemente, e observamos durante os experimentos por nós conduzidos que em muitas situações os resultados gerados não eram realísticos, conjeturamos se não havia alguma relação entre simulações irreais e a incompatibilidade dos valores de G_{ij} e B_{ij}. Motivados pela teoria apresentada no final da seção 2.1, sobre a interdependência entre os tensores $\mathbf{G}$ e $\mathbf{B}$, resolvemos analisar o problema mais aprofundamente.

É importante notar que, uma vez comprovada a validade deste teste, poderíamos ter então um instrumento poderoso para avaliar não só as superfícies geradas através do nosso modelo, mas também alguns casos mais gerais de superfícies discretizadas, visto que os cálculos dependem apenas de características geométricas, não envolvendo parâmetros específicos do modelo.

Devido à importância deste assunto, reservamos o capítulo 5 para discutí-lo.

Capítulo 5

Testes de Compatibilidade

Neste capítulo apresentamos o desenvolvimento de dois algoritmos para testar a verossimilhança de nossas superfícies, juntamente com os experimentos e os resultados obtidos. O primeiro deles é denominado *Teste de Compatibilidade* e foi baseado na teoria de superfícies (equações (2.9). O segundo, o Teste de Limiar Negativo, resulta da observação dos valores de certos parâmetros, tendo assim um emprego específico para o modelo. Estes testes são incorporados na implementação do modelo para detetar situações ao longo de uma animação onde as formas produzidas se degeneram, garantindo assim a geração de superfícies que tenham aparência próxima à “realidade”.

5.1 Considerações Preliminares

Na implementação das equações (2.9) por técnica de diferenças finitas, foram encontradas algumas dificuldades. Essas equações envolvem derivadas parciais de até terceira ordem, o que pode gerar um erro considerável quando implementado sob a forma de diferenças em uma malha de baixa resolução.

Além disto, em nossa implementação do modelo, a expressão para o cálculo de uma derivada parcial independe da seqüência em que as variáveis de derivação aparecem (apêndice B). Torna-se necessário então redefinir as expressões, fazendo com que se tome uma vizinhança de pontos diferente, dependendo da ordem em que as derivadas apareçam em cada termo de uma equação. Estas modifiações, no entanto, não adicionam complexidade significativa ao teste.

5.2 Experimentos

5.2.1 Teste de Compatibilidade

Do ponto de vista geométrico, as equações (2.9) significam dizer que as superfícies produzidas devem apresentar-se localmente suaves. Além disso, deve existir coerência entre alongamento e curvatura. Por exemplo, partindo de uma superfície de bordo fixo, não é possível haver alongamento (*i.e.*: aumento de área) sem haver variações na curvatura. Estas considerações não foram levadas em conta nos trabalhos anteriores[6, 12].

Realizamos alguns ensaios com duas versões distintas do Teste de Compatibilidade, que diferem na maneira como foram implementadas as diferenças finitas (*i.e.*: para frente ou para trás) relacionadas ao cálculo das derivadas parciais nas equações (2.9).

Usamos combinações interessantes de valores para η e ξ extraídas dos experimentos da seção 6.4.3. Uma implementação inicial do teste envolve uma situação descrita mais detalhadamente na seção 6.4.1, onde temos uma superfície plana horizontal, quadrada, presa em toda a regiao da borda, que sofre a ação da força gravitacional. Em vista da simetria neste caso, olhamos inicialmente os resultados produzidos apenas pela primeira das equações (2.9). Computamos os dois vetores que constituem a equação e comparamos seus módulos e direções, que devem ser iguais. Tomamos então a razão entre os módulos e, para comparar suas direções, tomamos o cosseno do ângulo entre eles, obtido através de produto interno. Esperamos valores próximos de 1.00 para superfícies suaves.

- $\eta = 10^{-3}$ e $\xi = 10^{-7}$

  Esta combinação de parâmetros gera superfícies de aparência realística. A maioria dos números encontra-se entre 3 e 1/3 para a razão entre módulos. Os valores para o cosseno apresentam vários resultados negativos apesar de serem todos, em valor absoluto, próximos de 1.00. O problema do sinal está provavelmente relacionado à definição das diferenças finitas.

- $\eta = 0.1$ e $\xi = 10^{-7}$

  Este exemplo de combinação de parâmetros é também comentado na seção 5.2.2, onde são mostradas algumas figuras. O comportamento apresentado não é realístico, como se observa já nos primeiros quadros da animação (Figura 5.2). Os números flutuam um pouco mais, porém os valores do cosseno são muito próximos de 1.00 ou de -1.00, talvez pelo fato de termos objetos planares, como o da Figura 5.3. É um caso bastante crítico onde não se pode concluir nada a respeito das superfícies a partir dos resultados do teste.

- $\eta = 10^{-5}$ e $\xi = 0.1$

  As superfícies geradas não parecem realísticas. Há um exagero na formação de pontas. Muitos valores para a razão entre os módulos permanecem bem-comportados, o que não era de se esperar. Para o cosseno, todos os valores absolutos valem 1.00 nos quadros finais. Este é um resultado inesperado.

- $\eta = 10^{-6}$ e $\xi = 10^{-3}$

  As superfícies geradas têm aparência suave, com um efeito de oscilação de amplitude baixa bastante realístico. Os valores são bem estáveis e pequenos, o que consiste em um resultado esperado. Para o cosseno, temos que o valor 1.00 para *todos* os pontos da malha a partir do nono quadro. É um resultado coerente.

- $\eta = 10^{-5}$ e $\xi = 10^{-7}$

  Apesar de estável, as superfícies não possuem aparência realística. A razão entre os módulos varia bastante, entretanto, vários valores para o cosseno são próximos de 1.00, o que não deveria ocorrer.

De um modo geral, as duas versões do teste se comportam de maneira semelhante para as situações analisadas. A menos de casos extremos, como em alguns exemplos citados acima, superfícies não-verossímeis podem ser detetadas. Mesmo nos casos onde o teste parece não levar a resultados coerentes, a dificuldade está, na maioria das vezes, relacionada ao erro proveniente da discretização. Este problema pode ser evitado com um aumento na resolução da malha discretizada; no entanto, ao custo de um maior tempo de processamento.

5.2.2 Teste de Limiar

Através de uma análise cuidadosa do papel de α no cômputo do termo $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ na equação (3.5), concluimos que quando α_{ij} assume valores negativos, os próximos quadros a serem gerados tendem a ser não realísticos, pois a superfície tende a se encolher (determinante $det\mathbf{G} < determinantedet\mathbf{G^0}$) gerando uma grande quantidade de energia potencial que junto com a força externa $\mathbf{f}$ pode provocar um deslocamento demasiadamente grande nos pontos. A superfície deforma-se de tal maneira a gerar objetos que visualmente não traduzem um resultado esperado.

Foi interessante constatar ainda que valores negativos de β não são tão críticos em relação ao realismo e à estabilidade. De acordo com as equações (2.8), isso se deve não só às aproximações consideradas para obter a equação (3.5) como ao fato de que B_{ij} é uma medida de curvatura, que pode se contrabalançar com os valores de α (por exemplo, aumento de área acompanhando de redução de curvatura num ponto), conforme veremos na seção 6.2. Ao valor de α, a partir do qual começa-se a gerar superfícies não-realísticas denominamos *valor de limiar*. Este valor foi determinado empiricamente, a partir de condicionantes geométricos.

A implementação do teste de limiar foi simples. Ele consiste em se comparar, para cada quadro gerado, os valores do parâmetro α, em cada nó da malha, com um valor fixo de limiar. Quando os valores extrapolam o limiar, temos um sinal de que o programa começa a produzir quadros que

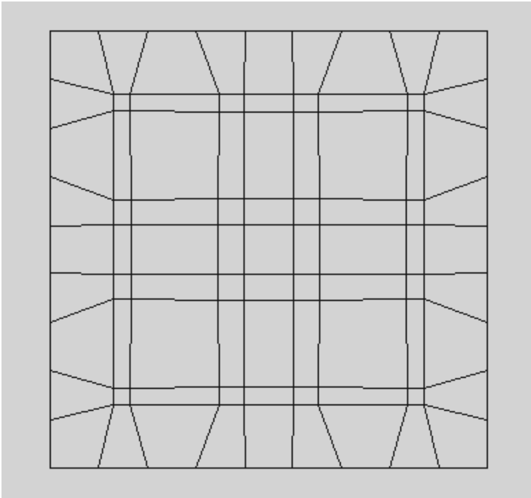

Figura 5.1: Quinto quadro da seqüência.

parecem não fazer sentido físico. Em geral, quando se atinge este estágio, passamos a operar em uma faixa de instabilidade: os valores dos parâmetros tornam-se cada vez mais negativos e os resultados visuais têm cada vez menos sentido físico, resultando, às vezes, em casos sem solução numérica, como por exemplo, matriz de rigidez (equação (4.5)) singular.

Como um exemplo de aplicação deste teste, consideremos o modelo de uma malha definida na seção 6.4.1 com valores de $\eta = 0.1$ e $\xi = 10^{-7}$. Até o quinto quadro da seqüência de animação, ainda existe um certo grau de realismo, onde a superfície ainda é suave e aparenta estar bastante tensionada, como mostra a Figura 5.1. É a partir deste quadro que alguns valores de α_{ij} produzidos são menores que -25, o valor de limiar geralmente adotado. A partir do próximo quadro, os valores caem bruscamente, para menos de -100 e os resultados visuais são caóticos, como pode ser notado na Figura 5.2, que apresenta o aspecto do sexto quadro. Os valores continuam baixos para os quadros subseqüentes, gerando objetos bastante curiosos, porém, não-realísticos, como mostra a Figura 5.3

5.3 Análise dos Resultados

No que diz respeito ao *teste de compatibilidade*, constatamos que para os valores das derivadas parciais que aparecem nas equações (2.9) satisfazerem aquelas equações, a superfície deve ser extremamente suave. A condição de suavidade imposta pelas três equações de compatibilidade pode ser forte demais para testar superfícies discretizadas usando uma malha de resolução pobre. Regiões localmente suaves seriam mascaradas dependendo dos pontos amostrados, gerando resultados depreciativos.

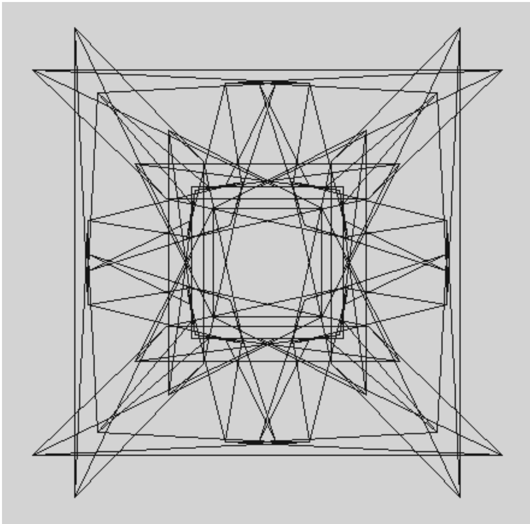

Figura 5.2: Sexto quadro da seqüência.

