Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial

TRAÇADO NÃO-SOBREPOSTO DE INTERSEÇÃO DE SUPERFÍCIES REGULARES COM PASSOS DE CONTATO DE ORDEM 3

Tese de Doutorado

Autor: **Osmar Aléssio**

Orientadora: **Profa. Dra. Wu, Shin-Ting**

Co-orientadora: **Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa**

Banca Examinadora: **Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo (IMPA)**
Prof. Dr. Irwen Valle Guadalupe (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Firer (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Márcio Luiz de Andrade Netto (FEEC/UNICAMP)
Prof. Dr. Rafael Santos Mendes (FEEC/UNICAMP)

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

29 de novembro de 2002

Resumo

Este trabalho tem como objetivo obter o traçado não-sobreposto da curva interseção de duas superfícies regulares a partir de um ponto inicial sobre a curva. São propostas soluções para dois problemas detectados: 1) uma adaptação da direção de caminhada em cada ponto, seja ele singular ou regular; e 2) uma determinação robusta do ponto final de um traçado de forma a garantir uma única volta no caso em que há laço fechado no domínio paramétrico. Diferentemente dos trabalhos existentes, que usam direções de caminhada de ordem até 2, apresentou-se duas novas direções de caminhada de contato de ordem 3, com uso de vetor tangente, curvatura e torção. Adicionalmente, foi proposta também uma técnica para estimar estas grandezas nos pontos próximos aos pontos singulares, mas não cuspidais. Elaborou-se ainda, com base na Topologia Diferencial, um algoritmo eficiente para estimar o índice de rotação de uma curva fechada através da distinção dos tipos de pontos singulares determinados ao longo do traçado. A utilização de resultados de teoria de singularidade possibilitou o desenvolvimento de critérios menos sensíveis às precisões numéricas de um sistema digital, abrindo perspectivas para novos paradigmas.

Abstract

The purpose at this work is to get a non-overlapping tracing of the intersection curve of two regular surfaces starting from a point on the curve. Solutions for two identified problems are proposed: 1) an adaptation of the marching direction at each point, either singular or regular; and 2) a robust determination of the end point of a tracing in order to guarantee only one turn in the tracing of a closed loop in the parametric domain. Differently from the previous works, which use directions of contact order up to 2, two news directions of contact order 3 were presented using tangent vector, curvature, and torsion. Moreover, a technique was considered in order to estimate these quantities at points close to singular but not cuspidal points. It was also elaborated, on the basis of the Differential Topology, an efficient algorithm for estimating the rotation index of the closed loop based on parametrized loops and types of singular points determined along the curve tracing. The use of Singularity Theory led to the development of criteria which are less sensitive to the numerical precisions of a digital, opening perspectives for new paradigms.

Agradecimentos

À Profa. Dra. Wu Shin-Ting pela dedicação, eficiência e indispensável orientação durante a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Sueli I. R. Costa pela co-orientação durante a realização deste trabalho.

À minha esposa Florencia pela dedicação, compreensão e carinho nas horas difíceis.

Aos meus pais Sérgio e Ignez pelo carinho, educação e amor que sempre me deram.

Ao meu irmão Paulo e minhas irmãs Célia e Andréia por todo este tempo de amizade, carinho e compreensão.

Ao meu cunhado Auro e ao meu tio Clóvis pelos churrascos e cervejas que bebemos nos finais de semana.

Aos meus amigos Edson, Nei, João, Peter, Felipe, Anderson, Marquinhos, Leonardo, Alessandro, Abdala e amigas Cris e Pati pelas momentos felizes que tivemos em churrascos, festas e bares.

Aos meus amigos Gonzaga, Nicola, Rodrigo, Alex Peruano, Paulinho, Marco Antonio, Alessandro Bicho, Alexandre, Vânio e amigas Mercedes e Isla pelos momentos felizes que passei no laboratório, pela ajuda que obtive quando precisei e também pela amizade construída durante todo este tempo.

Aos amigos do futebol pelos momentos de descontração, pelas grandes jogadas que fizemos e o mais importante pela amizade que construímos durante este tempo.

À Universidade Estadual de Campinas e ao CNPq pelo suporte e financiamento sobre o processo N^o 145149/1998-6.

Dedicatória

A minha esposa
Florencia

e minha filha
Isabella

Sumário

SUMÁRIO **v**

LISTA DE FIGURAS **viii**

LISTA DE TABELAS **xi**

1 Introdução **1**

1.1 Problemas detectados na técnica de caminhada 3

1.2 Objetivos 5

1.3 Organização 5

2 Conceitos **7**

2.1 Curvas 7

2.2 Superfícies 13

2.3 Estruturas Algébricas 15

2.4 Singularidades 19

3 Propriedades Geométricas **27**

3.1 Trabalhos Correlatos 27

3.1.1 Vetores Tangentes 27

3.1.2 Curvatura 30

3.1.3 Torção 34

3.2 Nossa Proposta 35

3.3 Resultados e Comparações com Valores Exatos 35

3.4 Comparação com a Técnica Ye-Maekawa 40
3.5 Comentários 42

4 Direções de Caminhada **45**

4.1 Trabalhos Correlatos 45
4.1.1 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 1 45
4.1.2 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 2 46
4.2 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 3 47
4.3 Resultados e Comparações 48
4.4 Comentários 56

5 Singularidades **59**

5.1 Trabalhos Correlatos 61
5.2 Reconhecimento de Singularidades 64
5.2.1 Determinação dos Pontos Singulares 64
5.2.2 Paradigma da Tangente 65
5.2.2.1 Terceira Ordem 65
5.2.2.2 Quarta Ordem 68
5.2.3 Determinação da curva da algébrica aproximada 71
5.2.4 Paradigma de Codimensão 73
5.2.5 Paradigma de Coeficientes 87
5.3 Comentários 99

6 Critério de Parada em Curvas Fechadas **101**

6.1 Índice em Função de Pontos de Auto-interseção 104
6.2 Validação 107
6.3 Um Algoritmo para Traçado Não-Sobreposto 115
6.4 Resultados Numéricos 118
6.5 Comentários 134

7 Conclusões **137**

Referências Bibliográficas **139**

Lista de Figuras

2.1 Triedro de Frenet. 8

2.2 Índice de Rotação. 10

2.3 O índice de rotação. 11

2.4 Três classes de curvas planas. 12

2.5 Reconhecimento de singularidades de codimensão ≤ 3. 22

2.6 Formas Normais 24

3.1 Vetor tangente. 28

3.2 Curvas de interseções. 28

3.3 Uma estimativa para o círculo osculador. 30

3.4 Uma estimativa para o círculo osculador segundo Wu-Andrade [37]. 31

3.5 Interseção Superfície Regrada/Toro. 36

3.6 Interseção Cilindro Circular/Esfera. 38

3.7 Superfície Regrada/Toro. 42

3.8 (a) Cilindro Circular/Esfera e (b) Cilindro Generalizado/Toro.. 43

4.1 Passo tangencial. 46

4.2 Passo tangencial adaptativo 46

4.3 Passo Circular. 47

4.4 (a) Interseção Superfície Regrada/Toro e (b) Interseção Parabolóide/Onda Senoidal. 50

4.5 (a) Interseção Helicóide/Cilindro e (b) Interseção Parabolóide/Sela. 50

4.6 Elipsóide/Elipsóide. 51

4.7 Bézier/Bézier. 53

4.8 Interseção Cilindro Circular/Esfera. 53
4.9 Passo Polinomial. 57

5.1 Pontos Cuspidais. 59
5.2 Oscnóide. 60
5.3 Ponto de partida para obtenção do ponto singular. 64
5.4 Interseção Relevo em 3-Pétalas/Plano. 67
5.5 Interseção Relevo 4-Pétalas/Plano. 71
5.6 Cúspide "Ramphoid". 73
5.7 Oscnóide. 76
5.8 Nodes. 78
5.9 Tacnóide em $(0,0)$ e node em $(0,1)$. 80
5.10 Tacnóide. 82
5.11 Cardióide. 84
5.12 Nodes. 85
5.13 Ponto Cuspidal. 86

6.1 Curva de interseção fechada. 101
6.2 Condições de proximidade. 102
6.3 Condições de proximidade. 103
6.4 Condição de primeira ordem. 103
6.5 Condições de proximidade e primeira ordem. 103
6.6 Pontos transversais e não transversais. 105
6.7 Laços orientados. 105
6.8 Diferentes partições paramétricas para a mesma curva. 106
6.9 Deformação. 107
6.10 Ligeira deformação de $\alpha_1(t)$ para $\alpha_2(t)$. 108
6.11 Função de Cauchy. 108
6.12 Função "Lombada". 109
6.13 Ângulos exteriores de laços parametrizados. 111

6.14 Ângulos em um ponto de bifurcação. 113
6.15 Ângulos em um ponto de bifurcação. 113
6.16 Ângulos em um ponto de bifurcação. 114
6.17 Aplicação do algoritmo proposto. 118
6.18 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 119
6.19 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 121
6.20 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 123
6.21 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 125
6.22 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 127
6.23 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 129
6.24 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 131
6.25 Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$. 133

Lista de Tabelas

2.1 Classificação. 22

3.1 Propriedades Geométricas da curva C_1. 37

3.2 Propriedades Geométricas da curva C_2. 39

3.3 Influência de Δs nos valores estimados. 40

3.4 Determinação das propriedades locais. 41

4.1 Comparações de direções de caminhada sem pontos singulares. 49

4.2 Comparações de direções de caminhada com pontos singulares. 52

4.3 Comparações de direções de caminhada com pontos singulares. 55

4.4 Comparação do Passo polinomial e com L fixo e L adaptativo. 57

6.1 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 120

6.2 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 122

6.3 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 124

6.4 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 126

6.5 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 128

6.6 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 130

6.7 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 132

6.8 Pontos representativos de $F(u,v) - G(p,q) = 0$. 134

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho pretende-se apresentar uma contribuição à determinação de interseção de duas superfícies regulares.

Do ponto de vista histórico o problema de interseção de superfícies (SSI) vem de muitos séculos atrás. As clássicas curvas conhecidas como cônicas (elipse, hipérbole, parábola) são obtidas através da interseção entre duas superfícies: um plano e um cone.

Muitos problemas de Engenharia podem ser reduzidos em problemas de interseção, como em

- aplicações em robótica, por exemplo colisões de objetos;
- aplicações em CAD e CAGD, para modelar objetos de geometria complexa;
- simulações de manufatura de peças que envolve corte, fresa, etc;
- aplicações em geometria computacional;
- representações de silhuetas de objetos complexos;
- aplicações em geociências, para determinar as curvas de nível de uma superfície;
- visualização foto-realística, para determinar a visibilidade e as interações entre raios luminosos e os objetos de interesse.

Nas últimas décadas o problema do cálculo de interseção de superfícies dadas por equações paramétricas tem sido extensivamente pesquisado por vários especialistas da área de Modelagem Geométrica. Se as duas superfícies forem definidas por parametrizações $F(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ e $G(p,q) = (g_1(p,q), g_2(p,q), g_3(p,q))$, então os pontos da curva interseção são definidos pelas soluções do sistema (em geral não-linear) com 3 equações e 4 variáveis:

$$\begin{cases} f_1(u,v) - g_1(p,q) = 0 \\ f_2(u,v) - g_2(p,q) = 0 \\ f_3(u,v) - g_3(p,q) = 0 \end{cases}$$

submetidas às restrições: $u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}, p_{min} \leq p \leq p_{max}, q_{min} \leq q \leq q_{max}$.

Este sistema pode não ter solução, ter uma única solução ou uma infinidade de soluções dependendo das superfícies não se intersectarem, serem tangentes em um único ponto ou se intersectarem segundo uma curva ou segundo um trecho de superfície. Neste trabalho o interesse está na interseção quando ela é uma curva.

Um bom algoritmo de interseção deve ter as seguintes propriedades [15]:

- precisão, no sentido numérico;
- robustez, no sentido que toda a interseção é identificada;
- eficiência, em particular no sentido de número de iterações requerido;
- auto-controle, no sentido de que não é necessária ajuda iterativa do usuário.

Embora não haja um algoritmo simples que seja ótimo com respeito a estas quatro características, há muitos algoritmos que atendem alguns destes quesitos e, quando convenientemente aplicados, garantem resultados satisfatórios. As técnicas para o cálculo da interseção de duas superfícies podem ser classificadas em cinco grandes categorias [15]:

- Técnicas analíticas (algébricas): consiste na obtenção da equação da interseção através de técnicas puramente algébricas;
- Técnicas de discretização (lattice evalution): consiste em reduzir a dimensão do cálculo de interseção, ao invés de calcular a interseção entre duas superfícies diretamente, calcula-se a interseção entre uma das superfícies e algumas curvas coordenadas da outra superfície;
- Técnicas de caminhada (marching): consiste na obtenção de uma seqüência de pontos da curva de interseção, partindo de um ponto dado inicialmente e seguindo uma determinada direção para obtenção de novos pontos;
- Técnicas de subdivisão: consiste na subdivisão do domínio de definição das parametrizações das superfícies de modo que os pequenos pedaços das superfícies associados às pequenas partes subdivididas nos domínios possam ser aproximadas por pequenos planos e
- Técnicas mistas: consiste em combinar mais de uma das técnicas mencionadas acima.