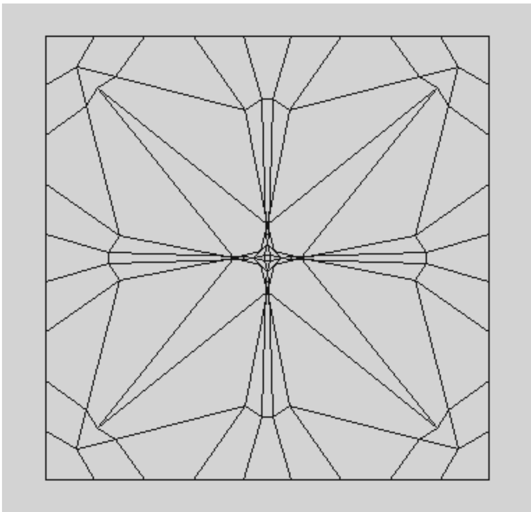

Figura 5.3: Décimo-quinto quadro da seqüência.

Os experimentos com o *teste de limiar* nos levaram a concluir que os valores de limiar oscilam em torno de -25 para α. O valor exato que, quando extrapolado, gera resultados anormais depende bastante das restrições utilizadas em cada simulação, bem como de parâmetros físicos como μ e γ. Porém, a própria natureza subjetiva do que vem a ser realismo ou não, pode tornar razoável esta imprecisão.

Por basear-se nas equações (3.6) e (3.7) do modelo, que incluem além dos aspectos geométricos também aspectos físicos, o Teste de Limiar Negativo não é apenas um procedimento para monitorar o comportamento dos quadros gerados em uma seqüência. As situações de instabilidade númerica e os quadros caóticos produzidos são, no fundo, resultados de inconsistências nas equações que regem o comportamento da superfície deformável. Isto sugere a implementação de algum mecanismo natural de impedir que nossos valores diminuam indefinidamente abaixo do valor de limiar.

Considerando o efeito que ocorre no mundo real, vemos que tal fenômeno corresponde a uma disrupção. O valor de limiar pode ser usado então como instrumento de decisão para uma futura implementação de rupturas no modelo. Este valor para ruptura deve ser escolhido cuidadosamente. Valores muito próximos de zero podem fazer com que a ruptura ocorra prematuramente, ainda na faixa de comportamento elástico estável, quando a superfície está apenas se alongando ou se curvando razoavelmente. Por outro lado, valores de limiar muito negativos podem retardar demais a decisão pela ruptura, permitindo que a superfície ingresse na faixa de instabilidade.

Capítulo 6

Controle

Se observarmos as equações (3.1) e (3.2) veremos que a forma geométrica de uma superfície deformável pode ser controlada tanto pelos parâmetros μ, γ e forças externas $\mathbf{f}$ quanto pelos parâmetros de elasticidade. Devido a diversidade dos parâmetros envolvidos, combinações diferentes dos valores destes parâmetros podem levar a um mesmo efeito visual. Por exemplo, para gerar a animação de uma superfície ondulante, podemos atribuir forças senoidais em cada ponto da superfície, ou atribuir valores distintos de γ em cada ponto, ou atribuir valores de μ distintos em cada ponto, ou então definir convenitentemente os parâmetros de elasticidade.

Esta flexibilidade aumenta por um lado a versatilidade do modelo, mas dificulta por outro lado a sua controlabilidade, uma vez que um mesmo efeito visual pode ser produzido por diferentes parâmetros. Este relatório propõe uma solução que tenta conciliar estes dois extremos. A proposta consiste em fixar para cada parâmetro um papel dominante e independente, cujos todos os possíveis valores ao serem combinados gerariam o espaço dos efeitos visuais desejáveis. E ainda, pelas ferramentas requeridas na análise da influência destes parâmetros, distinguimos dois níveis de controle:

Macro-controle: Atribuindo valores adequados para μ, γ e $\mathbf{f}$, podemos ter um controle grosseiro, porém, intuitivo da dinâmica do objeto. Todos os pontos da superfície assumem valores iguais de μ e γ, considerando que a superfície é homogênea em relação ao ambiente em que ela está imersa.

Micro-controle: O efeito da variação da geometria local de cada ponto, ou seja, o aspecto do material ser mais resistente à variação de área ou de curvatura, é controlado através dos parâmetros de elasticidade η e ξ.

Uma das contribuições deste capítulo é explorar, com o uso das ferramentas de Geometria Diferencial, a potencialidade dos parâmetros de elasticidade para oferecer uma interface mais intuitiva ao micro controle.

6.1 Macro Controle

Como a equação (3.1) refere a cada ponto $\mathbf{r}(a_1, a_2)$, podemos analisá-la considerando um sistema massa-mola em cada ponto. Desta forma, se o valor de γ for muito grande comparado com o valor de μ, cada ponto terá um comportamento (super)amortecido, ou seja, a superfície tende a atingir mais rapidamente a um estado de equilíbrio. À medida que se aumenta o valor de μ, a superfície tende a apresentar um comportamento oscilante antes do estado de equilíbrio devido à inércia maior. Finalmente, quando γ assumir o valor zero, a superfície ficará oscilando em torno de um ponto de equilíbrio.

Conforme já observado por Carignan et al.[12], em situações reais o valor de γ deve ser uma função que leve em conta os efeitos dissipativos provenientes de fricções internas na superfície e eles propuseram modelá-lo também em função de tensores métrico e de curvatura. Para a classe de objetos que estudamos, notamos que podemos obter resultados bastante realistas considerando γ como um escalar, ajustando somente os valores de μ e $\mathbf{f}$.

Observamos ainda que os triplos $(a\mu, b\gamma, c\mathbf{f})$, onde $a, b, c > 0$, produzem mesmo efeito visual, já que substituindo-os nas equações (4.10) e (4.11) obteremos, em cada iteração, um conjunto de equações equivalentes que geram o mesmo $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ expressa pela equação (4.9). Essa observação é útil sob o ponto de vista numérico, no sentido de que poderemos sempre "escalonar" as equações para uma faixa de valores computacionalmente mais confiáveis.

6.2 Micro Controle

Segundo Terzopoulos et al.[6] existem duas formas para ajustar o grau de deformabilidade de uma superfície. Pode ser feito através dos parâmetros η e ξ ou através dos parâmetros α e β.

Os parâmetros η e ξ ponderam termos quadráticos (equação (3.6)). Quando as variações na geometria do objeto, G_{ij} e B_{ij}, com relação à geometria do seu estado de repouso, G^0_{ij} e B^0_{ij}, forem muito grandes ou muito pequenas, os resultados podem ser muito críticos ou imperceptíveis, respectivamente, dependendo dos valores atribuídos a η e ξ. Sob o ponto de vista numérico (equação 3.2) estaremos trabalhando com sistemas não-lineares, mais difíceis de serem controlados, e assim sendo, mais susceptíveis à instabilidade.

Entretanto, ao optarmos por manipular α e β poderemos obter comportamentos não verossímeis. Isso se deve ao fato de que valores de α e β positivos induzem sempre uma energia elástica residual inicial, pois tanto $(G_{ij} - G^0_{ij})$ quanto $(B_{ij} - B^0_{ij})$ não serão nulos mesmo quando a força externa $\vec{f}$ for nula.

Preferimos, portanto, utilizar em nossas simulações η e ξ como parâmetros de controle de elasticidade, os quais atuam diretamente sobre as variações dos tensores que traduzem a forma da superfície. Com esta opção, abrimos mão de um modelo mais estável em busca de mais realismo. Vale ressaltar que a escolha empírica dos valores de η e ξ deve ser bastante criteriosa. De acordo com a equação (3.6), quando os valores de η e ξ são colocados muito grandes, ocorrem contribuições exageradas da força elástica de restauração, resultando em um desequilíbrio no sistema dinâmico. Isso pode ser justificado com o o fato de que a energia interna (equação (3.2)) é calculada em função dos valores de α e β. Para valores exagerados de η e ξ podem emergir valores grandes de α e β, mesmo que as variações nos tensores sejam pequenas.

Para entender melhor a influência dos parâmetros η e ξ nos efeitos visuais, é interessante analisar sob o ponto de vista geométrico o significado tanto da variação dos parâmetros G_{ij} e B_{ij} quanto da interrelação destas variações. Como já mencionado anteriormente, a variação do parâmetro G_{ij} corresponde à variação de área; enquanto a variação de B_{ij} à variação da curvatura média. A interrelação destas variações, mencionada na seção 2.1, está no fato de que, em geral, não se consegue variar a área de uma superfície sem produzir alguma curvatura nela.

Intuitivamente, podemos imaginar a situação de um objeto deformável, cuja forma no estado de repouso corresponde a uma superfície plana retangular, presa em toda a sua borda. Ao adicionarmos area, ou seja, ao aplicarmos forças na região interna no sentido de esticar a superfície, teremos um efeito inevitável de curvatura, já que a configuração da borda é mantida constante.

Assim, se η e ξ ponderam estas variações, quanto maior for o valor de η a superfície oferecerá maior resistência ao alongamento e quanto maior for o valor de ξ, a superfície oferecerá maior resistência à curvatura. Entretanto, conforme já discutido num parágrafo anterior, estes valores devem ser selecionados criteriosamente para evitar o "desandamento" de uma animação.

Uma ressalva significativa que devemos fazer é em relação à resolução da discretização da malha. O método numérico utilizado para a solução do sistema depende fortemente da discretização. Através das equações (4.3) e (4.4) é fácil verificar que os valores calculados de G_{ij} e B_{ij} podem ter erros com o uso da técnica de diferenças finitas apresentada na seção 4.1 e produzir resultados incoerentes. Por outro lado, uma discretização densa aumenta consideravelmente o número de pontos da malha, tornando a sua solução computacionalmente custosa. Devido ao nosso interesse por soluções interativas, que retornam aos usuários respostas não ambíguas e mais rápidas possíveis, optamos por discretizações grosseiras. Analisando as equações (3.6) e (3.7), observamos que podemos mascarar os erros produzidos utilizando os parâmetros η e ξ.

Um exemplo do uso dos parâmetros η e ξ para mascarar os erros oriundos da resolução de discretização é impor que o sistema de coordenadas seja sempre ortogonal. Embora o modelo proposto não imponha nenhuma restrição quanto ao sistema de coordenadas a_1 e a_2, é sempre recomendável trabalhar com sistemas de coordenadas ortogonais que podem simplificar os cálculos. Uma simplificação ainda, seria em cada iteração fazermos para ambos os tensores $G_{12} = G_{21} = B_{12} = B_{21} = 0$ em todos os pontos da superfície, não havendo nenhuma contribuição à energia $\varepsilon(\mathbf{r})$ relacionada a essas quantidades. Porém, como vimos na seção 4.1, não há um controle direto na forma de parametrização. Em cada iteração muda-se a configuração da superfície que é detectada através das equações (4.3) e (4.4), cujas computações podem embutir erros bastante grosseiros devido à discretização. Para mascarar isso, impomos em todas as nossas simulações que $\eta_{12} = \eta_{21} = \xi_{12} = \xi_{21} = 0$.

Entre os objetivos do trabalho, está a procura de um conjunto de parâmetros com valores que permitam a simulação de superfícies com bastante resistência ao alongamento e baixa resistência à curvatura para simular o comportamento de objetos flexíveis, porém, invariantes na área. Pelas nossas discussões, a combinação desejável seria valores altos de η e valores baixos de ξ. Conforme a equação (3.3), os fatores de ponderação η_{ij} passarão então a exercer maior influência no cálculo da energia interna que os ξ_{ij}.

6.3 A Escolha de Valores para os Parâmetros

Analisando as simulações dos resultados mais satisfatórios conseguidos em nossos experimentos (seção 6.4), observamos que os valores de η e ξ se apresentam em uma ordem de grandeza bem pequena, se comparados com os valores das demais grandezas físicas envolvidas. Do ponto de vista computacional, por trabalharmos com precisão finita, a faixa útil de valores para η e ξ pode vir a ficar bastante restrita, a ponto de praticamente não conseguirmos variar seus valores.

De um modo geral, de acordo com a equação (3.3), se as demais grandezas físicas são colocadas em uma faixa de valores semelhantes aos do mundo real, então, por razões numéricas, valores muito grandes de η ou ξ resultam em instabilidade e valores pequenos demais não produzem mudanças substanciais, com realismo, no comportamento dinâmico da superfície.

Uma maneira de solucionar este problema é aumentar os valores das grandezas envolvidas na equação (3.1). Desta forma, aumentamos indiretamente o limitante superior (imposto pela estabilidade) para η e ξ, permitindo variações em uma faixa mais larga. Como conseqüência, conseguimos uma gama de efeitos mais notáveis em nossas simulações.

Deve ser notado, no entanto, que tal escalonamento não pode corresponder simplesmente a uma mera mudança de escala para todas as grandezas envolvidas. Devemos aumentar os valores de μ, γ e $\mathbf{f}$ para indiretamente podermos alcançar valores maiores de η e ξ, mas se aumentarmos também as dimensões do objeto, continuaremos com a mesma densidade de massa e densidade de amortecimento (*i.e.*: os mesmos valores associados a cada nó em nossa malha discretizada) e recairemos nas mesmas dificuldades numéricas iniciais.

Na escolha de valores suficientemente grandes para as grandezas físicas, surgem dois problemas básicos:

- um critério para escolher uma faixa de valores que possa ser considerada como suficientemente grand; e
- aspecto intuitivo deste critério, permitindo comparações entre os valores escolhidos e os encontrados em nosso mundo real.

Uma solução encontrada para estas duas questões consiste em definirmos inicialmente os valores das grandezas físicas de acordo com o sistema de medidas ao qual estamos habituados (no caso, o Sistema Internacional ou MKS). A seguir fazemos algum escalonamento apropriado para estas grandezas, de modo que assumam valores adequados à realização dos cálculos numéricos.

6.4 Experimentos

Neste capítulo será apresentada uma série de experimentos que fizemos com a finalidade de avaliar os efeitos visuais que os parâmetros η e ξ podem produzir e compará-los com as previsões teóricas com base em elementos de Geometria Diferencial.

Para facilitar os nossos experimentos utilizamos um arquivo de definição de parâmentos denominado *script*, que está descrito com detalhadamento na seção 6.4.1. Usando o *script* Malha, experimentamos diferentes combinações de valores para os parâmetros de elasticidade para tentar estabelecer uma faixa de valores dentro da qual os resultados obtidos são realizáveis e, em termos visuais, satisfatórios.

Conforme justificado na seção 6.2, usamos sempre $\eta_{12} = \eta_{21} = 0$ e, para que a superfície seja homogênea e isotrópica, fizemos $\eta_{11} = \eta_{22}$, a cujo valor chamamos simplesmente de η. Sendo assim, por uma questão de praticidade, em nossos experimentos nos referimos a η como sendo a combinação de valores atribuidos aos parâmetros

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

e analogamente para ξ

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Para cada combinação η e ξ testada, foram gerados 40. Nas seções a seguir, encontramos uma listagem de combinações experimentadas, junto com alguns comentários.

A primeira da série dos testes foi tentar comprovar a nossa conjectura de que os parâmetros α e β das equações (3.6) e (3.7) produzem efeitos menos realistas do que os parâmetros η e ξ. A segunda da série tem como objetivo mostrar que existe uma interpretação física para a relação entre os parâmetros η e ξ.

6.4.1 Metodologia

Para efetuar nossas simulações, definimos as condições de contorno, os valores das grandezas físicas e outras variáveis relacionadas à implementação por meio de *scripts*.

O seguinte *script*, denominado *script* Malha, foi usado em nossos experimentos.

```
delta_t   = 0.04
n_passos  = 60
grid       : 10 10
aceleracao : x = 0.0 y = -9.0 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : ??? 0.0 0.0 ???
qsi        : ??? 0.0 0.0 ???
massa  = 20.0
gama   = 20.0
obj_deformavel : plano 6.0 0.0 6.0
n_restricoes = 36
restricoes = {
                  0    0 ponto_fixo
                         ...
                  0    9 ponto_fixo
                         ...
                  9    9 ponto_fixo
                         ...
                  9    0 ponto_fixo
                         ...
                  1    0 ponto_fixo
             }
```

A variável **delta_t** armazena o incremento temporal do método de integração no tempo, utilizado para resolver a equação (3.1). O valor atribuído a **n_passos** define o número de quadros a serem produzidos, e assim, essas duas grandezas determinam a duração da seqüência.

A discretização no espaço se dá por meio da variável **grid**. Através dela estabelecemos o número de nós a serem tomados e assim, a resolução. Quanto mais refinada for a superfície, melhores serão os resultados. Porém, acarretará um custo computacional mais elevado.

Em seguida, temos as componentes **x,y,z** do vetor aceleração da gravidade e do vetor velocidade inicial. A velocidade inicial, juntamente com a forma da superfície em estado de repouso constituem as condições iniciais do sistema.

Observamos, na continuação, as atribuições de valores para **eta** (η) e **qsi** (ξ). Colocamos ali os valores que serão lidos respectivamente como η_{11}, η_{12}, η_{21}, η_{22} e analogamente para ξ. Definimos a seguir a **massa** total do objeto, μ, e em **gama** a constante de amortecimento total, γ.

Finalmente, vem a definição da forma e das dimensões do objeto, bem como das restrições a ele associadas e seus pontos de aplicação. O objeto deformável é uma superfície que pode ser definida como cone, cilindro, esfera, plano ou toro. Podemos associar uma restrição a cada ponto da malha discretizada, sendo do tipo **ponto-fixo** (ou ponto estacionário), **força constante** ou **mola**.

Resumindo, o *script* Malha representaria um plano horizontal (sendo a coordenada y na direção vertical), preso em toda a região da borda, e discretizado segundo uma malha de resolução 10x10. Se raciocinarmos com unidades do Sistema MKS, teremos uma superfície com dimensões $6m$x$6m$ que se encontra submetida a uma aceleração gravitacional de $9m/s^2$, com massa igual a $20Kg$. A constante de amortecimento vale $20Kg/s$ e o incremento temporal é de $0.04s$.

6.4.2 Controle através de α e β

Como podemos observar a partir das equações (3.6) e (3.7), quando o controle da elasticidade é feito pelos parâmetros α e β, não levamos em conta as mudanças na geometria da superfície e consideramos como desacoplados os efeitos de alongamento e curvatura. A vantagem desta abordagem pode ser explicada se lembrarmos, da seção 5.2.2, que valores negativos de α_{ij} estão relacionados com situações de instabilidade. Visto que estamos aqui impondo os valores para estes parâmetros, evitamos tais situações com mais facilidade, trabalhando com valores positivos.

Apesar de esta ser uma abordagem mais simplista para controlar o comportamento da superfície, seus resultados geralmente não são muito ricos em realismo. Um exemplo de efeito não-realístico pode ser dado pelo encolhimento sofrido por uma superfície ao tentarmos controlar sua resistência ao alongamento através de α. Partindo de uma superfície plana em repouso, livre de forças externas, cuja vista superior tem o aspecto da Figura 6.1, haverá uma energia inicial de esticamento acumulada, visto que, ao invés de

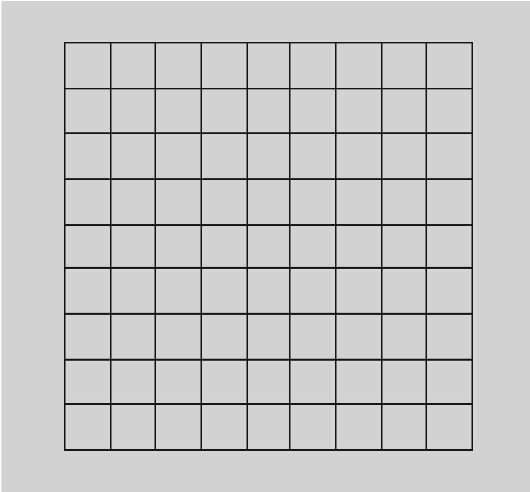

Figura 6.1: Vista superior de uma superfície plana em repouso.

calcularmos G_{ij} na equação (3.6) para obtermos

$$\alpha_{ij} = \eta_{ij}(G^0_{ij} - G^0_{ij}) = 0 \tag{6.3}$$

estaremos simplesmente impondo $\alpha_{ij} = constante$. O comportamento de encolhimento obtido é ilustrado na Fig 6.2, onde usamos restrições do tipo **ponto-fixo** nos quatro vértices para melhor ilustrar o quão crítico este efeito pode ser. Se o controle do alongamento houvesse sido feito através do parâmetro η, a superfície manter-se-ia em repouso, segundo sua forma original (Figura 6.1). O controle da elasticidade através de η e ξ é mais realístico. Porém, esta abordagem requer cuidados especiais na escolha dos valores, como já foi comentado em seções anteriores.

6.4.3 Controle através de η e ξ

Variação de Área com Bordo Fixo

Devido à interdependência entre alongamento e curvatura, constatada através das equações (2.8), ao operarmos com os parâmetros η e ξ devemos escolher seus valores criteriosamente. Por representar uma situação que ilustra bem a relação entre efeitos de curvatura e esticamento em uma superfície, empregamos o *script* Malha descrito acima em experimentos para analisar combinações adequadas de valores para os dois parâmetros de elasticidade. Através de uma análise visual colhemos alguns comentários.