Para a interseção de superfícies paramétricas em geral, os métodos mais utilizados são o de caminhada [3, 4, 5] e de subdivisão [5, 25].

O método de caminhada é baseado em achar um ponto inicial na curva interseção e depois através de uma direção prossegue-se ao longo da curva iterativamente. Este método usualmente consiste de três fases [15, 24]: fase de busca (*hunting phase)*, fase de caminhada/traçado (*tracing phase)* e fase de classificação (*sorting phase).* A fase de busca fornece pontos iniciais para caminhar na curva de interseção. Nesta fase pode-se ou não localizar todos os ramos da curva interseção e prevenir cópias múltiplas da mesma seqüência de pontos durante a fase de caminhada. *Hodographs* [28], técnicas de subdivisão [5, 25], e métodos algébricos [1, 14] têm sido aplicados para ajudar no problema de busca. A fase de caminhada/traçado calcula seqüências de pontos de um ramo da curva de interseção partindo de um ponto inicial e seguindo uma determinada direção para obtenção de um novo chute inicial, e a partir deste chute inicial deve-se usar um método numérico para que convirja para o ponto da curva de interseção. Métodos numéricos usados para esta finalidade podem ser encontrados em [3, 4, 5, 9, 37]. Direção e tamanho do passo incorretos podem levar a resultados errados. A fase de classificação concatena de forma ordenada seqüências de pontos de ramos disjuntos obtidos. Esta fase é trivial, quando os pontos na curva de interseção podem ser seqüencialmente traçados numa só varredura.

A maior parte dos métodos de caminhada fazem uso da geometria diferencial local ou expansão em séries de Taylor sobre cada ponto da curva de interseção, para controlar o passo. Traçando na direção tangente [5, 24], ao longo do círculo [2, 9, 37], e ao longo da parábola [30] são algumas soluções apresentadas na literatura e grande parte usa o tamanho do passo dependente da curvatura [5, 30].

Quando a forma paramétrica da curva é conhecida, suas propriedades locais, como tangente, curvatura, normal, binormal, e torção, podem ser derivadas exatamente. No esquema da caminhada, estas propriedades são exploradas para determinar a curva de interseção desconhecida. Motivados pelas aplicações das propriedades geométricas diferenciais, na determinação de direções de caminhada, Ye-Maekawa propuseram algoritmos baseados na Geometria Diferencial para calcular as propriedades geométricas locais da curva de interseção, como também para obter pontos da interseção [38].

1.1 Problemas detectados na técnica de caminhada

Quanto maior for o contato de direção de caminhada em relação à curva de interseção, mais eficiente é o algoritmo. Menos iterações são necessárias para converjir o ponto e menos a probabilidade de cair em outros ramos. Isso motivou uma série de trabalhos a propor algoritmos para estimar adaptativamente as direções de caminhada de contato de ordem maior. Para se ter uma direção de caminhada com contato de ordem três, é preciso obter algumas propriedades geométricas como por exemplo: torção e curvatura. Ye e Maekawa propuseram técnicas para obter estas propriedades, porém em vários testes realizados, as fórmulas propostas por eles, embora

teoricamente corretas, não são computacionalmente robustas nos pontos da interseção onde as superfícies não são suficientemente transversais. A razão surge na limitação de representação de pequenos desvios dos vetores normais de ambas as superfícies. O primeiro problema é, portanto, como determinar torção nos pontos na vizinhança de uma singularidade.

Como o método da caminhada consiste em partir de um ponto na curva de interseção e determinar iterativamente o próximo ponto até traçar a curva completamente, caminhar numa certa direção, é preciso em algum momento ter um critério de parada. Para curvas abertas o critério de parada é atingir o bordo do domínio paramétrico, porém qual é o critério de parada para curvas fechadas? Uma solução clássica para o problema de laços fechados no domínio paramétrico é determinar sua existência e reduzi-los em ramos abertos. Técnicas para detectá-los previamente e subdividir os domínios paramétricos da superfície tal que os laços fechados fiquem divididos em vários ramos abertos encontrando em distintos retalhos (*subpatches*) foram descritas nos artigos [29, 28, 27, 20, 21, 17]. Depois, estes retalhos (*subpatches*) são tratados individualmente. O algoritmo de detecção de laços ("loop detection") fechados são executados geralmente em duas etapas:

- teste da existência do laço fechado,
- procurar um ponto no domínio que fique dentro deste laço

Três tipos de critérios tem sido referenciado para testar a existência do laço fechado:

1. critério dos vetores normais ("Normal criterion") [29, 28, 27],
2. critéiro da distância [22, 17, 21, 20] e
3. caracterização algébrica dos laços [18]

Os critérios de vetores normais permitem excluir eficientemente situações de não-existência de laços fechados. Mas se duas superfícies intersectam em laços fechados, as superfícies são divididas e novos testes serão realizados nas retalhos (*subpatches*) para detectar a não existência de laços fechados. Quando duas superfícies intersectam em laços fechados muito pequenos, ou em casos extremos, quando duas superfícies intersectam em pontos isolados (singularidades), estes critérios sofrem o problema parecido com o algortimo da subdivisão. Detecção baseada no critéiro da distância envolve uma pesada computação e sua corretude depende da próximidade dos chutes iniciais para encontrar os pontos críticos.

Pensando nos problemas citados acima e precisando de um critério de parada para curvas fechadas para que se evite "infinitas iterações " quando se está caminhado numa curva fechada, Wu e Andrade [37] fixaram um número máximo de iterações em 400. Mas esta quantidade de pontos pode não ser suficiente para traçar um laço fechado completo, ou por outro lado, pode sobrepor trechos do laço fechado.

Deve-se lembrar que para traçar uma curva aberta ou fechada, propriedades geométricas locais têm sido usadas. Por causa da inerente complexidade de curvas algébricas de ordem superior que resultam da interseção de duas superfícies regulares, curvas de interseção podem ter:

pontos tangenciais, pontos de bifurcação e cúspides. Nestes pontos os vetores normais de ambas as superfícies são paralelos. A classificação destas singularidades é crucial para uma caminhada completa e correta. Ye e Maekawa [38] propuseram um algoritmo para analisar o comportamento de um ponto singular de ordem 2, olhando o discriminante da forma quadrática [7, 12, 13, 19, 23], que representa o ponto singular em sua vizinhança. Este método classifica o ponto singular de acordo com o número de raízes reais (tangentes) o que não permite diferenciar ponto singulares como cuspidais, tacnoidais e oscnoidais, pois todos esses pontos quando analisados pelo discriminate possuem uma única raiz real, conseqüentemente um vetor tangente.

1.2 Objetivos

Neste trabalho propõe-se explorar mais as técnicas de geometria diferencial, topologia diferencial e teoria de singularidades para apurar os algoritmos existentes referentes à técnica de caminhada:

1. Geometria diferencial para melhorar ou encontrar novas técnicas para obtenção de propriedades geométricas, com isso obter direções de caminhada de ordem de contato maior;
2. Teoria de singularidade para obter o comportamento da singularidade e com isso poder decidir com mais exatidão a direção do o próximo passo na sua vizinhança;
3. Topologia diferencial para obter propriedades globais da curva de interseção fechada e então usá-las para estabelecer um critério de parada da caminhada mais robusto.

1.3 Organização

No Capítulo 2 apresenta-se os conceitos básicos de geometria diferencial, topologia diferencial, estruturas algébricas e singularidades necessários para o completo desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 3 apresenta-se uma técnica aproximada para determinar as propriedades geométricas. No Capítulo 4 é mostrado a aplicação desta técnica no cômputo das direções de caminhada na vizinhança dos pontos singulares. No capítulo 5 apresenta-se uma proposta para classificar pontos singulares. Foi feito uma análise preliminar de aplicabilidade destes resultados no contexto de técnica de caminhada. No Capítulo 6 apresenta-se o algoritmo que estima o índice de rotação, sua validade teórica e aplicação do índice de rotação como algoritmo como critério de parada no traço de curvas fechadas. Finalmente, no Capítulo 7 apresenta-se algumas conclusões e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos

Neste capítulo apresenta-se os conceitos básicos da geometria diferencial, topologia diferencial, estruturas algébricas e singularidades necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Conceitos de geometria e topologia diferencial podem ser encontrados nas referências [6, 8, 16, 31, 32], singularidades nas referências [7, 12, 13, 19, 23, 26] e estruturas algébricas nas referências [10, 11].

2.1 Curvas

Uma curva parametrizada $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u)), \quad u \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

é chamada de curva regular, se o seu vetor tangente

$$\dot{\alpha}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u), \dot{z}(u)) \tag{2.2}$$

for diferente de zero ($\neq 0$), para qualquer $u \in [a, b]$.

Se uma curva é pelo menos de classe C^2, pode-se medir o quanto uma curva deixa de ser reta em qualquer ponto $\alpha(u)$ por sua curvatura, dada por

$$\kappa(u) = \frac{\mid \dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u) \mid}{\mid \dot{\alpha}(u) \mid^3}, \tag{2.3}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de dois vetores. Se $\kappa(u) = 0$, $\forall u \in [a, b]$, então $\alpha(u)$ é uma reta. Se $\kappa(u) = 0$ para um ponto isolado $P = \alpha(u_p)$, $u_p \in [a, b]$, então P é um ponto de inflexão ou um ponto planar. Da curvatura, pode-se encontrar o raio $r(u)$ do círculo osculador ($r(u) = \frac{1}{\kappa(u)}$) cuja primeira e segunda derivadas concordam com as da curva α no ponto $\alpha(u)$.

Se a curva for pelo menos de classe C^3 e $\kappa(u) \neq 0$, pode-se medir a variação de quanto ela deixa de ser plana por sua torção τ, dada por

$$\tau(u) = \frac{(\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)) \cdot \dddot{\alpha}}{\mid \dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u) \mid^2}, \tag{2.4}$$

onde $\dddot{\alpha}$ denota a derivada de terceira ordem de α. A torção $\tau(u)$ é nula para curvas planas. As funções $\kappa(u)$ e $\tau(u)$ são independentes da parametrização. Quando o parâmetro s é tal que $\mid \dot{\alpha}(s) \mid = 1 \ \forall s$, dizemos que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco s. Tem-se que $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ determinam uma curva em $\mathbb{R}^3$ de modo único.

Para qualquer ponto $\alpha(u)$ na curva α, pode-se introduzir um sistema de coordenadas especial para descrever as propriedades locais da curva. Este sistema de coordenadas com origem em $\alpha(u)$ tem eixos X, Z, e Y, respectivamente, nas direções

$$\begin{aligned} t(u) &= \frac{\dot{\alpha}(u)}{\mid \dot{\alpha}(u) \mid}, \\ b(u) &= \frac{\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)}{\mid \dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u) \mid}, \\ n(u) &= b(u) \times t(u). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Os vetores unitários $t(u)$, $n(u)$ e $b(u)$ são chamados, respectivamente, vetor tangente, vetor normal e vetor binormal. Este sistema de referência ou triedro é chamado **triedro de Frenet**. Os planos associados a este triedro são plano osculador (tn), plano normal (nb) e plano retificante (tb) (Figura 2.1).

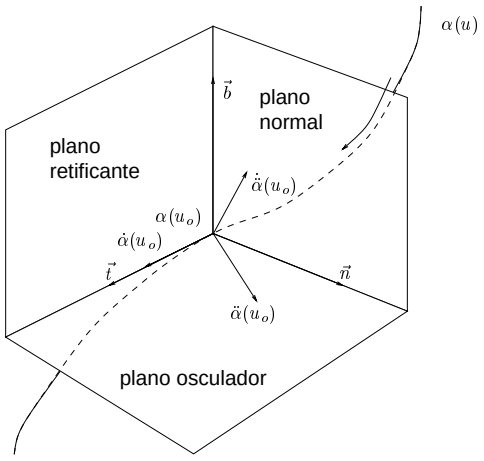


Figura 2.1: Triedro de Frenet.

Para uma curva α, parametrizada pelo comprimento de arco s, pode-se exprimir as derivadas destes vetores unitários em termos deles mesmos, através das chamadas **fórmulas de Frenet**:

$$\begin{array}{rcccc} t'(s) & = & & +\kappa(s)n(s) & \\ n'(s) & = & -\kappa(s)t(s) & & -\tau(s)b(s) \\ b'(s) & = & & -\tau(s)n(s) & \end{array} \tag{2.6}$$

Expandindo a curva $\alpha(s)$ em série de Taylor em torno do ponto $\alpha(s_0)$ e considerando que $\Delta s \to 0$, pode-se mostrar que, as projeções de $\alpha(s)$ nos três planos do triedro de Frenet comportam-se na vizinhança de $\alpha(s_0)$ como as curvas

$$\begin{aligned} X(s) &= s - \frac{\kappa(s_o)^2}{6}s^3, \\ Y(s) &= \frac{\kappa(s_o)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(s_o)}{6}s^3 e \\ Z(s) &= -\frac{\kappa(s_o)\tau(s_o)}{6}s^3, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$\kappa'(s_o) = \alpha'''(s_0) \cdot n(s_0). \tag{2.8}$$

É também conhecido que na vizinhança de $\alpha(s_o)$, a curva $\alpha(s)$, tem contato de terceira ordem com a hélice circular, definida no triedro de Frenet por

$$\beta = \beta(\tilde{s}) = (a\cos\frac{\tilde{s}}{c}, asen\frac{\tilde{s}}{c}, -\frac{b\tilde{s}}{c}), \tag{2.9}$$

onde

$$a = \frac{\kappa(s_o)}{\kappa^2(s_o) + \tau^2(s_o)},\ b = \frac{\tau(s_o)}{\kappa^2(s_o) + \tau^2(s_o)},\ c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Em particular, se $\tau(s_o)$ é nulo, a curva comporta-se como um círculo.