Valores Extremos :

Fixando um dos parâmetros em um valor extremo (*i.e.*: muito próximo de 0 ou muito próximo de 1), variamos o outro parâmetro e avaliamos o aspecto das figuras.

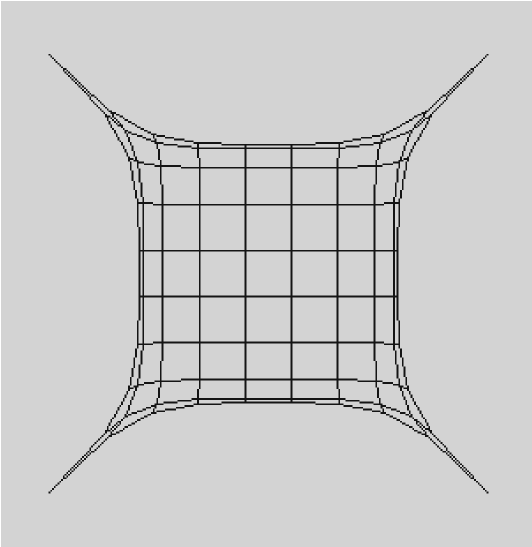

Figura 6.2: Efeito de encolhimento devido ao controle através de α.

- $\eta = 10^{-6}$ *a* 10^{-5} e $\xi = 10^{-7}$
  Devido aos valores baixos utilizados, observa-se um alongamento muito pronunciado para baixo, ocasionado pela ação da força gravitacional. Porém, a região central da malha apresenta-se ligeiramente curvada para cima, o que não traduz uma situação realística. Este resultado inesperado se deve provavelmente ao fato de termos um efeito de resistência ao alongamento ainda menos pronunciado que o de resistência à curvatura, tornando o comportamento da superfície incompatível, já que o aumento excessivo da área encontra dificuldade para produzir curvatura.
- $\eta = 10^{-4}$ *a* 10^{-3} e $\xi = 10^{-7}$
  À medida que aumentamos o valor de η, o efeito de alongamento em vista da força gravitacional torna-se menos pronunciado e as superfícies tornam-se mais suaves e realísticas. Observa-se oscilações devido à força restauradora (elástica), que já é considerável. A resistência ao alongamento parece estar em uma faixa adequada ao valor atribuído para o controle da curvatura.
- $\eta = 10^{-2}$ e $\xi = 10^{-7}$
  A dificuldade imposta ao alongamento, dado o valor alto de η, faz com que a superfície se curve pouco perante a ação da gravidade, a despeito do valor pequeno atribuído a ξ. Verifica-se um comportamento oscilatório, mas de amplitude baixa e freqüência alta em comparação aos exemplos anteriores, o que sugere maior rigidez. Atingimos um limiar de instabilidade, pois já observa-se su-

perfícies não-verossímeis na seqüência de animação com $\eta = 0.03$.

- $\eta = 0.1$ e $\xi = 10^{-7}$
  Comportamento estranho já nos primeiros quadros. A superfície distorce exageradamente, formando desenhos que se assemelham a uma flor. Com as bordas presas e uma resistência grande ao alongamento, não há possibilidade da superfície curvar-se. Em situações reais, provavelmente haveria ruptura.
- $\eta = 0.1$ e $\xi = 10^{-7}$ *a* 10^{-2}
  Instável, produz resultados inconsistentes já nos primeiros quadros da seqüência. À medida que ξ aumenta, consegue-se gerar ainda alguns quadros a mais. Para $\xi = 10^{-2}$ chegamos até o quadro 15.
- $\eta = 0.1$ e $\xi = 0.1$
  Oscila desordenadamente, com movimentos também para cima, formando pontas, talvez devido a uma grande resistência à curvatura. Até o quadro 39, onde foram feitos os cálculos, mantém-se estável. A grande força de resistência dos dois parâmetros pode ter contribuído para a estabilidade. No entanto, as figuras são pobres em realismo.
- $\eta = 0.01$ e $\xi = 0.1$
  Semelhante ao caso anterior. As figuras produzem efeitos bastante interessantes, porém, sem realismo.
- $\eta = 10^{-6}$ *a* 10^{-3} e $\xi = 0.1$
  Movimento vertical com pouca amplitude. Parece ser mais estável, mas ainda forma pontas. Para $\eta = 10^{-4}$ parece que as pontas se formam devido à impossibilidade de haver curvatura em resposta ao alongamento. Quando η torna-se muito pequeno (10^{-5}), tem-se instabilidade.
- $\eta = 10^{-6}$ e $\xi = 10^{-2}$
  Coerente até o quadro 10. Em seguida, comporta-se como no caso anterior.
- $\eta = 10^{-6}$ e $\xi = 10^{-3}$
  Volta ao realismo. Bastante suave e estável, oscilando com algum alongamento.
- $\eta = 10^{-6}$ e $\xi = 10^{-5}$ *a* 10^{-4}
  Alonga-se bastante devido aos valores baixos dos parâmetros, porém, ainda suave e com certo grau de realismo.

Outras Combinações de Valores :

Além das combinações de valores testadas anteriormente, algumas outras configurações experimentadas foram :

- $\eta = 10^{-5}$ *a* 10^{-3} e $\xi = 0$
  Alonga-se demais para $\eta = 10^{-5}$. À medida que este parâmetro aumenta, torna-se um pouco mais rígido e realista. A superfície chega a oscilar, devido à força restauradora expressiva quando $\eta = 10^{-3}$. O efeito observado quando $\eta = 10^{-6}$ e $\xi = 10^{-7}$ não aparece aqui por não haver resistência alguma à curvatura.
- $\eta = 10^{-3}$ e $\xi = 10^{-3}$
  Comportamento bastante realístico, com pouco alongamento. As oscilaçoes são de amplitude baixa e parecem ser também mais rápidas, devido à maior tensão.
- $\eta = 0$ *a* 10^{-3} e $\xi = 10^{-2}$
  Atingimos uma faixa de instabilidade. Quando a resistência à curvatura torna-se muito alta ($\xi > 10^{-2}$) e a superfície ainda apresenta uma certa facilidade para alongar-se ($\eta < 10^{-3}$), chegamos a um resultado incompatível. Observa-se que, dadas as restrições de bordas fixas do *script*, não se pode ter um alongamento sem que haja também uma alteração na curvatura da superfície.
- $\eta = 0$ e $\xi = 10^{-4}$
  A superfície ainda tem aparência suave, porém encontra-se no limiar de um comportamento estável. Para se obter mais realismo é preciso aumentar os valores dos parâmetros.

Valores Negativos :

Alguns valores menores que zero (*valores negativos*) também foram testados. Sobre esta faixa de valores não-usuais, podemos dizer que o parâmetro η é mais tolerante que ξ. Com η negativo pode-se ainda produzir resultados com algum grau de realismo. Alguns quadros são gerados para valores tão pequenos quanto -10^{-3}, enquanto que para ξ os valores não podem exceder -10^{-6}.

Análise dos Resultados

Conforme esperado, foi constatado que, dada uma combinação de parâmetros que gera resultados instáveis, pode-se voltar à faixa de estabilidade alterando a massa do objeto. Por exemplo, na configuração do *script* Malha no experimento apresentado na seção 6.4.3, onde $\eta = 0.1$ e $\xi = 10^{-7}$, ao fazermos $\mu = 100$, voltamos à estabilidade.

Estudando mais cuidadosamente esses efeitos, verificamos que quando o objeto deformável se encontra em um estado de contração, devido a forças externas atuando sobre ele, as diferenças entre os elementos dos tensores G_{ij} e B_{ij} e suas respectivas formas iniciais G^0_{ij} e B^0_{ij} tornam-se negativas. As contribuições negativas de α e β são tanto maiores quanto forem os valores de nossos parâmetros η e ξ. No cálculo da energia elástica internamente armazenada $\varepsilon(\mathbf{r})$, essas contribuições negativas geram uma força oposta à força externa, no sentido de tentar expandir o objeto novamente. Conforme já discutido na seção 6.2, se os parâmetros η e ξ forem colocados muito grandes, essa força de oposição pode ser grande demais e tornar-se uma resposta inconsistente para a força externa que a gerou, trazendo instabilidade ao sistema. Recorrendo à analogia com um sistema massa-mola, como na seção 6.1, é como se tivéssemos uma mola que passasse a produzir uma força de resistência de intensidade maior que a força externa que a deforma, o que gera uma situação de desequilíbrio. Verificamos ainda que o aumento da massa, no primeiro termo da equação (3.1), vem a compensar os efeitos de uma contribuição muito negativa das componentes internas elásticas, no terceiro termo. Isto pode trazer o nosso sistema de volta à estabilidade.

Simulações Equivalentes

De acordo com o procedimento proposto na seção 6.3, ao multiplicarmos os termos da equação (3.1) por algum fator, encontramos um outro sistema que, do ponto de vista numérico, é mais conveniente que o original. Por permitir maior flexibilidade, o novo sistema pode ainda reproduzir com bastante fidelidade os resultados visuais do sistema original. É o que ilustramos nesta seção.

Listamos a seguir um caso de combinações de parâmetros extraídas de seus *scripts*, na forma natural e na forma escalonada, acompanhadas de alguns comentários. A ordem na qual os resultados são mostrados descreve o caminho que usamos no experimento para encontrar um procedimento de escalonamento. Os *scripts* usados descrevem uma superfície com comportamento de tecido, o qual cai, devido à ação da força gravitacional, cobrindo uma mesa de tampo quadrado.

- Forma escalonada: Foi o primeiro resultado expressivo, encontrado de forma puramente empírica.

  Observa-se que as grandezas físicas se apresentam com valores pouco intuitivos. O parâmetro ξ pôde assumir um valor razoavelmente grande se comparado com alguns valores utilizados no Teste de Variação de Parâmetros.

  ```
  grid       : 10 10
  aceleracao : x = 0.0 y = -1.5 z = 0.0
  velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
  eta        : 0.1 0.0 0.0 0.1
  qsi        : 0.00001 0.0 0.0 0.00001
  massa  = 500.0
  gama   = 20.0
  ```

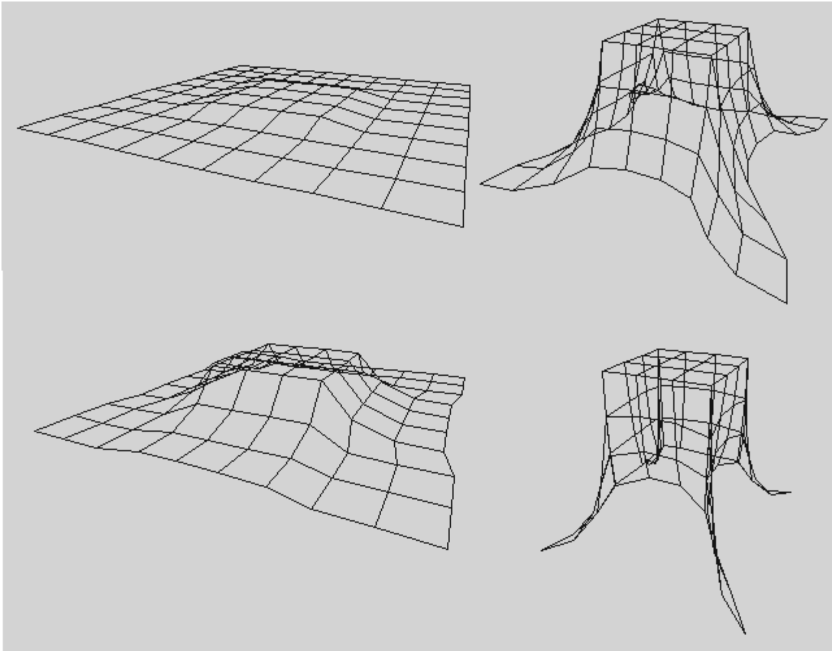

Figura 6.3: Tecido cobrindo uma mesa.

```
obj_deformavel : plano 6.0 6.0
```

A Figura 6.3 ilustra os quadros 10, 25, 45 e 55 gerados por esse *script*.