Como foi mencionado, a curvatura e a torção medem as variações do vetor tangente da curva e do plano osculador, respectivamente. Geometricamente, estas funções medem, respectivamente, as velocidades angulares de $t(s)$ e $b(s)$ com $\Delta s \to 0$:

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(t(s) - t(s - \Delta s))}{\Delta s} \qquad \text{e} \qquad \mid \tau(s) \mid = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(b(s) - b(s - \Delta s))}{\Delta s}. \tag{2.10}$$

A torção $\tau(s)$ pode ser positiva ou negativa. Ela é positiva quando o vetor $\alpha(s) - \alpha(s - \Delta s)$ está, em relação ao plano osculador, no mesmo semi-espaço do vetor $b(s)$; caso contrário ela assume valor negativo em s.

Proposição 2.1 *[32] Seja $\alpha(s)$ uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ de curvatura não nula $\forall s \in I$. Fixado $s_0 \in I$.*

(a) para todo s suficientemente próximo de s_0, $\alpha(s)$ pertence ao semi-espaço, determinado pelo plano retificante, que contém $n(s_0)$.

(b) se $\tau(s_0) < 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0, $\alpha(s)$ pertence ao semi-espaço, determinado pelo plano osculador, que contém $-b(s_0)$ (resp. $b(s_0)$) se $s < s_0$ (resp. $s > s_0$),

(c) se $\tau(s_0) > 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0, $\alpha(s)$ pertence ao semi-espaço, determinado pelo plano osculador, que contém $b(s_0)$ (resp. $-b(s_0)$) se $s < s_0$ (resp. $s > s_0$).

Considerando $\phi(\Delta s)$ o ângulo entre os binormais em $\alpha(s)$ e $\alpha(s - \Delta s)$, $b(s)$ e $b(s - \Delta s)$, pode-se ainda exprimir a torção $\tau(s)$ como

$$| \tau(s) | = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2sen\frac{\phi(\Delta s)}{2}}{\Delta s} \quad e \tag{2.11}$$

$$sign\,[\tau(s)] = sign\,[(\alpha(s) - \alpha(s - \Delta s)) \cdot b]\,, \tag{2.12}$$

onde $sign[x]$ denota o sinal de x.

Definição 1 *O* índice de rotação *de uma curva plana fechada $\alpha\colon [a,b] \to R^2$ é o número I_α de voltas (orientada) que o vetor tangente $\dot{\alpha}(t)$ de uma curva rotaciona ao longo da curva [8, 31, 6].*

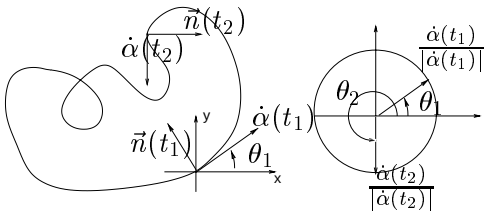


Figura 2.2: Índice de Rotação.

Seja s parâmetro de comprimento de arco e t um parâmetro qualquer. Para uma curva regular fechada α, a curvatura $\kappa(s)$ pode ser definida como a derivada $\frac{d\theta(s)}{ds}$, onde θ é o ângulo que o vetor tangente faz com o eixo x. Como $\frac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}(t)|$, pode-se escrever

$$\int_0^w \kappa(s)ds = \int_a^b \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt = \theta(a) - \theta(b) = I_\alpha 2\pi,$$

isto é, o índice de rotação de α é dado pelo inteiro

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt. \tag{2.13}$$

A Figura 2.3 ilustra alguns exemplos de curvas fechadas com seus respectivos índices de rotação.

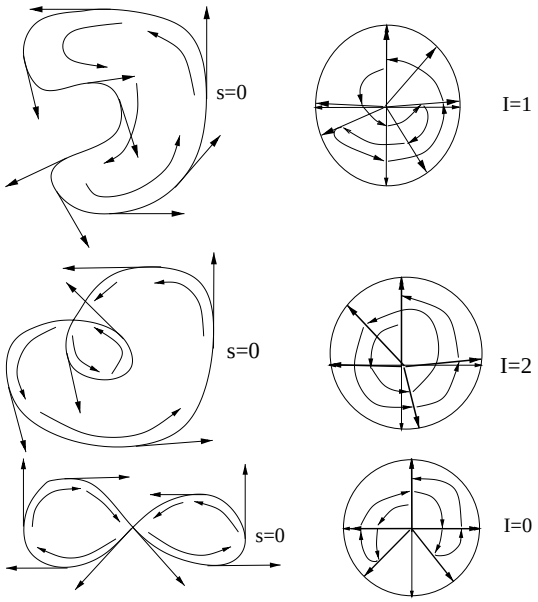


Figura 2.3: O índice de rotação.

Para curvas fechadas e regulares por parte define-se o índice de rotação por adicionar os "pulos", isto é, os ângulos nas singularidades.

Definição 2 *[16] Seja $\alpha\colon [0,w] \to R^2$ uma curva fechada, regular e suave por partes. Seja $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k = w$ sendo uma partição em intervalos tal que $\alpha|[a_i, a_{i+1}]$ é regular e ϕ_i denota o* ângulo exterior orientado *de $\dot{\alpha}(a_{i+})$ para $\dot{\alpha}(a_{i+1-})$, $1 \leq i \leq k-1$, e ϕ_k o ângulo de $\dot{\alpha}(a_{k+})$ para $\dot{\alpha}(a_{1-})$ (requer que $-\pi < \phi_j \leq \pi$). O número*

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\phi_i. \tag{2.14}$$

é o índice de rotação *de α.*

Um ângulo exterior orientado ϕ_i ($-\pi < \phi_j \leq \pi$) em radianos pode ser definido por

$$sen\phi_i = \frac{< \dot{c}(a_{i-}) \times \dot{c}(a_{i+}), (0,0,1) >}{|\dot{c}(a_{i-})||\dot{c}(a_{i+})|}. \tag{2.15}$$

$$\cos\phi_i = \frac{< \dot{c}(a_{i-}) \cdot \dot{c}(a_{i+}) >}{|\dot{c}(a_{i-})||\dot{c}(a_{i+})|}. \tag{2.16}$$

As próximas proposições resumem algumas propriedades de índice de rotação.

Proposição 2.2 *[16] O número de rotação I_α de uma curva fechada regular por partes é um inteiro. Além disso, I_α é invariante sobre troca de variáveis com orientação-preservada ou uma simetria de R^n. Uma troca de variáveis com orientação-revertida ou uma simetria de R^n trocará o sinal de I_α.*

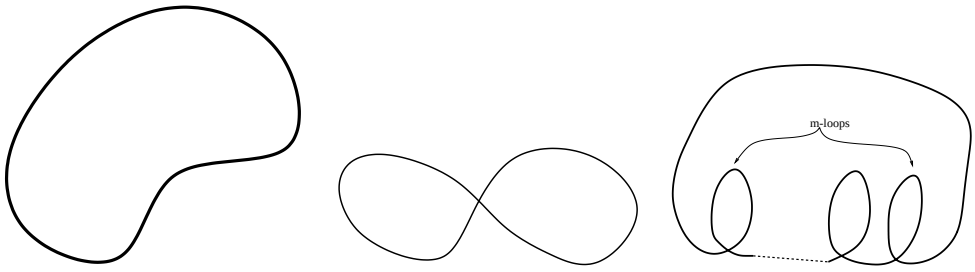
Definição 3 *[16] Duas curvas $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ são* homotópicas, *se existe uma função contínua $\mathcal{H}$ tal que cada $\mathcal{C}_u(t) = \mathcal{H}(t,u)$, $u \in [0,1]$, é uma curva regular e $\mathcal{C}_0(t) = \alpha_1(t)$ e $\mathcal{C}_1(t) = \alpha_2(t)$ são curvas dadas inicialmente. Esta aplicação é uma deformação contínua de $\alpha_1(t)$ para $\alpha_2(t)$ e é chamada de* homotópica.

Proposição 2.3 *[6] Curvas homotópicas tem o mesmo índice de rotação.*

Proposição 2.4 *[8] O índice de rotação de uma curva simples é $\pm$ 1, onde o sinal depende da orientação da curva.*

Proposição 2.5 *[6] Qualquer curva regular fechada é homotópica a uma das seguintes curvas:*

1. *a curva simples se $I = \pm 1$,*
2. *a curva C_n se $I = n + 1$ e*
3. *a curva na Figura 2.4b se $I = 0$.*



(a) (b) (c)

Figura 2.4: Três classes de curvas planas.

Será introduzido as definições abaixo para caracterizar e classificar pontos de auto-interseção, isto é, pontos singulares.

Definição 4 *Seja* α: $[a,b] \to R^2$ *uma curva regular e fechada dada por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. *O ponto* $\mathcal{P}$ *é chamado* auto-interseção, *se há pelo menos dois parâmetros* $t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_1 \neq t_2$, *tal que* $\mathcal{P} = c(t_1) = c(t_2)$. *A* multiplicidade *de um ponto* $\mathcal{P}$ *na curva é o número de pontos representados por* $\alpha^{-1}(P)$. *Um ponto é dito ser* simples *(*múltiplo, duplo, triplo*) se sua multiplicidade é 1 (>1, 2, 3).*

2.2 Superfícies

Dada uma surperfície parametrizada $F = F(u,v)$ em $\mathbb{R}^3$,

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad u,v \in [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Se x, y, e z são diferenciáveis e

$$F_u \times F_v \neq \vec{0}, \ \ \forall (u,v) \in [a,b] \times [c,d],$$

dizemos que $F(u,v)$ é uma superfície regular. O vetor tangente para uma curva $\alpha(t) = F(u(t), v(t))$ na superfície é dado por

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial F}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial F}{\partial v}\dot{v}.$$

Em particular, os vetores tangentes às curvas coordenadas são dados por

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad F_v = \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Como eles não são paralelos, então eles determinam o plano tangente $T_P F$ da superfície no ponto $P = F(u,v)$, com o vetor normal unitário expresso por

$$\mathcal{N}_F(u,v) = \frac{F_u \times F_v}{\mid F_u \times F_v \mid}. \tag{2.17}$$

Este vetor junto com os vetores não normalizados F_u e F_v formam um sistema de coordenadas em cada ponto $F(u,v)$, tendo a mesma importância para as superfícies tanto como o triedro de Frenet tem para as curvas.

Suponhamos que intersectamos a superfície $F(u,v)$ na direção $\dot{\alpha}(t)$ em P com um plano que contém o vetor normal em P. Este plano intersecta $F(u,v)$ ao longo de uma curva $F(u(t), v(t))$ cuja curvatura é chamada de curvatura normal κ_n da superfície em P. Esta curvatura é dada por

$$\kappa_n = \frac{L_F(\dot{u})^2 + 2M_F\dot{u}\dot{v} + N_F(\dot{v})^2}{E_F(\dot{u})^2 + 2F_F\dot{u}\dot{v} + G_F(\dot{v})^2}, \tag{2.18}$$

onde

$$E_F = F_u \cdot F_u, \quad F_F = F_u \cdot F_v, \quad G_F = F_v \cdot F_v,$$

$$L_F = F_{uu} \cdot \mathcal{N}_F, \quad M_F = F_{uv} \cdot \mathcal{N}_F, \quad N_F = F_{vv} \cdot \mathcal{N}_F,$$

são, respectivamente, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de $F(u, v)$.

A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são conhecidas como curvaturas **principais**. Se $k_1 \neq k_2$, as direções unitárias associadas a elas, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, são chamadas vetores principais.

De acordo com a **fórmula de Euler** para toda direção $\vec{w} \in T_pF$ tal que $|\vec{w}| = 1$ e $\vec{w} = cos\theta\vec{w}_1 + sen\theta\vec{w}_2$, tem-se $\kappa_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 sen^2\theta$, onde θ é ângulo entre $\vec{w}$ e a direção principal $\vec{w}_1$.

A **curvatura Gaussiana** K e a **curvatura média** H de F em P são definidas como o produto e média das duas curvaturas principais,

$K = k_1 k_2$,
$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Utilizando as curvaturas gaussiana e média, um ponto $P \in F(u, v)$ é classificado como um ponto

a) elíptico, se $K(P) > 0$,
b) hiperbólico, se $K(P) < 0$,
c) parabólico, se $K(P) = 0$ e $H(P) \neq 0$ e
d) planar, se $K(P) = 0$ e $H(P) = 0$.

A **indicatriz de Dupin** de F em P é definida como o conjunto de pontos $Q \in T_p(F)$ tal que

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1,$$

onde x e y são as coordenadas de Q em relação ao referencial das direções principais.