- Forma natural: Tentamos aqui escalonar os valores para uma faixa mais intuitiva, procurando manter um comportamento dinâmico semelhante ao do caso anterior. Nota-se que, ao atribuírmos valores menores aos parâmetros do modelo, o valor de ξ foi forçado a zero.

  Observa-se que, como havíamos escolhido trabalhar com dimensões de 6mx6m para a toalha, o valor da massa na forma natural resultou em 27Kg. Se houvéssemos escolhido dimensões mais realísticas de uma toalha, como 1mx1m, sua área seria então 36 vezes menor que a deste exemplo. Sendo a massa proporcional à área da superfície, teríamos uma massa de: $27/36 = 0.75Kg$, refletindo assim em um valor mais realístico também para expressar a massa da toalha no mundo real.

  Apenas o valor da gravidade foi reduzido demais, com relação ao valor do mundo real. Uma justificativa para isso seria evitar o efeito de alongamento que ocorre devido ao transiente nos primeiros quadros, além de compensar forças internas de outras naturezas que mantenham a superfície coesa, as quais foram ignoradas neste modelo de elasticidade.

```
grid        : 10 10
```

```
aceleracao : x = 0.0 y = -2.0 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 0.01 0.0 0.0 0.01
qsi        : 0.00000 0.0 0.0 0.00000
massa  = 27.0
gama   = 5.0
obj_deformavel : plano 6.0 6.0
```

Capítulo 7

Simulações

Este capítulo demonstra a versatilidade do modelo implementado, apresentando uma série de simulações.

7.1 Manta

Com os parâmetros mostrados no trecho do *script* Manta abaixo, tentamos simular o caimento de uma manta que se arrasta pelo chão. Os quadros são gerados a partir de um objeto inicial com o formato de um tronco de cone. Foram fixados os pontos do bordo superior, enquanto que, no bordo inferior, foram aplicadas forças horizontais no sentido de abrir a manta. Na Figura 7.1 podemos observar um quadro gerado por este *script*.

A resistência ao alongamento é bastante alta e a resistência à curvatura é colocada como nula. Observou-se que, por estarmos usando valores pequenos, os valores de ξ não influem tanto no comportamento do objeto. Nominalmente, estes valores podem variar de 0 a 0.001 sem produzir mudanças significativas. Para ξ na faixa de 0.01, por outro lado, os quadros gerados já não apresentam realismo, como foi comentado na seção 6.3.

```
aceleracao : x = 0.0 y = -1.5 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 0.1 0.0 0.0 0.1
qsi        : 0.000000 0.0 0.0 0.000000
massa  = 1.5
gama   = 5.0
obj_deformavel : cone 0.3 0.6 2.0
```

7.2 Bandeira

Neste exemplo (*script* Bandeira), simulamos o movimento de uma bandeira ao vento. Prendemos os dois vértices que a amarrariam ao mastro e, na

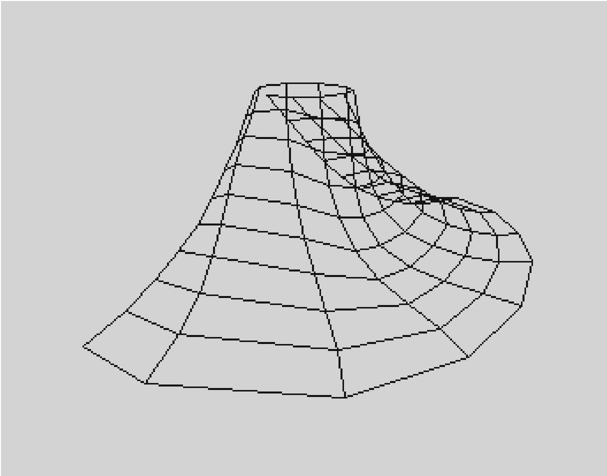

Figura 7.1: Manta arrastando-se ao chão.

outra extremidade, adicionamos restrições do tipo mola em todos os pontos da borda para fazer com que haja um comportamento oscilante. Utilizando valores altos para μ e γ podemos fazer com que os valores de η chegem à ordem de uma unidade. Para favorecer aos efeitos oscilantes, anulamos a resistência à curvatura fazendo $\xi = 0$. A Figura 7.2 mostra um quadro produzido por este *script*.

```
aceleracao : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 1.0 0.0 0.0 1.0
qsi        : 0.000 0.0 0.0 0.000
massa  = 2000.0
gama   = 50.0
obj_deformavel : plano 6.0 6.0
```

7.3 Cortina

Neste *script*, simulamos uma cortina que está sendo recolhida. Os parâmetros foram escolhidos para simular um movimento esvoaçante.

- Forma natural: Resultado visualmente satisfatório de uma cortina sendo fechada. A menos da gravidade, as grandezas estão bastante condizentes com as unidades SI. Os valores são pequenos e a resistência à curvatura ξ foi forçada a zero.

```
grid       : 11 11
```

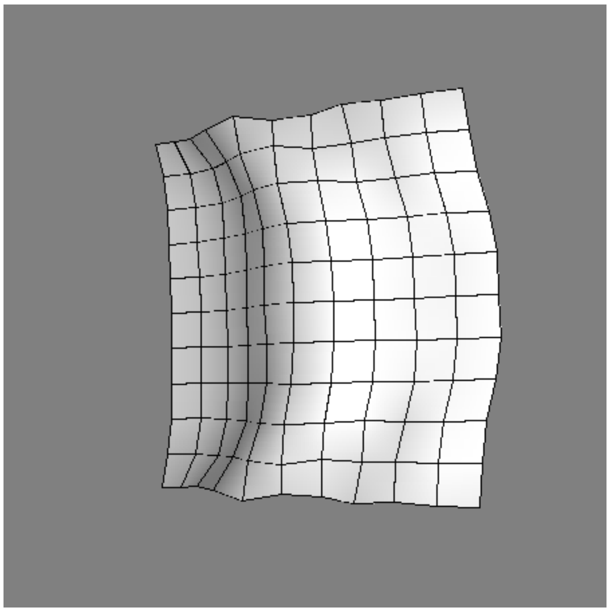

Figura 7.2: Comportamento ondulante de uma bandeira ao vento.

```
aceleracao : x = 0.0 y = -2.0 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 0.01 0.0 0.0 0.01
qsi        : 0.000000 0.0 0.0 0.000000
massa  = 3.0
gama   = 5.0
obj_deformavel : plano 2.0 2.0
```

A Figura 7.3 ilustra uma vista de perfil.

- Forma escalonada: Baseando-se nos fatores de conversão usados para escalonar o *script* da toalha de mesa apresentado na seção 6.4.3, realizamos o escalonamento dos valores para a cortina descrita acima. Mais uma vez, η e ξ puderam assumir valores maiores e a superfície adquiriu um comportamento mais próximo de tecido. A Figura 7.4 ilustra este resultado.

```
grid       : 11 11
aceleracao : x = 0.0 y = -1.5 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 0.1 0.0 0.0 0.1
qsi        : 0.000001 0.0 0.0 0.000001
massa  = 50.0
gama   = 80.0
```

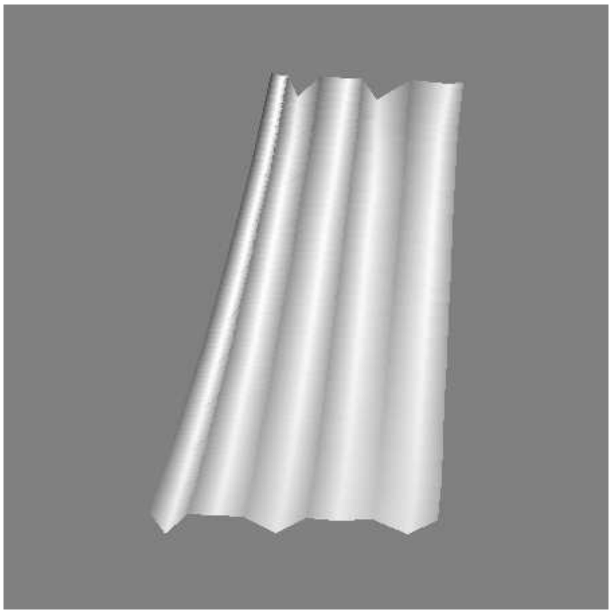

Figura 7.3: Cortina, forma natural.

```
obj_deformavel : plano 2.0 2.0
```

7.4 Papel

Aumentando um pouco mais o valor de ξ na forma escalonada do *script* Cortina, podemos passar do comportamento de tecido da Figura 7.4 para produzir um comportamento semelhante ao de uma folha de papel sendo amassada, como mostra a Figura 7.5. Esse efeito não poderia ser conseguido com os valores da forma natural sem incorrermos em uma situação de instabilidade numérica.

```
grid       : 11 11
aceleracao : x = 0.0 y = -1.5 z = 0.0
velocidade : x = 0.0 y = 0.0 z = 0.0
eta        : 0.1 0.0 0.0 0.1
qsi        : 0.00001 0.0 0.0 0.00001
massa  = 50.0
gama   = 80.0
obj_deformavel : plano 2.0 2.0
```

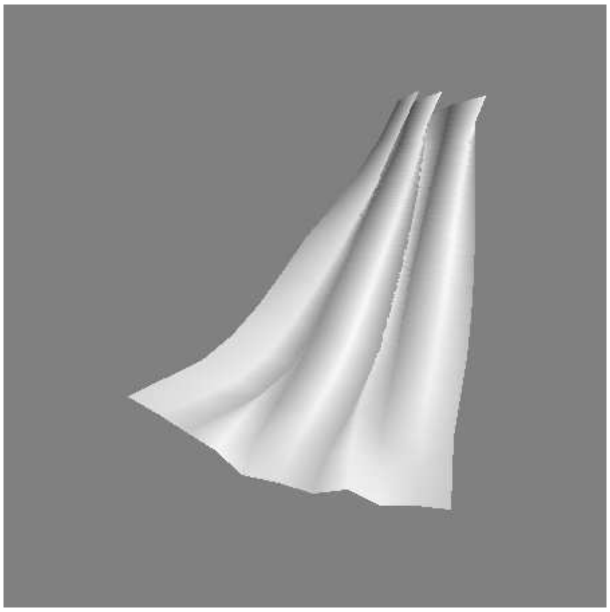

Figura 7.4: Cortina, forma escalonada.