A interseção de duas superfície regulares $F(u, v)$ e $G(p, q)$, é dita transversal em um ponto $F(u, v) = G(p, q) = P$ se os vetores normais $\mathcal{N}_F(u, v)$ e $\mathcal{N}_G(p, q)$ não são paralelos naquele ponto. Se a interseção de duas superfícies é transversal em P, então pelo Teorema de Tansversalidade [12], numa vizinhança de P temos uma curva e a direção tangente desta curva em P é dada por

$$\vec{t} = \frac{\mathcal{N}_F(u, v) \times \mathcal{N}_G(p, q)}{| \mathcal{N}_F(u, v) \times \mathcal{N}_G(p, q) |}. \tag{2.19}$$

2.3 Estruturas Algébricas

Esta seção se faz necessária para um bom entendimento da definição e do cálculo da codimensão de uma singularidade.

Definição 5 *Um grupo $\mathcal{G}$ é um conjunto S com um operador binário $\bullet$ que satisfaz as quatro propriedades fundamentais:*

1. *fechamento: $a, b \in S$, então $a \bullet b \in S$;*
2. *associativa: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, $\forall a, b, c \in S$;*
3. *identidade: existe um elemento neutro $1_S \in S$, tal que $1_S \bullet a = a \bullet 1_S = a$, $\forall a \in S$;*
4. *inverso: para qualquer $a \in S$ existe $b \in S$ tal que $a \bullet b = b \bullet a = 1_S$.*

Definição 6 *Um* **anel** $\mathcal{A}$ *é um conjunto provido de dois operadores $+$ e $*$ (comumente chamados, respectivamente, de adição e multiplicação) satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *associativa aditiva : $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c, \in S$;*
2. *comutativa aditiva: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in S$;*
3. *identidade aditiva: existe um elemento aditivo neutro $0_A \in S$, tal que $0_A + a = a + 0_A = a$, $\forall a \in S$;*
4. *inverso para adição: $\forall a \in S$, existe um elemento inverso $-a \in S$ tal que $-a+a = a+(-a) = 0_A$, $\forall a \in S$;*
5. *associativa multiplicativa: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$;*
6. *distributiva à direita e à esquerda: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ e $(b + c) * a = b * a + c * a$, $\forall a, b, c \in S$;*

   Se a operação $*$ é comutativa dizemos que o **anel $\mathcal{A}$ é comutativo.** *Se $\mathcal{A}$ contém um elemento neutro 1_A para a operação $*$, ele é dito um* **anel com unidade.** *Se $\mathcal{A}$ é anel cuja operação $*$ é comutativa e para a qual exista um elemento neutro, ele é um anel comutativo com unidade. Quando para um anel comutativo com unidade $\mathcal{A}$ vale ainda a propriedade:*

7. *Para qualquer $a, b, c \in \mathcal{A}$, se $a \neq 0$ e $a * b = a * c$ então $b = c$*

   então $\mathcal{A}$ é dito um **anel de integridade.**

Definição 7 *Sejam $(\mathcal{A},+,*)$ um anel e $\mathcal{B}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{A}$. A terna $(\mathcal{B},+,*)$ é dito um* **subanel** *do anel $(\mathcal{A}, +, *)$, se e somente se, $\mathcal{B}$ é fechado para as operações de adição $(+)$ e da multiplicação $(*)$ do anel $\mathcal{A}$ e $(\mathcal{B},+,*)$ também é um anel.*

Definição 8 *Chama-se* **ideal** *de um anel $(\mathcal{A},+,*)$ todo subanel $(\mathcal{I},+,*)$ desse anel tal que*

$$a * i \in \mathcal{I} \text{ e } i * a \in \mathcal{I}$$

quaisquer que sejam os elementos $a \in \mathcal{A}$ e $i \in \mathcal{I}$.

Teorema 1 *Sejam $(\mathcal{A},+,*)$ um anel comutativo com elemento unidade 1 e a um elemento fixo de $\mathcal{A}$. Então a terna*

$$(\langle a\rangle, +, *) \text{ , onde } \langle a\rangle = \{a * x \mid x \in \mathcal{A}\},$$

é um ideal do anel $(\mathcal{A}$ $,+,*)$.

Definição 9 *Chama-se* **ideal maximal** *de um anel $(\mathcal{A},+,*)$ todo ideal $(\mathcal{I},+,*)$ desse anel tal que o único ideal que o contém é o próprio anel $(\mathcal{A},+,*)$.*

Definição 10 *Seja $(\mathcal{I},+,*)$ um ideal do anel $(\mathcal{A},+,*)$. O par $(\mathcal{I},+)$ é um subgrupo do grupo abeliano $(\mathcal{A},+)$ e, portanto, é um subgrupo normal de $(\mathcal{A},+)$. Denotamos o conjunto de todas as classes laterais de $(\mathcal{I},+)$ em $(\mathcal{A},+)$ por $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \{a+\mathcal{I} \mid a \in \mathcal{A}\}$, sendo $a+\mathcal{I} = \mathcal{I}+a = \{a+i \mid i \in \mathcal{I}\}$.*

O subconjunto

$$J = \langle b_1, b_2, ..., b_n\rangle = \{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \mid a_1, a_2, ..., a_n \in \mathcal{A}\}, n \geq 1,$$

de elementos pertencentes a um anel de integridade $\mathcal{A}$ é um ideal (gerado por $b_1, b_2, ..., b_n$). Um ideal gerado por um único elemento $b \in \mathcal{A}$ é chamado **ideal principal** (gerado por b) e denotado por $J = \langle b\rangle$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere o conjunto de todas as funções $f_i : U \to \mathbb{R}$ cujo domínio é uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$. Neste conjunto introduz-se uma relação de equivalência $\sim$. Dadas duas funções $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ escrevemos, $f_1 \sim f_2$ quando existe uma vizinhança U de $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_1|U$ e $f_2|U$ coincidem.

A classe das funções diferenciáveis $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, y)$ tendo esta relação de equivalência formam um anel provido de adição e multiplicação usuais de funções. O anel gerado por todas as funções

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, ..., x_1x_2, x_1x_3, ...\}$$

definidas sobre variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ em $\mathcal{E}_n$ e seus elementos são denotados **germes**. Pode-se considerar $\mathcal{E}_n$ um espaço vetorial no qual cada monômio de grau $\alpha \geq 0$ corresponde a um elemento da base. O subconjunto das funções $f_i \in \mathcal{E}_n$ que se anulam na origem é um ideal em $\mathcal{E}_n$, que denotamos por

$$\mathcal{M}_n = \{f_i | f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)\}.$$

Proposição 2.6 *[7] (i) O ideal $\mathcal{M}_n$ é gerado por $x_1, ..., x_n$, isto é, $\forall f \in \mathcal{M}_n$ pode ser escrito por $f = f_1 x_1 + ... + f_n x_n$ para algum $f_i \in \mathcal{E}_n$. Escreve-se*

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \langle x_1, ..., x_n \rangle.$$

(ii) o conjunto dos germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, y)$ nulo no subespaço $x_1 = ... = x_{n-1} = 0$ é também um ideal, denotado por $\mathcal{M}_{n-1}$, e é gerado por $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

Exemplo 1 *O subconjunto das funções em $\mathcal{M}_n$ com $(\frac{\partial}{\partial i})^\alpha = 0$ para todos os i e $\alpha \geq k$ é também um ideal que denotamos por $\mathcal{M}_n^k$. É ainda possível mostrar que o gerador de $\mathcal{M}_n^k$ são todos os monômios de grau k, ou seja, $\langle x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k, x_1^{k-1}x_2, x_1^{k-1}x_3, ... \rangle$. Em particular, para n=1, o ideal $\mathcal{M}_1^k$ é principal, porque é gerado por $\langle x_1^k \rangle$.*

Um ideal J é **primo** num anel comutativo $\mathcal{A}$, se $J \neq \mathcal{A}$ e para qualquer $r, s \in \mathcal{A}$, se $rs \in J$, então $r \in J$ ou $s \in J$.

Um ideal maximal em $\mathcal{A}$ é um ideal J, $J \neq \mathcal{A}$, com a seguinte propriedade: o único ideal em $\mathcal{A}$ que contém J e é diferente de J é o próprio anel $\mathcal{A}$. É fácil ver que $\mathcal{M}_n^k$ não é um ideal maximal, porque $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \subset \mathcal{E}_n$, enquanto $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{E}_n$, é um ideal maximal.

Dados dois ideais $J_1 = \langle p_1, p_2, ..., p_n \rangle$ e $J_2 = \langle q_1, q_2, ..., q_m \rangle$ em ϵ_n. A soma de ideais $J_1 + J_2 = \langle p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m \rangle$ consiste de todas as funções da forma $f + g$ com $f \in J_1$ e $g \in J_2$. O produto de ideais, $J_1 J_2 = \langle p_1 q_1, p_1 q_2, ..., p_2 q_1, p_2 q_2, ..., p_n q_m \rangle$ consiste de todas as funções somas finitas na forma $f_1 g_1 + f_2 g_2 + ... + f_i g_i$ com $f_i \in J_1$ e $g_i \in J_2$.

Um **anel quociente** de $\mathcal{A}$ por J é um anel de elementos pertencentes a $\mathcal{A}$ que satisfazem uma relação de equivalência $\sim$, isto é

$$c_1 \sim c_2 \leftrightarrow c_1 - c_2 \in J, \forall c_1, c_2 \in \mathcal{A}.$$

Por exemplo, o anel quociente $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_1^k} = \{1, x, x^2, ..., x^{k-1}\}$ define em $\mathcal{E}_n$, k classes de equivalência.

A dimensão do anel-quociente de um anel de intregridade $\mathcal{A}$ por I é dimensão da base do suplemento de I por $\mathcal{A}$.

Chamamos de **codimensão** de um ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ a dimensão do anel-quociente de um anel de intregridade $\mathcal{A}$ por I.

$$cod\mathcal{I} = dim\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}.$$

Exemplo 2 *A codimensão do ideal $\mathcal{M}_1^k$ no anel $\mathcal{E}_n$ é cod $\mathcal{M}_1^k$ =dim $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_1^k} = dim\{1, x, x^2, ..., x^{k-1}\} = k$.*

Definição 11 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$, definimos o espaço tangente a f como sendo o ideal Jacobiano $J_f = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$, e definimos a* **codimensão** *de f, $codf$, como sendo a codimensão de J_f em $\mathcal{E}_n$, isto é*

$$codf = dim\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}.$$

Exemplo 3 *A codimensão da função $f(x) = x^{k+1}$ no anel $\mathcal{E}_n$ é cod f =dim $\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$= dim $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_1^k}$ =dim $\{1, x, x^2, \cdots, x^{k-1}\} = k$.*

Proposição 2.7 *[12] Sejam $\mathcal{M}$ um espaço vetorial com base finita, e $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ um subespaço. $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ tem codimensão finita em $\mathcal{M}$ se, e somente se, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $cod_j\mathcal{I} = 0$ para todo $j \geq k$. E neste caso*

$$cod\mathcal{I} = cod_0\mathcal{I} + cod_1\mathcal{I} + \cdots$$

Se a codimensão de um ideal de funções $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{E}_n$ for finita, ela pode ser determinada em termos das dimensões dos anéis quocientes de $\mathcal{M}_n + \mathcal{M}_n^k\mathcal{E}_n$ por $\mathcal{M}_n + \mathcal{M}_n^{k+1}\mathcal{E}_n$, $dim\frac{\mathcal{M}_n+\mathcal{M}_n^k\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n+\mathcal{M}_n^{k+1}\mathcal{E}_n}$, ou seja,

$$cod\mathcal{M}_n = cod_0\mathcal{M}_n + cod_1\mathcal{M}_n + \ldots.$$

Seja $f \in \mathcal{M}_n$, então $f = f_1x_1 + \cdots = f_nx_n$, $f_i \in \mathcal{E}_n$. O jacobiano de f é $J_f = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$. Suponha que f tenha codimensão finita, então $codf = cod_0f + cod_1f + ...cod_kf$ com $cod_if = dim\frac{J_f+\mathcal{M}_n^i}{J_f+\mathcal{M}_n^{i+1}}$.

Lema 1 (Lema de Nakayama) *Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo com elemento unidade 1 e seja $\mathcal{M}$ um ideal de R com a propriedade que $1 + x$ é inversível em $\mathcal{R}$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Se $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{R}$-modulo finitamente gerado e $\mathcal{M}.\mathcal{A} = \mathcal{A}$ então $A = 0$.*

Corolário 1 *Se $\mathcal{R}$ é um anel comutativo com elemento unidade 1, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{R}$-módulo finitamente gerado,e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são $\mathcal{R}$-módulos com $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} + \mathcal{M}$ implica que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.*

2.4 Singularidades

Diferentemente dos trabalhos existentes, procurou-se predizer características de uma curva de interseção através da classificação dos pontos singulares encontrados ao longo da caminhada. Entende-se por pontos singulares os pontos de interseção de duas superfícies $F(u,v)$ e $G(p,q)$ nos quais os vetores normais são paralelos. Nesta seção são sintetizados alguns conceitos referentes à teoria de singularidade os quais podem ser encontrados nas referências [7, 12, 13, 19, 23].

A determinação do comportamento de uma função na vizinhança de um ponto singular é facilitada com a introdução da noção de difeomorfismo e $calR$-equivalência entre funções.

Definição 12 *(Difeomorfismo). Sejam U e V conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Uma aplicação $\phi : U \to V$ é chamada um difeomorfismo se:*

(i) ϕ é bijetiva,
(ii) ambas ϕ e ϕ^{-1} são diferenciáveis.

Teorema 2 *(Teorema da Função Inversa). Seja $\phi : U_1 \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, com U_1 aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in U_1$. Se a matriz jacobiana de ϕ em u é não-singular, então existe um conjunto aberto $U \subset U_1$, com $u \in U$, tal que $\phi : U \to \phi(U)$ é um difeomorfismo.*

Definição 13 *Duas funções f_1(em t_1) e f_2(em t_2) são R-equivalentes (equivalentes a direita), se existem conjuntos abertos $V_i \subset U_i$, com $t_i \in V_i$, um difeomorfismo $h : V_1 \to V_2$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $t \in V$*

$$h(t_1) = t_2 \text{ e } f_1(t) = f_2(h(t)) + c.$$

Quando só interessar o comportamento de uma função f na vizinhança de t, utilizamos a notação $f\colon (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}$. Numa classe de germes de funções R-equivalentes na vizinhança de t, o representante "mais simples" é conhecido como a **forma normal** do germe. Com isso, a classificação de um ponto singular t de uma função $f\colon (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}$ pode ser reduzida a um problema de reconhecimento ou identificação do germe ao qual a função f pertence. Este problema, por sua vez, pode ser reduzido à determinação de um difeomorfismo $\phi\colon (\mathbb{R}^n, t_0) \to (\mathbb{R}^n, t_0)$ tal que f seja substituída por uma forma normal $f \circ \phi$.

Exemplo 4 *O comportamento da curva algébrica*

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^3 + x^2y + y^3 + 3x^5 + y^6$$

na origem pode ser analisada pela sua "forma normal"

$$g(x,y) = x^2 \pm y^3 + h(x,y),$$

onde $h(x,y)$ tem grau maior igual a 4. Na vizinhança do $(0,0)$ ela tem comportamento de uma cúspide.

Sem perda de generalidade, considera-se que o ponto singular esteja na origem $(0,0)$. Neste caso, o termo constante $f(0,0)$ na sua expansão em série de Taylor é nulo. Para facilitar a caracterização de singularidades em torno de $(0,0)$ é introduzido o conceito de **jatos**. Um **k-jato** de uma função $f(x,y)$ em torno de um ponto t_0 é um polinômio obtido a partir de uma expansão em séries de Taylor, eliminando a série de grau maior que k e o termo constante. Com isso no lugar de dizer que $f(x,y)$ tem as suas derivadas parciais (em $(0,0)$) até grau k nulas, diz-se que seus k-jatos são nulos.

O lema de Hadamard nos garante que uma função de n variáveis com k-jato nulo pode ser gerada pelos monômios de grau $(k+1)$. Na verdade, o lema nos diz que tais monômios geram o **ideal** $\mathcal{E}_n$ de todas as funções com k-jato nulo.

Lema 2 *(Lema de Hadamard). Seja* $f\colon (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}, y)$ *diferenciável, e supondo* $f^{(p)}(x_0) = 0$ *para todo* p, $1 \leq p \leq k$. *Então existe uma função diferenciável* $f_1\colon (\mathbb{R}^n, x) \to (\mathbb{R}, y)$ *tal que* $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^{k+1} f_1(x)$ *para todo* x *em uma vizinhança de* x_0.

Lema 3 *Qualquer função* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *com 2-jato nulo (em (0,0)) pode ser expressa como*

$$f = x^3 g_1 + x^2 y g_2 + x y^2 g_3 + y^3 g_4,$$

com g_i *diferenciáveis e definidas na vizinhança de* $(0,0)$.

Exemplo 5 *Funções de 2 variáveis com k-jato nulo (em (0,0)) podem ser expressas por* $f = x^{k+1} g_1 + x^k y g_2 + \cdots + x y^k g_{k+1} + y^{k+1} g_{k+2}$ *com* g_i *diferenciáveis definidas na vizinhança de* $(0,0)$.

Isso facilita a classificação do comportamento de uma função na vizinhança de um ponto singular depois da sua composição com um difeomorfismo local apropriado.

Teorema 3 *Seja* $X^t A X$ *forma quadrática nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$, *onde* A *é simétrica. Se* P *diagonaliza* A, *e se novas variáveis* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *são definidas pela equação* $X = PY$, *então substituindo esta equação em* $X^t A X$ *produzimos*

$$X^t A X = Y^t D Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *são autovalores de* A *e* $D = P^t A P$.

Proposição 2.8 *(Lema de Morse): A matriz hessiana não é singular no ponto* $(0,0)$, *se e somente se, existe um difeomorfismo* g *tal a* $f \circ g(x,y) = 0$ *é da forma:*

$$f \circ g(x,y) = \pm x^2 \pm y^2 + h(x,y),$$

com $h(x,y)$ *tendo grau maior igual a 3.*

O Lema de Morse, nos diz por exemplo que para funções f de 2 variáveis com 1-jato nulo e com determinante da matriz hessiana diferente de zero existe um difeomorfismo g em torno de $(0,0)$, tal que fog assume uma das seguintes formas normais

$$x^2+y^2 \qquad x^2-y^2 \qquad -x^2-y^2 \qquad -x^2+y^2.$$

Um dos pontos centrais na teoria de Singularidade é a classificação de qualquer função de n-variáveis com k-jato nulo na vizinhaça de um ponto singular.

Exemplo 6 *O* **Lema de Morse**.

Um ponto singular (x_0,y_0) de uma curva $f(x,y)=0$ é um ponto em que $f_{x_0}=f_{y_0}=0$. Supondo que o ponto singular ocorra na origem $(x_0,y_0)=(0,0)$. Pode-se expandir f em série de Taylor em torno de $(0,0)$

$$f(x,y)=f(0,0)+\tfrac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+g(x,y),$$

onde $a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ e $c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

Se $ac-b^2\neq 0$, então existe o difeomorfismo $\phi(x,y)=(X,Y)$, com $X=(x+\frac{b}{a}y)|a|^{\frac{1}{2}}$ e $Y=y|\frac{(ac-b^2)}{a}|^{\frac{1}{2}}$, que transforma o termo quadrático de f na seguinte forma $\pm X^2\pm Y^2$.

Exemplo 7 *$f(x,y)=a_0x^2+b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+b_3y^3+\psi_4(x,y)$, com $\psi_4(x,y)$ de grau maior ou igual a 4, tem a forma normal $d_0X^2+d_1Y^3$, se existir b_3.*

Fazendo $x=X-\frac{1}{2a_0}b_0X^2+b_1XY+b_2Y^2$ e $y=Y$, tem-se $f(x(X,Y),y(X,Y))=g(X,Y)=a_0X^2+b_3Y^3$.

Através de algumas manipulações algébricas, pode-se concluir que a função $\phi(X,Y)=(\phi_1,\phi_2)=(X-\frac{1}{2a_0}b_0X^2+b_1XY+b_2Y^2,Y)=(x,y)$ é um difeomorfismo.

Assim, $f\circ\phi(X,Y)=a_0X^2+b_3Y^3+h(X,Y)$, com $h(X,Y)$ tendo grau maior igual a 4. Ou seja, a forma normal de $f(x,y)$ é $a_0X^2+b_3Y^3$.

Exemplo 8 *$f(x,y)=a_0x^2+b_0x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+b_3y^3+c_0x^4+c_1x^3y+c_2x^2y^2+c_3xy^3+c_4y^4+\psi_5(x,y)$, onde $\psi_5(x,y)$ é de grau maior igual a 5, tem a forma normal $d_0X^2+d_1Y^4$ se $b_3=0$ e $b_2^2-4a_0c_4\neq 0$.*

Estas condições obtidas pelo difeomorfismo são equivalentes às condições da primeira linha da tabela na Figura 2.5 encontrada no livro de Golubitsky e Schaefter [13]. Nesta tabela a notação $f_{\vec{v}\vec{v}\vec{v}}=d^3f(\vec{v},\vec{v},\vec{v})$ corresponde à derivada na direção do autovetor $\vec{v}$ associado ao autovalor $\lambda=0$ da matriz hessiana d^2g quando $det(d^2f)=0$. Também tem-se que $q=f_{\vec{v}\vec{v}\vec{v}\vec{v}}f_{xx}-3f^2_{\vec{v}\vec{v}x}$.

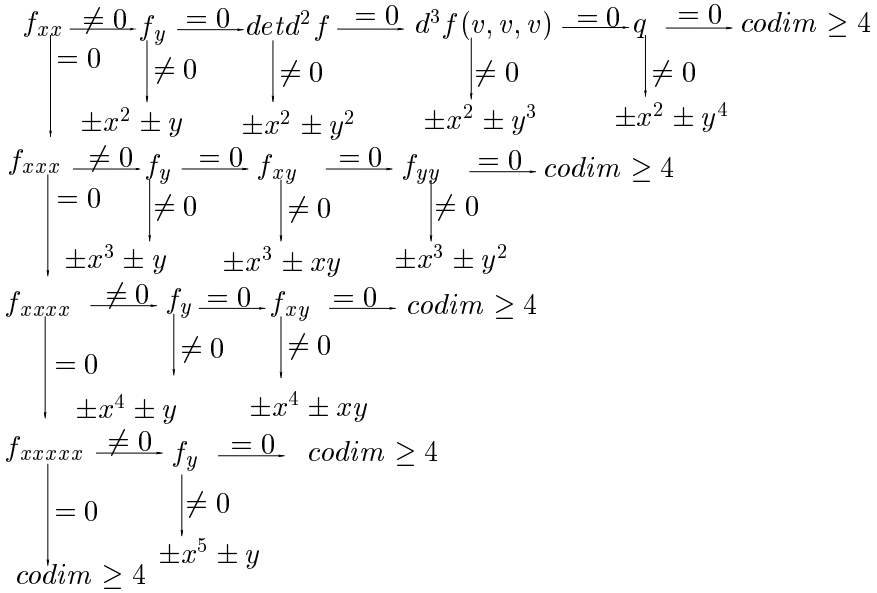


Figura 2.5: Reconhecimento de singularidades de codimensão ≤ 3.

Pode-se também fazer uma classificação do comportamento de uma função na vizinhança de um ponto singular usando a teoria de codimensão. René Thom foi o pioneiro no uso do conceito de codimensão na classificação de singularidades.

Proposição 2.9 *[12](Teorema de Thom) Seja $f \in M_2^2$, tal que a codimensão é ≥ 2 e ≤ 5, então (a menos da adição de uma forma quadrática não-degenerada em duas variáveis e multiplicação por ± 1) f é equivalente a um dos sete germes da lista abaixo.*

co-posto	codimensão	germe	nome
1	2	x^3	cúspide simples
1	3	x^4	tacnóide
1	4	x^5	cúspide de "Ramphoid"
1	5	x^6	oscnóide
2	4	$x^3 - xy^2$	umbílico eliptíco
2	4	$x^3 + y^3$	umbílico hiperbólico
2	5	$x^2 v + y^4$	umbílico parabólico

Tabela 2.1: Classificação.

Colocamos a seguir alguns resultados importantes para o uso da teoria de codimensão.

Proposição 2.10 *[12] Se $f \in \mathcal{E}_2$ tem codimensão 0 se, e somente se, f é não singular. Neste caso o germe é equivalente ao germe $(x, y) \to x$.*

Proposição 2.11 *[12] Um germe $f \in \mathcal{M}_2^2$ tem codimensão 1 se, e somente se, f é não-degenerado. Neste caso f é equivalente ao germe da forma $x^2 \pm y^2$.*

Se uma função $f \in \mathcal{M}_n^2$ tem codimensão ≥ 2, então a sua matriz hessiana é singular com posto $r < n$. O inteiro não-negativo $c = n - r$ é denominado o **co-posto** de f. O lema da Partição (Spliting Lemma) nos garante que pode-se reduzir o 2-jato de f para $\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i x_i^2$ na classificação.

Proposição 2.12 *[12](Lema de Partição) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe finitamente determinado de co-posto c, f é equivalente ao germe $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm ... \pm x_n^2$, onde $g \in \mathcal{M}_c^3$.*

Em particular, para o caso de $f \in \mathcal{M}_2^2$ temos os seguintes resultados.

Proposição 2.13 *[12] Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ um germe finitamente determinado de co-posto $c \in \{0, 1, 2\}$ f é equivalente ao germe*

$f(x, y) \sim \pm x^2 \pm y^2$, *se* $c = 0$

$f(x, y) \sim g(x) \pm y^2$ *ou* $f(x, y) \sim g(y) \pm x^2$, *se* $c = 1$ *e* $g \in \mathcal{M}_1^3$.

$f(x, y) \sim g(x, y)$, *se* $c = 2$ *e* $g \in \mathcal{M}_2^3$.

Proposição 2.14 *[12] Seja $f(x, y) \in M_2^2$ tendo co-posto=1, e codimensão finita $= k - 1$; então*
$f(x, y) \sim \pm x^k \pm y^2$ *ou*
$f(x, y) \sim \pm y^k \pm x^2$.

Um ponto singular de uma função diferenciável de co-posto ≤ 1 e codimensão finita k é usualmente classificado como singularidade do tipo A_k. Estas singularidades tem estado no repertório de geometria algébrica clássica.