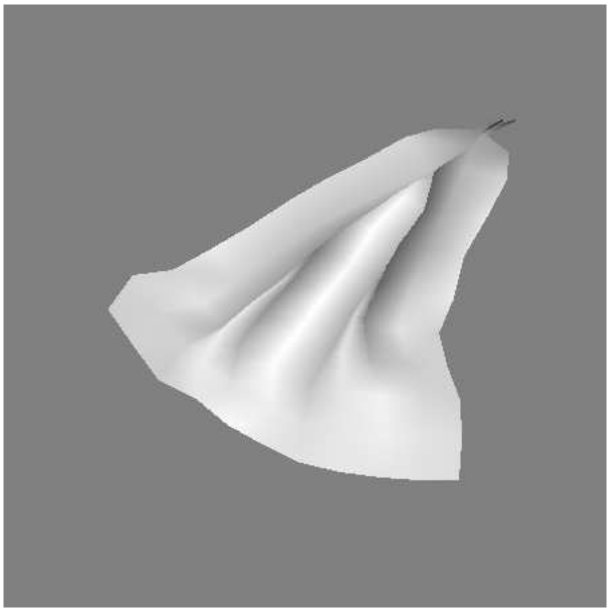

Figura 7.5: Folha de papel sendo amassada.

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho implementamos o modelo proposto por Terzopoulos et al.[6] e partimos de elementos de Geometria Diferecial para uma análise mais refinada deste modelo para a simulação de movimentos de superfícies deformáveis.

Este estudo envolveu a compreensão dos princípios sobre os quais se basearam o modelo, a introdução de um teste de compatibilidade entre alongamento e curvatura para verificar a verossimilhança do movimento e uma leitura geométrica dos parâmetros envolvidos neste modelo de elasticidade.

Em linhas gerais, podemos concluir que o modelo fornece, em casos especiais, uma simulação bastante realista e possibilita a criação de uma interface intuitiva.

8.1 Modelo Físico

Conforme a demonstração incluída no apêndice A, a equação (3.4) utilizada para modelar a aparência de superfícies deformáveis é uma aproximação bastante grosseira do modelo físico. No lugar de computar a variação dos vetores normais $\mathbf{n}$ entre pontos vizinhos, são calculadas as derivadas segundas do vetor posição $\mathbf{r}$.

Por um lado, esta aproximação simplificou a implementação do modelo, conseguindo reduzir um sistema de equações diferenciais em um sistema de equações lineares. Por outro lado, acreditamos que um dos fatores da "falta de sensibilidade" do parâmetro ξ pode ser decorrente desta aproximação.

Como uma sugestão para continuidade deste trabalho é implementar o modelo em função de ambas variávies, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{r}$, e comparar os resultados com o modelo corrente.

8.2 Implementação

Embora a nossa implementação se baseou em [6], introduzimos algumas melhorias para tratar as seguintes situações:

- restrições de movimento,
- descontinuidades no espaço paramétrico,
- colisões, e
- teste de compatibilidade.

Vimos que para uma forma eficiente de tratar as descontinuidades no espaço paramétrico seria armazenar as informações de vizinhança na estrutura de dados. No nosso caso, pretedmos usar o módulo de dados TDM[20] para gerenciar essas informações.

8.3 Teste de Compatibilidade

O Teste de Compatibilidade, da maneira como foi implementado, fornece resultados coerentes para o caso de superfícies suaves.

Em exemplos mais gerais, onde há variações bruscas, por problemas numéricos na aproximação pela malha discretizada, temos números bastante semelhantes para casos que são adversos, o que torna muito dificil inferir qualquer coisa sobre as superfícies a partir dos resultados numéricos das equações computadas. Uma alternativa para esta questão seria trabalhar com malhas mais refinadas. Este aumento de resolução, entretanto, implicaria em maior custo computacional.

8.4 Teste de Limiar Negativo

Devido ao fato do Teste de Limiar Negativo se basear em aspectos específicos do modelo de elasticidade em questão, observa-se um bom desempenho na distinção de padrões não-realísticos. Entretanto, o teste apresenta, obviamente, a desvantagem de ter seu universo de aplicação limitado a superfícies geradas segundo este modelo, o que o coloca em posição desfavorável quando comparado ao Teste de Compatibilidade.

Sob um outro ponto de vista, o Teste de Limiar, além de decidir sobre o realismo das imagens, sugere um critério para implementar situações de ruptura nas superfícies. Tal implementação poderia resultar em efeitos visuais muito interessantes, além de se constituir em uma maneira bastante natural de evitarmos as situações de instabilidade.

8.5 Procedimento para Escolha dos Parâmetros

A normalização (ou escalonamento) traz resultados bem expressivos. Usamos valores semalhantes aos do mundo real para a nossa conveniência. Estes valores servem como uma boa aproximação inicial. Em seguida, aumentamos consideravelmente as grandezas, mantendo as dimensões do objeto intactas. Conseguimos com isso mais estabilidade e controlabilidade. O ajuste fino dos parâmetros é feito com as grandezas já escalonadas.

Em outras palavras, o custo do escalonamento é o preço a ser pago por uma melhor operacionalidade dos parâmetros η e ξ. Na verdade, os valores de η são, em regras gerais, razoavelmente controláveis. O nosso problema se encontra centrado principalmente em melhorar os efeitos de curvatura, através de ξ.

Vários testes ainda devem ser realizados para delimitar a validade e a aplicabilidade do procedimento de escalonamento. Todavia, os resultados obtidos até agora nos levam a crer que o escalonamento é a forma mais adequada de realizar as computações, conservando ainda o realismo e o caráter intuitivo, vantagens preciosas conseguidas graças a princípios da Geometria Diferencial embutidos neste modelo de elasticidade.

Apêndice A

Equação de Deformação

Vimos na seção 3.2 que a equação de Euler-Ostrogradsky (3.5) do funcional dado pela equação (3.4) tem o seguinte aspecto

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial a_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2 a_2}}\right) = 0, \quad \text{(A.1)}$$

onde F denota a expressão

$$-\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + [\sum_{i,j}(\zeta_{ij}(G_{ij} - G_{ij}^0)^2 + \varsigma_{ij}(B_{ij} - B_{ij}^0)^2].$$

Derivando F em função das variáveis, obtemos os seguintes termos:

- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = -e(\mathbf{r})$;
- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = \sum_{i,j=1}^{2} 2\zeta_{ij}(G_{ij} - G_{ij}^0)\frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} + R_{\mathbf{r}_{a1}}$, onde $R_{\mathbf{r}_{a1}}$ é o termo residual correspondente à derivada parcial das parcelas B_{ij} em função de $\mathbf{r}_{a_1}$ (ver a equação (2.7)).
  Como
  - $\frac{\partial G_{11}}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_1}$;
  - $\frac{\partial G_{12}}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_2}$;
  - $\frac{\partial G_{21}}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_2}$; e
  - $\frac{\partial G_{22}}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = 0$,

  verifica-se a seguinte igualdade

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1}} = \sum_{j=1}^{2} 4\zeta_{1j}(G_{1j} - G_{1j}^0)\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j}$$

- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = \sum_{i,j=1}^{2} 2\zeta_{ij}(G_{ij} - G^0_{ij})\frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} + R_{\mathbf{r}_{a2}}$, onde $R_{\mathbf{r}_{a2}}$ é o termo residual correspondente à derivada parcial das parcelas $B_i j$ em função de $\mathbf{r}_{a_2}$ (ver a equação 2.7).
  Similarmente,
  - $\frac{\partial G_{11}}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = 0$;
  - $\frac{\partial G_{12}}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_1}$;
  - $\frac{\partial G_{21}}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_1}$; e
  - $\frac{\partial G_{22}}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_2}$.

  Com isso,
  $$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2}} = \sum_{j=1}^{2} 4\zeta_{2j}(G_{2j} - G^0_{2j})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j}.$$

- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = \sum_{i,j=1}^{2} 2\varsigma_{ij}(B_{ij} - B^0_{ij})\frac{\partial B_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}}$.
  Considerando que
  - $\frac{\partial B_{11}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = \mathbf{n}$;
  - $\frac{\partial B_{12}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = \frac{\partial B_{21}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = \frac{\partial B_{22}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = 0$,

  então
  $$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_1}} = 2\varsigma_{ij}(B_{ij} - B^0_{ij})\mathbf{n}$$

- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2 a_2}} = \sum_{i,j=1}^{2} 2\varsigma_{ij}(B_{ij} - B^0_{ij})\frac{\partial B_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{a_2 a_2}}$.
  De forma análoga, temos
  $$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_2 a_2}} = 2\varsigma_{22}(B_{22} - B^0_{22})\mathbf{n}$$

- $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_2}} = \sum_{i,j=1}^{2} 2\varsigma_{ij}(B_{ij} - B^0_{ij})\frac{\partial B_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_2}}$.
  Desenvolvendo, chega-se a
  $$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_{a_1 a_2}} = 2\varsigma_{12}(B_{12} - B^0_{12})\mathbf{n} + 2\varsigma_{21}(B_{21} - B^0_{21})\mathbf{n}$$

Substituindo estes termos na equação (A.1), obteremos

$$\begin{aligned}
-\mathbf{e}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial a_1}(\sum_{j=1}^{2} 4\zeta_{1j}(G_{1j} - G^0_{1j})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j} + R_{\mathbf{r}_{a1}}) \\
-\frac{\partial}{\partial a_2}(\sum_{j=1}^{2} 4\zeta_{2j}(G_{2j} - G^0_{2j})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j} + R_{\mathbf{r}_{a2}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_1}\left(2\varsigma_{11}(B_{11}-B^0_{11})\mathbf{n}\right)+\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2}\left(2\varsigma_{12}(B_{12}-B^0_{12})\mathbf{n}\right) \\
&+\frac{\partial^2}{\partial a_2 \partial a_1}\left(2\varsigma_{21}(B_{21}-B^0_{21})\mathbf{n}\right)+\frac{\partial^2}{\partial a_2 \partial a_2}\left(2\varsigma_{22}(B_{22}-B^0_{22})\mathbf{n}\right) \quad = \quad 0.
\end{aligned}
$$

Desprezando os termos residuais $R_{\mathbf{r}_{a1}}$ e $R_{\mathbf{r}_{a1}}$ e utilizando operador somatória, chega-se à seguinte expressão

$$
\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_j}\right)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}(\beta_{ij}\mathbf{n})\ , \tag{A.2}
$$

onde

$$
\alpha_{ij} \quad = \quad 4\zeta_{ij}(G_{ij}-G^0_{ij}) = \eta_{ij}(G_{ij}-G^0_{ij}) \tag{A.3}
$$

$$
\beta_{ij} \quad = \quad 2\varsigma_{ij}(B_{ij}-B^0_{ij}) = \xi_{ij}(B_{ij}-B^0_{ij}). \tag{A.4}
$$

Provavelmente, para ter uma expressão mais "arrumada" em função do vetor-posição $\mathbf{r}$, de forma a obter um sistema de equações lineares só em função desta variável após a discretização (seção 4.1), Terzopoulos et al.[6] fizeram a seguinte aproximação grosseira

$$
\mathbf{n} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial a_1 \partial a_2} \quad ,
$$

considerando que em cada ponto da superfície, o eixo z coincide com o vetor normal $\mathbf{n}$ e a $\mathbf{r}$ seja do aspecto $(x, y, z(x, y))$.