Restringiu-se este trabalho a singularidades do tipo A_k para algum inteiro $k \geq 1$. Multiplicando $f(x, y)$ por escalares diferentes de zero que não afetem a curva $f(x, y) = 0$ pode-se supor que forma normal é $y^{k+1} \pm x^2$. Os casos $k = 1, 2, 3, 4, 5$ fornecem as seguintes figuras, que são tradicionalmente rotulados pelos seguintes títulos: node, cúspide simples, tacnóide, cúspide de "Ramph" e oscnóide, respectivamente.

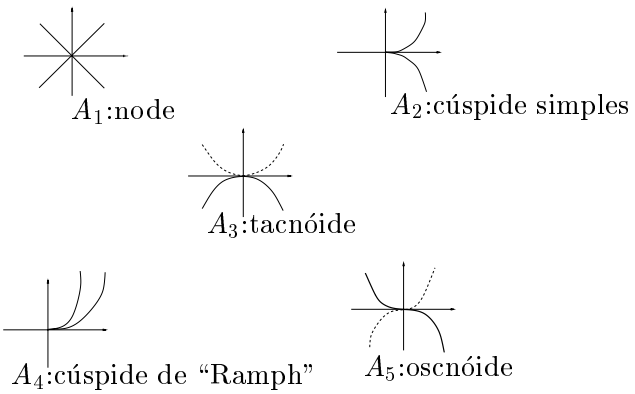


Figura 2.6: Formas Normais

A determinação da codimensão de uma função é facilitada com a Proposição 2.7 e o **lema de Nakayama**

Em [12] Gibson apresenta um procedimento para determinar a codimensão de uma função f com codimensão finita. A idéia é calcular **cod f** usando a Proposição 2.7. Abrevia-se $cod_k J_f$ por $cod_k f$. Sabe-se que

$codf = cod_0 f + cod_1 f + ...$, e

$cod_k f = dim \frac{J_f + \mathcal{M}_n^k}{J_f + \mathcal{M}_n^{k+1}}$,

assim deve-se calcular sucessivamente $cod_0 f, cod_1 f, ...$

Para calcular $cod_k f$ tem-se que encontrar uma base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ em $J_f + \mathcal{M}^k$; claramente, isto pode ser extraído de uma lista de monômios de grau k nas variáveis $x_1, ..., x_n$ que não estão em $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$, de fato isso acontece, pois o **lema de Nakayama** nos diz que se $\mathcal{M}^k \subseteq J_f + \mathcal{M}\mathcal{M}^k$, então $\mathcal{M}^k \subseteq J_f$.

O primeiro passo neste cálculo é sempre trivial, pois $cod_0 f = dim \frac{J_f + \mathcal{M}_n^0}{J_f + \mathcal{M}_n^1} = dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n} = 1$. Como $\mathcal{M}_n$ é ideal máximal e $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{E}_n$, temos que só o elemento constante não está em $\mathcal{M}_n$, isto é, $\mathcal{E}_n =< 1, x_1, ..., x_n >$ e $\mathcal{M}_n =< x_1, ..., x_n >$

Para obter a codimensão toma-se $k = 1, 2, 3, ...$; e verifica-se cada monômio de grau k em $x_1, ..., x_n$ pertence ou não em $J_f + M^{k+1}$.
Se esta condição vale para um monômio de grau m, então automaticamente ela vale para todos os monômios múltiplos dele.

Pode-se dispor os monômios nas variáveis x e y na seguinte estrutura piramidal:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Na k-ésima linha da cadeia, isto é, os monômios de grau k, deve-se excluír aqueles monômios que estão no ideal $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$, e consequentemente os seus múltiplos das linhas abaixo da cadeia. Os monômios remanescentes estarão no complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ em $J_f + \mathcal{M}^k$; a quantidade desses monômios é $cod_k f$. O cálculo termina quando obtém-se uma $i-$ésima linha com todos os monômios excluídos. A codimensão é a soma desses $cod_k f$, mais 1, pois devemos adicionar $cod_0 f = 1$.

Exemplo 9 *Considere a função $f(x) = x^{k+1}$, k inteiro, $k \geq 1$.*

Neste caso $J_f =< f_x >=< x^k >$, para $0 \leq s \leq k-1$ o único monômio de grau s em x é x^s que não pertence a $J_f + \mathcal{M}^{s+1}$, mas x^k pertence. Logo codf=k.

Exemplo 10 *Considere $f(x,y) = x^2y + y^4$. Temos $f_x = 2xy$ e $f_y = x^2 + 4y^3$.*

$J_f =< f_x, f_y >$, logo $x, y \notin J_f + \mathcal{M}^2$, mas $x^2 = f_y - 4y^3 \Rightarrow x^2 \in J_f + \mathcal{M}^3$ e $xy = \frac{1}{2} f_x \Rightarrow xy \in J_f + \mathcal{M}^3$. Isto implica que os monômios x^3, x^2y, xy^2 da terceira linha da cadeia serão excluídos, que os monômios x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3 da quarta linha serão excluídos, e assim por diante. Pode-se verificar ainda que $y^3 \notin J_f + \mathcal{M}^4$, mas $y^4 = \frac{1}{4} y f_y - \frac{1}{8} f_x \Rightarrow y^4 \in J_f + \mathcal{M}^5$. Logo, os monômios de grau 4 estão em $J_f + \mathcal{M}^4$, e o cálculo está finalizado. A codimensão é o número total de monômios que não foram excluídos +1, ou seja, $codf = 5$. Temos ainda que $\mathcal{M}^4 \subseteq J_f + \mathcal{M}^5$, logo pelo lema de Nakayama segue que $\mathcal{M}^4 \subseteq J_f$.

Exemplo 11 *Considere a curva algébrica dada pela equação*

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0.$$

Derivando a função $f(x,y)$ em relação a variável x, tem-se

$$f_x = 4x^3 + 2xy^2 - 4xy - y^2, \tag{2.20}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação a variável y, tem-se

$$f_y = 2x^2y - 2x^2 - 2xy + 2y, \tag{2.21}$$

Agora deve-se analisar a matriz hessiana no ponto singular $(0,0)$

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 12x^2 + 2y^2 - 4y & 4xy - 4x - 2y \\ 4xy - 4x - 2y & 2x^2 - 2x + 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right\}.$$

Portanto, o co-posto é igual a 1. Então a singularidade é do tipo A_k, isto é, tem a forma normal $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora tem que verifica se os monômios $x, y \in J_f + \mathcal{M}^2$.

Será que $x \in J_f + \mathcal{M}^2$?

Tem-se que x não pertence a $J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ menos monômios de grau maior igual a dois.

Será que $y \in J_f + \mathcal{M}^2$?

$$y = \frac{1}{2}f_y - x^2y + x^2 + xy,$$

ou seja,

$$y \in J_f + \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^3 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

Então tira-se este monômio e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$. Veja o quadro abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & x & & & (y) & & \\
 & & x^2 & & (xy) & & & (y^2) & \\
 & x^3 & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\
x^4 & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & & (y^4) \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Agora tem que verificar se os monômios $x^2, x^3, x^4, \cdots \in J_f + \mathcal{M}^2$.

O monômio x^2 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^3$.
O monômio x^3 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^4$.
O monômio x^4 se encontra em $J_f + \mathcal{M}^5$, uma vez que

$$x^4 = \frac{4}{5}((-\frac{1}{4})f_x + (-\frac{5x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{y}{8} + \frac{xy}{8} + \frac{x^2y}{4})f_y).$$

Conclui-se que a codimensão de f é igual a 4. Logo, a singularidade é do tipo A_4, isto é, cúspide de "Ramph".

Capítulo 3

Propriedades Geométricas

A técnica de caminhada consiste na obtenção de uma sequência de pontos da curva de interseção partindo de um ponto inicial e seguindo uma determinada direção para estimar novos pontos. A partir destes pontos pode-se aplicar métodos numéricos de aproximação para obter pontos mais próximos da curva de interseção. Espera-se, portanto, que em cada ponto, quanto maior for o contato entre a direção de caminhada e a curva de interseção, mais próximo da curva de interseção estará o próximo ponto obtido. Isso motivou uma série de trabalhos a propor técnicas para estimar adaptativamente as direções de caminhada de contato de ordem maior. Todos essas técnicas recorrem ao uso de propriedades geométricas locais da curva de interseção desconhecida.

Neste capítulo apresenta-se uma técnica para estimar a torção e a derivada da curvatura, que aplicada em conjunto com o método de estimar a curvatura proposto por Wu e Andrade [37] e as Eqs. 2.7 e 2.9, permite utilizar uma direção de caminhada de contato de terceira ordem, que será detalhada no Capítulo 4.

3.1 Trabalhos Correlatos

Com base nas propriedades geométricas das duas superfícies regulares, $F(u, v)$ e $G(p, q)$ que se intersectam, foram propostas técnicas para estimar ou determinar exatamente as propriedades locais da curva de interseção.

3.1.1 Vetores Tangentes

Quando se trata de uma interseção transversal (Figura 3.2.(a)), as duas formas mais usuais para obter o vetor tangente em cada ponto P são:

1. pela interseção dos planos tangentes das superfícies $F(u, v)$ e $G(p, q)$ em $P = F(u, v) = G(p, q)$ (Figura 3.1) [4], ou

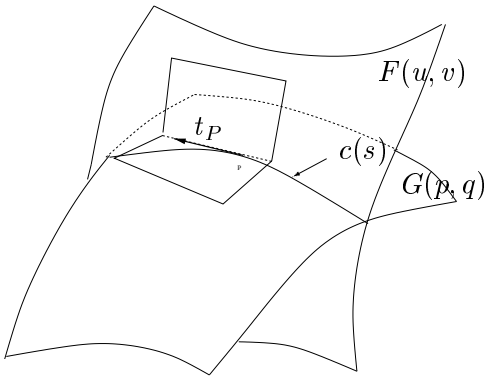
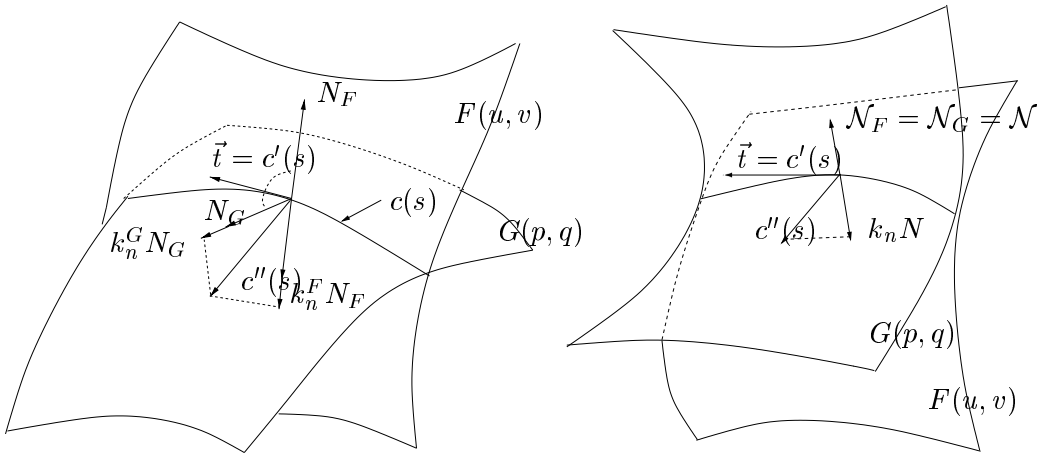


Figura 3.1: Vetor tangente.

2. pelo produto vetorial dos vetores normais de ambas superfícies [5].

$$\vec{t} = \frac{\mathcal{N}_F(u,v) \times \mathcal{N}_G(p,q)}{\mid \mathcal{N}_F(u,v) \times \mathcal{N}_G(p,q) \mid}.$$

Recentemente, Ye e Maekawa [38] derivaram expressões para obter o vetor tangente em pontos onde a interseção é tangencial (Figura 3.2.(b)) com contato de primeira ordem ($\mathcal{N}_F$ e $\mathcal{N}_G$ são paralelos e as derivadas de primeira ordem da curva não se anulam).



(a) Curva de interseção transversal (b) Curva de interseção tangencial

Figura 3.2: Curvas de interseções.

Neste caso, o vetor tangente unitário $\vec{t}$ pode ser representado como uma combinação linear de F_u e F_v, ou de G_p e G_q

$$\vec{t} = u' F_u + v' F_v = p' G_p + q' G_q, \tag{3.1}$$

Como nestes pontos os vetores normais das duas superfícies são paralelos ($\mathcal{N}_F \parallel \mathcal{N}_G$), temos que as curvaturas normais k_n^F e k_n^G são iguais

$$L_F(u')^2 + 2M_F u'v' + N_F(v')^2 = L_G(p')^2 + 2M_G p'q' + N_G(q')^2. \tag{3.2}$$

As Eqs. 3.1 e 3.2 formam um sistema de quatro equações não lineares e em quatro variáveis. Este sistema pode ser resolvido por representar p' e q' em termos de combinação linear de u' e v' a partir da Eq. 3.1

$$p' = a_{11}u' + a_{12}v' \;\; e \;\; q' = a_{21}u' + a_{22}v', \tag{3.3}$$

onde

$$a_{11} = \frac{(F_u \times G_q)\cdot\mathcal{N}}{(G_s \times G_q)\cdot\mathcal{N}} \quad a_{12} = \frac{(F_v \times G_q)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}} \quad a_{21} = \frac{(G_p \times F_u)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}} \quad a_{22} = \frac{(G_p \times F_v)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}}. \tag{3.4}$$

Substituindo na Eq. 3.2 as igualdades dadas pela Eq. 3.3 obtém-se

$$b_{11}(u')^2 + 2b_{12}(u')(v') + b_{22}(v')^2 = 0, \tag{3.5}$$

onde

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}^2 L_G + 2a_{11}a_{21}M_G + a_{21}^2 N_G - L_F, \\ b_{12} &= a_{11}a_{12}L_G + 2(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})M_G + a_{21}a_{22}N_G - M_F, \\ b_{22} &= a_{12}^2 L_G + 2a_{21}a_{22}M_G + a_{22}^2 N_G - N_F. \end{aligned}$$

Denotando $\omega = \frac{u'}{v'}$, tem-se o polinômio de grau 2 na variável ω

$b_{11}\omega^2 + 2b_{12}\omega + b_{22} = 0,$

ou $\mu = \frac{v'}{u'}$, tem-se o polinômio de grau 2 na variável μ

$b_{22}\mu^2 + 2b_{12}\mu + b_{11} = 0,$

e resolvendo Eq. 3.5 para ω ou μ, pode-se exprimir $\vec{t}$ como

$$\vec{t} = \frac{\omega F_u + F_v}{|\omega F_u + F_v|}, \quad se \quad b_{11} \neq 0$$

ou

$$\vec{t} = \frac{F_u + \mu F_v}{|F_u + \mu F_v|}, \quad se \quad b_{11} = 0 \;\; e \;\; b_{22} \neq 0$$

ou

$$\vec{t} = \frac{v' F_v}{|v' F_v|}, \quad se \quad b_{11} = 0 \;\; e \;\; b_{22} = 0$$

ou

$$\vec{t} = \frac{u' F_u}{|u' F_u|}, \quad se \quad b_{11} = 0 \;\; e \;\; b_{22} = 0. \tag{3.6}$$

3.1.2 Curvatura

Barnhill e Kersey [5] propuseram estimar o raio de curvatura num ponto P a partir de dois pontos vizinhos Q e R (Figura 3.3). Como o círculo que circunscreve estes três pontos é no limite o círculo osculador da curva em P, a expressão para o raio de curvatura aproximado é

$$\rho = \frac{|a||b||a-b|}{2|a \times b|}, \tag{3.7}$$

onde $\vec{a} = Q - P$ e $\vec{b} = R - P$.

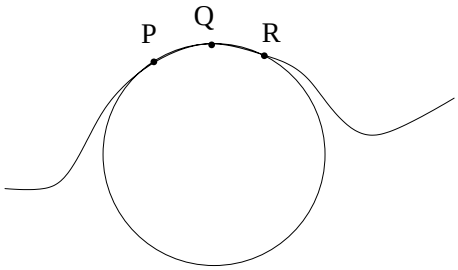


Figura 3.3: Uma estimativa para o círculo osculador.

Stoyanov [30] derivou o vetor curvatura $c''(s)$ para curvas de interseção transversais usando os vetores normais das duas superfícies que se intersectam.

O vetor normal da curva de interseção no ponto P é perpendicular ao vetor tangente, logo ele está no plano formado pelos vetores normais dessas duas superfícies (Figura 3.2.(a)). Assim, ele pode ser expresso como uma combinação linear dos dois vetores

$$c''(s) = a_1 \mathcal{N}_F + a_2 \mathcal{N}_G. \tag{3.8}$$

Fazendo o produto escalar dos vetores $\mathcal{N}_F$ e $\mathcal{N}_G$ pela Eq. 3.11, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \mathcal{N}_F \cdot \mathcal{N}_F a_1 + \mathcal{N}_F \cdot \mathcal{N}_G a_2 = \mathcal{N}_F \cdot c''(s) \\ \mathcal{N}_G \cdot \mathcal{N}_F a_1 + \mathcal{N}_G \cdot \mathcal{N}_G a_2 = \mathcal{N}_G \cdot c''(s), \end{cases} \tag{3.9}$$

onde

$$\mathcal{N}_F \cdot c''(s) = \mathcal{N}_F \cdot F_{uu}(u')^2 + \mathcal{N}_F \cdot F_{uv} 2u'v' + \mathcal{N}_F \cdot F_{vv}(v')^2$$
$$\mathcal{N}_G \cdot c''(s) = \mathcal{N}_G \cdot G_{uu}(u')^2 + \mathcal{N}_G \cdot G_{uv} 2u'v' + \mathcal{N}_G \cdot G_{vv}(v')^2.$$

Resolvendo o sistema Eq. 3.9, obtém-se o vetor $c''(s)$ e a curvatura correspondente $\kappa = ||c''(s)||$.

Wu e Andrade [37] propuseram mais tarde uma técnica simples e elegante para estimar o círculo osculador no ponto interseção P com uso dos vetores tangentes no ponto P e num ponto adjacente Q, como se segue (Figura 3.4):

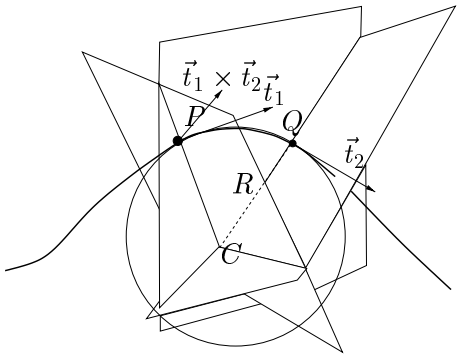


Figura 3.4: Uma estimativa para o círculo osculador segundo Wu-Andrade [37].

Centro (C): é a interseção de três planos: o plano que contém Q e tem $\vec{t}_1$ como vetor normal, o plano que contém P e tem $\vec{t}_2$ como vetor normal, e o plano que contém P e tem o vetor normal $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$.

Raio (R): a distância entre C e P.

Assim, a curvatura κ e o vetor normal $vecn$ em P são obtidos com uso das seguintes expressões

$$\vec{n} = C - P \quad e \quad \kappa = \frac{1}{R} \tag{3.10}$$

Ye e Maekawa [38] obtiveram expressões para a curvatura tanto nos pontos regulares quanto nos pontos singulares.

Para interseções transversais, o vetor normal da curva interseção no ponto P é perpendicular ao vetor tangente, logo ele está no plano formado pelos vetores normais das duas superfícies (Figura 3.2.(a)). Assim ele pode ser expresso como uma combinação linear dos dois vetores:

$$c''(s) = \alpha \mathcal{N}_F + \beta \mathcal{N}_G, \tag{3.11}$$

onde α e β são os incógnitas. A curvatura normal em P na direção $\vec{t}$ é a projeção do vetor normal $\vec{n}$ sobre o vetor normal unitário da superfície em P dado por

$$k_n = \kappa \vec{n} \cdot \mathcal{N} = c''(s) \cdot \mathcal{N}. \tag{3.12}$$

Com isso, temos

$$\begin{array}{l} {k_n}^F = \alpha + \beta \cos(\theta) \quad e \\ {k_n}^G = \alpha \cos(\theta) + \beta, \end{array} \tag{3.13}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores normais $\mathcal{N}_F$ e $\mathcal{N}_G$.

Solucionando os coeficientes α e β pelo sistema Eq. 3.13, e substituindo-os na Eq. 3.11, temos

$$c''(s) = \frac{{k_n}^F - {k_n}^G \cos\theta}{\sin^2\theta} \mathcal{N}_F + \frac{{k_n}^G - {k_n}^F \cos\theta}{\sin^2\theta} \mathcal{N}_G, \tag{3.14}$$

onde $\cos\theta = \mathcal{N}_F \cdot \mathcal{N}_G$ e K_n pode ser calculado com a ajuda da Eq. 3.12. Logo, a expressão da curvatura é dada exatamente por

$$\kappa = \frac{1}{|\sin\theta|} \sqrt{({k_n}^F)^2 + ({k_n}^G)^2 - 2{k_n}^F {k_n}^G \cos\theta} \tag{3.15}$$

Adicionalmente, Ye e Maekawa obtiveram um conjunto de fórmulas para calcular as propriedades geométricas locais em pontos cuja interseção é tangencial, isto é, com os vetores normais paralelos, como ilustra a Figura 3.2.(b).

Neste caso, o vetor normal $\vec{n}$ da curva de interseção $c(s)$ em P pode ser expresso pela equação

$$c''(s) = F_{uu}(u')^2 + 2F_{uv}u'v' + F_{vv}(v')^2 + F_u u'' + F_v v'' \tag{3.16}$$

$$= G_{pp}(p')^2 + 2G_{pq}p'q' + G_{qq}(q')^2 + G_p p'' + G_q q''.$$

Para obter o vetor normal $\vec{n} = \kappa c''(s)$, necessitamos determinar os coeficientes (u'', v'') e (p'', q''). A Eq. 3.16 contém duas equações e quatro variáveis. Como os componentes normais de ambos os lados da Eq. 3.16 são os mesmos, ela pode ser reescrita como

$$F_u u'' + F_v v'' = G_p p'' + G_q q'' + \Lambda, \tag{3.17}$$

onde

$$\Lambda = G_{pp}(p')^2 + 2G_{pq}p'q' + G_{qq}(q')^2 - F_{uu}(u')^2 - 2F_{uv}u'v' - F_{vv}(v')^2$$

Da Eq. 3.17, (p'', q'') pode ser expresso por (u'', v'') por

$$p'' = a_{11}u'' + a_{12}v'' + a_{13} \tag{3.18}$$

$$q'' = a_{21}p'' + a_{22}q'' + a_{23},$$

onde a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são os coeficientes definidos pela Eq. 3.4, e a_{13} e a_{23} são obtidos por

$$a_{13} = \frac{(\Lambda \times G_q) \cdot \mathcal{N}}{(G_p \times G_q) \cdot \mathcal{N}} \tag{3.19}$$

$$a_{23} = \frac{(G_p \times \Lambda) \cdot \mathcal{N}}{(G_q \times G_p) \cdot \mathcal{N}}. \tag{3.20}$$

Ainda necessita-se de mais duas equações para encontrar (u'', v''). Uma equação adicional pode ser obtida diferenciando $c(s)$

$$c(s) = F(u(s), v(s)) = G(p(s), (q(s))$$

em P três vezes e projetando o vetor resultante sobre o vetor normal $\mathcal{N}$:

$$3[L_F u'u'' + M_F(u''v' + u'v'') + N_F v'v''] + III_F \tag{3.21}$$

$$= 3[L_G p'p'' + M_G(p''q' + p'q'') + N_G q'q''] + III_G$$

Uma outra equação adicional pode ser obtida do fato de o vetor normal $\vec{n} = c''(s)$ ser perpendicular ao vetor tangente $\vec{t} = c'(s)$:

$$c'' \cdot \vec{t} = (F_u \cdot \vec{t})u'' + (F_v \cdot \vec{t})v'' + (F_{uu} \cdot \vec{t})(u')^2 + (F_{uv} \cdot \vec{t})2u'v'' + (F_{vv} \cdot \vec{t})(v')^2 = 0 \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. 3.18 na Eq. 3.21, pode-se resolver o sistema linear formado pelas Eqs. 3.21 e 3.22 para u'' e v'', e com isso, calcular o vetor curvatura κ através da Eq. 3.16.

3.1.3 Torção

Ye e Maekawa [38] obtiveram também expressões da torção para interseções transversais e não transversais.

Nas interseções transversais, a derivada da curvatura com respeito ao comprimento de arco pode ser calculado a partir de

$$\kappa' = c''' \cdot \vec{n}, \quad (3.23)$$

onde

$$c''' = -\kappa^2 t + \frac{{\lambda_n}^F - {\lambda_n}^G \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathcal{N}_F + \frac{{\lambda_n}^G - {\lambda_n}^F \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathcal{N}_G$$

e

$$\vec{n} = \frac{c''(s)}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{{\kappa_n}^F - {\kappa_n}^G \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathcal{N}_F + \frac{{\kappa_n}^G - {\kappa_n}^F \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathcal{N}_G\right) \quad (3.24)$$

O parâmetro λ_n é dado por

$$\lambda_n = 3(Lu'v'' + M(u''v' + u'v'') + Nu'v'') + r_{uuu}\mathcal{N}(u')^3 + 3r_{uuv}\mathcal{N}(u')^2v' + 3r_{uvv}\mathcal{N}u'(v')^2 + r_{vvv}\mathcal{N}(v')^3.$$

Note que as derivadas u', u'', v' e v'' podem ser obtidas ao solucionar os seguintes sistemas lineares

$$\begin{cases} Eu' + Fv' = r_u \cdot t \\ Fu' + Gv' = r_v \cdot t \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Eu'' + Fv'' = n \cdot r_u - \frac{E_u}{2}(u')^2 - E_v u'v' - (F_v - \frac{G_u}{2})(v')^2, \\ Fu'' + Gv'' = n \cdot r_v - (F_u - \frac{E_v}{2})(u')^2 - G_u u'v' - \frac{G_v}{2})(u')^2 \end{cases}$$

Foi mostrado adicionalmente que a torção em P pode ser obtida através da expressão

$$\tau = -\frac{1}{\kappa \sin^2\theta}((\lambda_n{}^F - \lambda_n{}^G \cos\theta)(\vec{b}\cdot\mathcal{N}_F) + (\lambda_n{}^G - \lambda_n{}^F \cos\theta)(\vec{b}\cdot\mathcal{N}_G)), \tag{3.25}$$

onde a curvatura κ é dada pela Eq. 3.15s e o vetor binormal pela expressão $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$.