Apêndice B

Cálculo de Alfa e Beta

Aplicando os operadores de diferença (seção 2.2) na equação (4.1) obtém-se

$$\mathbf{e}_{ij}[m,n] = -D_1^-(\mathbf{p}_{11})[m,n] - D_1^-(\mathbf{p}_{12})[m,n] -$$
$$D_2^-(\mathbf{p}_{21})[m,n] - D_2^-(\mathbf{p}_{22})[m,n] + \sum_{i,j}^{2} D_{ij}^{(-)}(\mathbf{q})[m,n] \tag{B.1}$$

com

$$-D_1^-(\mathbf{p_{11}})[m,n] = (\mathbf{p_{11}}[m,n] - \mathbf{p_{11}}[m-1,n])/h_1$$

$$-D_1^-(\mathbf{p_{12}})[m,n] = (\mathbf{p_{12}}[m,n] - \mathbf{p_{12}}[m-1,n])/h_1$$

$$-D_2^-(\mathbf{p_{21}})[m,n] = (\mathbf{p_{21}}[m,n] - \mathbf{p_{21}}[m,n-1])/h_2$$

$$-D_2^-(\mathbf{p_{22}})[m,n] = (\mathbf{p_{22}}[m,n] - \mathbf{p_{22}}[m,n-1])/h_2.$$

Substituindo

$$\mathbf{p_{ij}} = \alpha_{ij}[m,n]D_j^+(\mathbf{r})[m,n]$$

nas equações acima, temos

$$\begin{aligned} -D_1^-(\mathbf{p_{11}})[m,n] &= (\alpha_{11}[m-1,n]D_1^+(\mathbf{r})[m-1,n] - \alpha_{11}[m,n]D_1^+(\mathbf{r})[m,n])/h_1 \\ &= (\alpha_{11}[m-1,n](\mathbf{r}[m,n] - \mathbf{r}[m-1,n])/h_1 \\ &\quad -\alpha_{11}[m,n](\mathbf{r}[m+1,n] - \mathbf{r}[m,n])/h_1)/h_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -D_1^-(\mathbf{p_{12}})[m,n] &= (\alpha_{12}[m-1,n]D_2^+(\mathbf{r})[m-1,n] - \alpha_{12}[m,n]D_2^+(\mathbf{r})[m,n])/h_1 \\ &= (\alpha_{12}[m-1,n](\mathbf{r}[m-1,n+1] - \mathbf{r}[m-1,n])/h_2 \\ &\quad -\alpha_{12}[m,n](\mathbf{r}[m,n+1] - \mathbf{r}[m,n])/h_2)/h_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D_2^-(\mathbf{p_{21}})[m,n] &= (\alpha_{21}[m,n-1]D_1^+(\mathbf{r})[m,n-1] - \alpha_{21}[m,n]D_1^+(\mathbf{r})[m,n])/h_2 \\
&= (\alpha_{21}[m,n-1](\mathbf{r}[m+1,n-1] - \mathbf{r}[m,n-1])/h_1 \\
&\quad -\alpha_{21}[m,n](\mathbf{r}[m+1,n] - \mathbf{r}[m,n])/h_1)/h_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D_2^-(\mathbf{p_{22}})[m,n] &= (\alpha_{22}[m,n-1]D_2^+(\mathbf{r})[m,n-1] - \alpha_{22}[m,n]D_2^+(\mathbf{r})[m,n])/h_2 \\
&= (\alpha_{22}[m,n-1](\mathbf{r}[m,n] - \mathbf{r}[m,n-1])/h_2 \\
&\quad -\alpha_{22}[m,n](\mathbf{r}[m,n+1] - \mathbf{r}[m,n])/h_2)/h_2.
\end{aligned}$$

O quinto termo da equação (B.1) pode ser desmembrada em

$$D_{11}(\mathbf{q_{11}})[m,n] + D_{12}^-(\mathbf{q_{12}})[m,n] + D_{21}^-(\mathbf{q_{21}})[m,n] + D_{22}(\mathbf{q_{22}})[m,n],$$

onde

$$D_{11}(\mathbf{q_{11}})[m,n] = D_1^-(D_1^+(\mathbf{q_{11}}))[m,n] = (\mathbf{q_{11}}[m+1,n] - 2\mathbf{q_{11}}[m,n] + \mathbf{q_{11}}[m-1,n])/h_1^2,$$

$$\begin{aligned}
D_{12}(\mathbf{q_{12}})[m,n] &= D_1^-(D_2^-(\mathbf{q_{12}}))[m,n] \\
&= (\mathbf{q_{12}}[m,n] - \mathbf{q_{12}}[m,n-1] - \mathbf{q_{12}}[m-1,n] + \mathbf{q_{12}}[m-1,n-1])/h_1h_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12}(\mathbf{q_{21}})[m,n] &= D_1^-(D_2^-(\mathbf{q_{21}}))[m,n] \\
&= (\mathbf{q_{21}}[m,n] - \mathbf{q_{21}}[m,n-1] - \mathbf{q_{21}}[m-1,n] + \mathbf{q_{21}}[m-1,n-1])/h_1h_2, e
\end{aligned}$$

$$D_{22}(\mathbf{q_{22}})[m,n] = D_2^-(D_2^+(\mathbf{q_{22}}))[m,n] = (\mathbf{q_{22}}[m,n+1] - 2\mathbf{q_{22}}[m,n] + \mathbf{q_{22}}[m,n-1])/h_2^2.$$

Sabendo que

$$\mathbf{q_{ij}} = \beta_{ij}[m,n]D_{ij}^{(+)}(\mathbf{r})[m,n]$$

e

$$-D_1^-(\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{11}})[m,n] = (\alpha_{11}[m-1,n]D_1^+(\mathbf{r})[m-1,n] - \alpha_{11}[m,n]D_1^+(\mathbf{r})[m,n])/h_1,$$

então

$$\begin{aligned}
D_{11}(\mathbf{q_{11}})[m,n] &= (\beta_{11}[m+1,n]\{\mathbf{r}[m+2,n] - 2\mathbf{r}[m+1,n] + \mathbf{r}[m,n]\}/h_1^2 \\
&\quad -2\beta_{11}[m,n]\{\mathbf{r}[m+1,n] - 2\mathbf{r}[m,n] + \mathbf{r}[m-1,n]\}/h_1^2 \\
&\quad +\beta_{11}[m-1,n]\{\mathbf{r}[m,n] - 2\mathbf{r}[m-1,n] + \mathbf{r}[m-2,n]\}/h_1^2)/h_1^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_{12}^{+}(\mathbf{q_{12}})[m,n] \quad = \quad & (\beta_{12}[m,n]\{\mathbf{r}[m+1,n+1]-\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n]\}/h_1h_2 \\
& -\beta_{12}[m,n-1]\{\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m+1,n-1]-\mathbf{r}[m,n]\}+\mathbf{r}[m,n-1]\}/h_1h_2 \\
& -\beta_{12}[m-1,n]\{\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m-1,n+1]+\mathbf{r}[m-1,n]\}/h_1h_2 \\
& +\beta_{12}[m-1,n-1]\{\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m,n-1]-\mathbf{r}[m-1,n]+\mathbf{r}[m-1,n-1]\}/h_1h_2)h_1h_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{21}^{+}(\mathbf{q_{21}})[m,n] \quad = \quad & (\beta_{21}[m,n]\{\mathbf{r}[m+1,n+1]-\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n]\}/h_1h_2 \\
& -\beta_{21}[m,n-1]\{\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m+1,n-1]-\mathbf{r}[m,n]\}+\mathbf{r}[m,n-1]\}/h_1h_2 \\
& -\beta_{21}[m-1,n]\{\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m-1,n+1]+\mathbf{r}[m-1,n]\}/h_1h_2 \\
& +\beta_{21}[m-1,n-1]\{\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m,n-1]-\mathbf{r}[m-1,n]+\mathbf{r}[m-1,n-1]\}/h_1h_2)h_1h_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{22}(\mathbf{q_{22}})[m,n] \quad = \quad & (\beta_{22}[m,n+1]\{\mathbf{r}[M,n+2]-2\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n]\}/h_2^2 \\
& -2\beta_{22}[m,n]\{\mathbf{r}[m,n+1]-2\mathbf{r}[m,n]+\mathbf{r}[m,n-1]\}/h_2^2 \\
& +\beta_{22}[m,n-1]\{\mathbf{r}[m,n]-2\mathbf{r}[m,n-1]+\mathbf{r}[m,n-2]\}/h_2^2)/h_2^2
\end{aligned}
$$

Substituindo estes termos na equação (B.1) chega-se à seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{ij}[m,n] \quad = \quad & \frac{\alpha_{11}[m-1,n]}{h_1^2}(\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m-1,n]) - \frac{\alpha_{11}[m,n]}{h_1^2}(\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n]) \\
& +\frac{\alpha_{12}[m-1,n]}{h_1h_2}(\mathbf{r}[m-1,n+1]-\mathbf{r}[m-1,n]) - \frac{\alpha_{12}[m,n]}{h_1h_2}(\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]) \\
& +\frac{\alpha_{21}[m,n-1]}{h_1h_2}(\mathbf{r}[m+1,n-1]-\mathbf{r}[m,n-1]) - \frac{\alpha_{21}[m,n]}{h_1h_2}(\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n]) \\
& +\frac{\alpha_{22}[m,n-1]}{h_2^2}(\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m,n-1]) - \frac{\alpha_{22}[m,n]}{h_2^2}(\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]) \\
& +\frac{\beta_{11}[m+1,n]}{h_1^4}(\mathbf{r}[m+2,n]-2\mathbf{r}[m+1,n]+\mathbf{r}[m,n]) \\
& -2\frac{\beta_{11}[m,n]}{h_1^4}(\mathbf{r}[m+1,n]-2\mathbf{r}[m,n]+\mathbf{r}[m-1,n]) \\
& +\frac{\beta_{11}[m-1,n]}{h_1^4}(\mathbf{r}[m,n]-2\mathbf{r}[m-1,n]+\mathbf{r}[m-2,n]) \\
& +\frac{\beta_{12}[m,n]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m+1,n+1]-\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n]) \\
& -\frac{\beta_{12}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m+1,n-1]-\mathbf{r}[m,n]\}+\mathbf{r}[m,n-1]) \\
& -\frac{\beta_{12}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m-1,n+1]+\mathbf{r}[m-1,n])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta_{12}[m-1,n-1]}{h_1^2h_1^2}(\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m,n-1]-\mathbf{r}[m-1,n]+\mathbf{r}[m-1,n-1])\\
&+\frac{\beta_{21}[m,n]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m+1,n+1]-\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n])\\
&-\frac{\beta_{21}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m+1,n]-\mathbf{r}[m+1,n-1]-\mathbf{r}[m,n]\}+\mathbf{r}[m,n-1])\\
&-\frac{\beta_{21}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}(\mathbf{r}[m,n+1]-\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m-1,n+1]+\mathbf{r}[m-1,n])\\
&+\frac{\beta_{21}[m-1,n-1]}{h_1^2h_1^2}(\mathbf{r}[m,n]-\mathbf{r}[m,n-1]-\mathbf{r}[m-1,n]+\mathbf{r}[m-1,n-1])\\
&+\frac{\beta_{22}[m,n+1]}{h_2^4}(\mathbf{r}[m,n+2]-2\mathbf{r}[m,n+1]+\mathbf{r}[m,n])\\
&-2\frac{\beta_{22}[m,n]}{h_2^4}(\mathbf{r}[m,n+1]-2\mathbf{r}[m,n]+\mathbf{r}[m,n-1])\\
&+\frac{\beta_{22}[m,n-1]}{h_2^4}(\mathbf{r}[m,n]-2\mathbf{r}[m,n-1]+\mathbf{r}[m,n-2]\})
\end{aligned}
$$

Remanejando os termos de forma que o vetor $\mathbf{r}$ fique em evidência consegue-se obter

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{ij}[m,n] \quad = \quad & \mathbf{r}[m,n]\left(\frac{\alpha_{11}[m-1,n]}{h_1^2}-\frac{\alpha_{11}[m,n]}{h_1^2}+\frac{\alpha_{12}[m,n]}{h_1h_2}+\frac{\alpha_{21}[m,n]}{h_1h_2}\right.\\
&+\frac{\alpha_{22}[m,n-1]}{h_2^2}+\frac{\alpha_{22}[m,n]}{h_2^2}+\frac{\beta_{11}[m+1,n]}{h_1^4}+4\frac{\beta_{11}[m,n]}{h_1^4}\\
&+\frac{\beta_{11}[m-1,n]}{h_1^4}+\frac{\beta_{12}[m,n]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{12}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{12}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}\\
&+\frac{\beta_{12}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m,n]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}\\
&\left.+\frac{\beta_{21}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{22}[m,n+1]}{h_2^4}+4\frac{\beta_{22}[m,n]}{h_2^4}-2\frac{\beta_{22}[m,n-1]}{h_2^4}\right)\\
&+\mathbf{r}[m-1,n]\left(-\frac{\alpha_{11}[m-1,n]}{h_1^2}--\frac{\alpha_{12}[m-1,n]}{h_1h_2}-2\frac{\beta_{11}[m,n]}{h_1^4}\right.\\
&-2\frac{\beta_{11}[m-1,n]}{h_1^4}-\frac{\beta_{12}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}\\
&\left.-\frac{\beta_{21}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{21}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m-1,n+1]\left(\frac{\alpha_{12}[m-1,n]}{h_1h_2}+\frac{\beta_{12}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m,n+1]\left(-\frac{\alpha_{12}[m,n]}{h_1h_2}-\frac{\alpha_{22}[m,n]}{h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}\right.\\
&\left.-\frac{\beta_{21}[m,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{21}[m-1,n]}{h_1^2h_2^2}-2\frac{\beta_{22}[m,n+1]}{h_2^4}-2\frac{\beta_{22}[m,n]}{h_2^4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbf{r}[m+1,n-1]\left(\frac{\alpha_{21}[m,n-1]}{h_1h_2}+\frac{\beta_{12}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m,n-1]\left(-\frac{\alpha_{21}[m,n-1]}{h_1h_2}-\frac{\alpha_{22}[m,n-1]}{h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}\right.\\
&\left.-\frac{\beta_{21}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{21}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}-2\frac{\beta_{22}[m,n]}{h_2^4}-2\frac{\beta_{22}[m,n-1]}{h_2^4}\right)\\
&+\mathbf{r}[m+2,n]\left(\frac{\beta_{11}[m+1,n]}{h_1^4}\right)\\
&+\mathbf{r}[m+1,n]\left(-\frac{\alpha_{11}[m,n]}{h_1^2}-\frac{\alpha_{21}[m,n]}{h_1h_2}-2\frac{\beta_{11}[m+1,n]}{h_1^4}-2\frac{\beta_{11}[m,n]}{h_1^4}\right.\\
&\left.-\frac{\beta_{12}[m,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{21}[m,n]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{12}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}-\frac{\beta_{21}[m,n-1]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m-2,n]\left(\frac{\beta_{11}[m-1,n]}{h_1^4}\right)\\
&+\mathbf{r}[m+1,n+1]\left(\frac{\beta_{12}[m,n]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m,n]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m-1,n-1]\left(\frac{\beta_{12}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}+\frac{\beta_{21}[m-1,n-1]}{h_1^2h_2^2}\right)\\
&+\mathbf{r}[m,n+2]\left(\frac{\beta_{22}[m,n+1]}{h_2^4}\right)\\
&+\mathbf{r}[m,n-2]\left(\frac{\beta_{22}[m,n-1]}{h_2^4}\right),
\end{aligned}
$$

cujo formato matricial é dado pela equação (4.5).

Analisando esta equação podemos montar o seguinte esquema da vizinhança de um ponto $\mathbf{r}[m,n]$ utilizada para computar a "energia" nele acumulada em cada instante

$$
\begin{bmatrix}
 & & \mathbf{r}[m-2,n] & & \\
 & \mathbf{r}[m-1,n-1] & \mathbf{r}[m-1,n] & \mathbf{r}[m-1,n+12] & \\
\mathbf{r}[m,n-2] & \mathbf{r}[m,n-1] & \mathbf{r}[m,n] & \mathbf{r}[m,n+1] & \mathbf{r}[m,n+2] \\
 & \mathbf{r}[m+1,n-1] & \mathbf{r}[m+1,n] & \mathbf{r}[m+1,n+1] & \\
 & & \mathbf{r}[m+2,n] & &
\end{bmatrix}
$$

Podemos ainda identificar os seguintes esquemas de nós vizinhos que influem no cálculo da mesma energia em termos dos parâmetros α e β

$$
\begin{bmatrix}
 & & & & \\
 & & \alpha & \alpha & \\
 & \alpha & \alpha & \alpha & \\
 & \alpha & \alpha & & \\
 & & & &
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & \mathbf{r}[m-1,n] & \mathbf{r}[m-1,n+12] & \\ & \mathbf{r}[m,n-1] & \mathbf{r}[m,n] & \mathbf{r}[m,n+1] & \\ & \mathbf{r}[m+1,n-1] & \mathbf{r}[m+1,n] & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \beta & & \\ & \beta & \beta & \beta & \\ \beta & \beta & \beta & \beta & \beta \\ & \beta & \beta & \beta & \\ & & \beta & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \mathbf{r}[m-2,n] & & \\ & \mathbf{r}[m-1,n-1] & \mathbf{r}[m-1,n] & \mathbf{r}[m-1,n+12] & \\ \mathbf{r}[m,n-2] & \mathbf{r}[m,n-1] & \mathbf{r}[m,n] & \mathbf{r}[m,n+1] & \mathbf{r}[m,n+2] \\ & \mathbf{r}[m+1,n-1] & \mathbf{r}[m+1,n] & \mathbf{r}[m+1,n+1] & \\ & & \mathbf{r}[m+2,n] & & \end{bmatrix}$$

Bibliografia

[1] Dominique Bechmann. Space deformation models survey. *Computer & Graphics*, 18(4):571–586, 1994.

[2] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*. Springer-Verlag, 1988.

[3] George Celniker and Dave Grossard. Deformable curve and surface finite-elements for free-form shape design. *Computer Graphics*, 25(4):257–266, July 1991.

[4] Sabine Coquillart. Extend free-form deformation: A sculpturing tool for 3d geometric modeling. 24(4):187–196, august 1990.

[5] Sabine Coquillart and Perre Jancine. Animated free-form-deformation: An interactive animation technique. *Computer Graphics*, 25(4):23–26, July 1990.

[6] Alan H. Barr Demetri Terzopoulos, John C. Platt and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics*, 21(4):205–214, July 87.

[7] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

[8] John Pentland end John Willians. Good vibrations: Modal dynamics for graphics and animation.

[9] Ugur Gudukbay, Bulent Ozguç, and Yilmaz Tokad. An animation system for rigid and deformable models. *Comput. & Graphics*, 17(1):71–77, 1993.

[10] Richard W. Hertzberg. *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. Richard W. Hertzberg, 1989.

[11] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wayne Anderson, 1993.

[12] Nadia M. Thalmann Michel Carignan, Ying Yang and Daniel Thalmann. Dressing animated synthetic actors with complex deformable clothes. *Computer Graphics*, 26(2):99–104, july 1992.

[13] G.I. Makarenko M.L. Krasnov and A.I. Kiseliov. *Cálculo Variacional.* Editora Mir, 1984.

[14] John C. Platt and Alan H. Barr. Constrait methods for flexible models. *Computer Graphics*, 22(4):269–278, August 1988.

[15] Thomas W. Sederberg and Scott Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *Computer Graphics*, 20(4):151–160, July 1986.

[16] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry.* Addison-Wesley Publishing Co., 1961.

[17] Richard Szeliski and David Tonnesen. Surface modeling with oriented particle system. *Computer Graphics*, 26(2):185–194, July 1992.

[18] Demetri Terzopoulos and Kurt Fleischer. Modeling inelastic deformation: Viscoelasticity, plasticity, fracture. *Computer Graphics*, 22(4):269–278, August 1988.

[19] Andrew Witkin and Willian Welch. Fast animation and control of nonrigid structures. *Computer Graphics*, 24(4):243–252, August 1990.

[20] Shin-Ting Wu. *Topologie von Hybriden Objekten.* PhD thesis, TH-Darmstadt, 1991.