Para interseções não transversais, os vetores derivadas de terceira ordem e ordem superior podem ser determinados por processo análogo ao caso de $c''(s)$.

3.2 Nossa Proposta

Por causa da precisão numérica, a cálculo do vetor curvatura e da torção através das Eqs. 3.24 e 3.25 só são confiáveis quando

$$\cos\theta = \mathcal{N}_F \cdot \mathcal{N}_G < 1 - \epsilon. \tag{3.26}$$

Isso significa que, numa vizinhança de um ponto singular, valores errôneos para κ e τ podem ser gerados. Isso conduz a procura de uma técnica mais robusto, mesmo que utilize aproximações em vez dos valores exatos.

Similar ao proposto por Wu e Andrade, nossa técnica depende unicamente dos cálculos dos vetores tangentes da curva de interseção. Ele é baseado nos significados geométricos intuitivos das propriedades locais da curva expressas pela Eq. 2.10.

Das Eqs. 2.19 e 3.6 pode-se obter o vetor tangente, tanto quando o ponto de interseção é transversal como também não-transversal. O vetor curvatura (normal a curva) e a curvatura podem ser calculados pela Eq. 3.10. Conhecendo os vetores tangente $\vec{t}$ e normal $\vec{n}$, o vetor binormal $\vec{b}$ é calculado pelo produto vetorial $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$. Desta maneira, um **triedro de Frenet** pode ser definido em qualquer ponto da curva de interseção, e com uso das Eqs. (2.11) e (2.12) pode-se estimar a torção τ e o seu sinal.

Finalmente, considerando dois pontos sucessivos $\alpha(s - \Delta s)$ e $\alpha(s)$ na interseção, a derivada da curvatura é simplesmente obtida por

$$\kappa'(s) \approx \frac{\kappa(s) - \kappa(s - \Delta s)}{\alpha(s) - \alpha(s - \Delta s)}. \tag{3.27}$$

3.3 Resultados e Comparações com Valores Exatos

Nesta seção apresenta-se em primeiro lugar resultados de comparação entre valores geométricos diferenciais determinados pelo nossa técnica, com valores calculados com uso das Eqs. 2.3 e

2.4. Para isso, trabalha-se apenas com pares de superfícies cuja interseção tem uma representação paramétrica conhecida.

Não foi possível obter a comparação das propriedades obtidas pelas Eqs. 2.3 e 2.4 com a técnica Ye-Maekawa, pois esta técnica necessita de mais informações do que simplesmente o valor do ponto na curva.

Em seguida mostra-se comparativamente os resultados do nossa técnica com os de Ye-Maekawa.

O primeiro teste é a interseção entre as superfícies

$F_1(u,v) = (4+\cos(4u))\cos(u)+v(\cos(4u)+\sin(4u))\cos(u), (4+\cos(4u))\sin(u)+v(\cos(4u)+\sin(4u))\sin(u), \sin(4u)+v(\sin(4u)-\cos(4u))$, $0 \leq u \leq 2\pi e - 0.5 \leq v \leq 0.5$

$G_1(p,q) = ((4+\cos(p))\sin(q), (4+\cos(p))\cos(q), \sin(p))$, $0 \leq s, w \leq 2\pi$

cuja solução é a curva do tipo $(1,4)$-toro dada por

$C_1(s) = ((4+\cos(4s))\cos s, (4+\cos(4s))\sin s, \sin(4s))$

A Figura 3.5 representa geometricamente a interseção de $F_1(u,v)$ e $G_1(p,q)$.

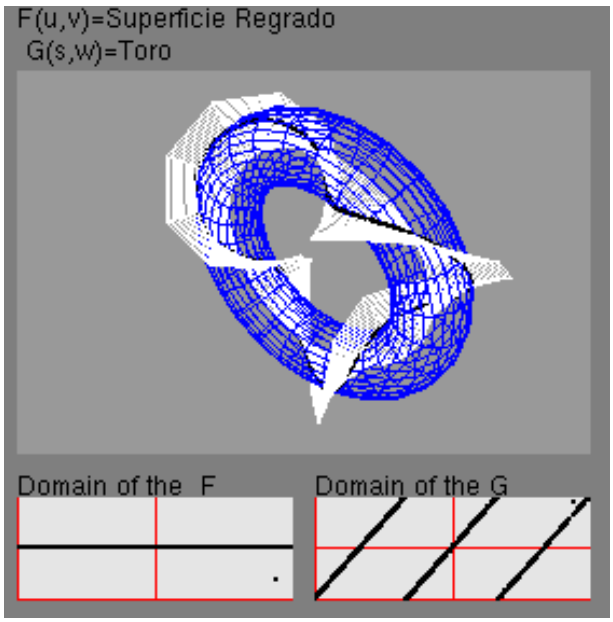


Figura 3.5: Interseção Superfície Regrada/Toro.

A Tabela 3.1 apresenta os desvios entre os valores estimados e os valores exatos quando o referencial móvel varia com o parâmetro s. Para simplificar, fixou-se $\Delta s = 0.01$.

$C_1(u) = ((4+\cos(4u))\cos u, (4+\cos(4u))\sin u, \sin(4u))$, $\Delta u = 0.01$										
u	Ponto	κ			τ			κ'		
		Exato	Wu-Andrade	Razão	Exato	Nossa Prop.	Razão	Exato	Nossa Prop.	Razão
-9.86	(-3.52,1.59,-0.99)	0.5690	0.5688	1.0004	0.5142	0.5130	1.0024	-0.0069	-0.0068	1.0069
-9.85	(-3.57,1.57,-0.99)	0.5686	0.5682	1.0006	0.4957	0.4946	1.0024	-0.0098	-0.0098	1.0056
-9.84	(-3.63,1.55,-0.99)	0.5679	0.5675	1.0007	0.4778	0.4767	1.0024	-0.0126	-0.0126	1.0049
-0.02	(4.99,-0.05,-0.04)	0.5124	0.5123	1.0002	0.1262	0.1262	0.9998	-0.0035	-0.0035	1.0004
-0.01	(5.00,-0.00,-0.00)	0.5123	0.5122	1.0001	0.1256	0.1257	0.9997	-0.0018	-0.0018	1.0003
0.00	(4.99,0.05,0.04)	0.5122	0.5122	1.0000	0.1254	0.1255	0.9996	0.0000	0.0000	1.0000
0.01	(4.99,0.10,0.08)	0.5123	0.5123	0.9999	0.1256	0.1257	0.9995	0.0018	0.0018	1.0002
0.02	(4.99,0.15,0.12)	0.5124	0.5126	0.9997	0.1262	0.1263	0.9994	0.0035	0.0035	1.0001
6.53	(4.36,1.14,0.85)	0.5415	0.5425	0.9982	0.2451	0.2457	0.9977	0.0322	0.0323	0.9985
6.54	(4.32,1.18,0.87)	0.5435	0.5445	0.9982	0.2553	0.2559	0.9976	0.0324	0.0325	0.9984
6.55	(4.27,1.21,0.89)	0.5454	0.5464	0.9982	0.2660	0.2666	0.9976	0.0325	0.0326	0.9984

Tabela 3.1: Propriedades Geométricas da curva C_1.

O segundo teste é a interseção entre as superfícies

$F_2(u, v) = (\cos(u), \sin(u) - 1, v)$, com $0 \leq u \leq 2\pi, -3.0 \leq v \leq 3.0$,

$G_2(p, q) = (2\cos(p)\cos(q), 2\cos(p)\sin(q), 2\sin(p))$, com $0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq w \leq \pi$.

cuja a solução é

$C_2(s) = (\cos(u), \sin(u) - 1, 2\sin(u/2))$.

A Figura 3.6 representa geometricamente a interseção de $F_2(u, v)$ e $G_2(p, q)$.

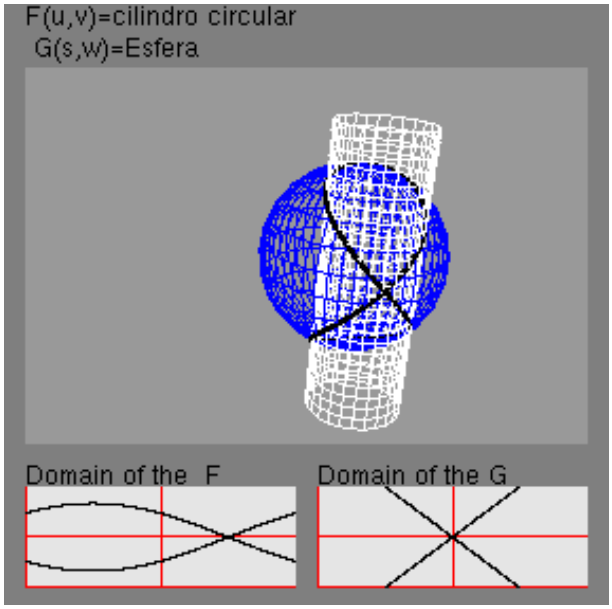


Figura 3.6: Interseção Cilindro Circular/Esfera.

A Tabela 3.2 apresenta os desvios dos valores estimados dos valores exatos quando o referêncial móvel varia com o parâmetro s.

$C_2(u) = (\cos(u), \sin(u) - 1, 2\sin(u/2))$, $\Delta u = 0.01$										
u	Ponto	κ			τ			κ'		
		Exato	Wu-Andrade	Razão	Exato	Nossa Prop.	Razão	Exato	Nossa Prop.	Razão
-3.97	(-0.68,-0.27,-1.83)	0.9350	0.9367	0.9981	0.2201	0.2203	0.9992	0.3251	0.3254	0.9992
-3.96	(-0.69,-0.27,-1.83)	0.9385	0.9402	0.9981	0.2180	0.2182	0.9992	0.3250	0.3252	0.9992
-3.95	(-0.69,-0.28,-1.84)	0.9420	0.9437	0.9982	0.2159	0.2161	0.9992	0.3248	0.3250	0.9992
-0.02	(1.00,-1.01,-0.01)	0.5000	0.5000	1.0000	-0.3750	-0.3750	1.0000	-0.0020	-0.0020	1.0000
-0.01	(1.00,-1.00,-0.00)	0.5000	0.5000	1.0000	-0.3750	-0.3750	1.0000	-0.0010	-0.0010	1.0000
-0.00	(1.00,-0.99,0.01)	0.5000	0.5000	1.0000	-0.3750	-0.3750	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.01	(1.00,-0.98,0.02)	0.5000	0.5000	1.0000	-0.3750	-0.3750	1.0000	0.0010	0.0010	1.0000
0.02	(1.00,-0.97,0.03)	0.5000	0.5000	1.0000	-0.3750	-0.3750	1.0000	0.0020	0.0020	1.0000
3.45	(-0.950,-1.313,1.975)	1.0872	1.0862	1.0009	0.0909	0.0908	1.0004	-0.1908	-0.1907	1.0004
3.46	(-0.947,-1.323,1.973)	1.0853	1.0843	1.0009	0.0937	0.0937	1.0004	-0.1959	-0.1958	1.0004
3.47	(-0.943,-1.332,1.971)	1.0833	1.0822	1.0009	0.0965	0.0965	1.0004	-0.2010	-0.2009	1.0004

Tabela 3.2: Propriedades Geométricas da curva C_2.

Vale a pena notar que os valores estimados estão próximos dos exatos mesmo com passos relativamente grandes. O sinal da torção estimada coincide com o sinal do torção exata.

Para pontos singulares é esperado que com passos menores tenha-se resultados melhores, como ilustra a Tabela 3.3. Observe ainda que quanto menor é Δs, mais próximos os valores estimados estão dos exatos para ambos os pontos $c_1(0,0)$ e $c_2(0,0)$. Na técnica da caminhada um passo razoável varia entre $0.01 \leq L \leq 0.1$. Pode-se observar que os resultados que obtidos são razoáveis.

$C_1(0.0)$: Exato $\kappa = 0.5122$,Exato $\tau = 0.1254$, Exato $\kappa' = 0.0000$						
Δs	κ	$\frac{W_{u-Andrade}}{E_{xato}}(\kappa)$	τ	$\frac{N_{ossaProp.}}{E_{xato}}(\tau)$	κ'	$\frac{N_{ossaProp.}}{E_{xato}}(\kappa')$
0.2	0.5181	0.9887	0.1470	0.8535	-0.0006	-
0.1	0.5139	0.9967	0.1306	0.9606	-0.0001	-
0.01	0.5122	1.0000	0.1255	0.9996	0.0000	1.0000
0.001	0.5122	1.0000	0.1254	1.0000	0.0000	1.0000
$C_2(0.0)$: Exato $\kappa = 0.5000$, Exato $\tau = -0.3750$, Exato $\kappa' = 0.0000$						
Δs	κ	$\frac{E_{stimado}}{E_{xato}}(\kappa)$	τ	$\frac{E_{stimado}}{E_{xato}}(\tau)$	κ'	$\frac{E_{stimado}}{E_{xato}}(\kappa')$
0.2	0.5007	0.9986	-0.3760	0.9972	0.0000	1.0000
0.1	0.5002	0.9996	-0.3753	0.9993	0.0000	1.0000
0.01	0.5000	1.0000	-0.3750	1.0000	0.0000	1.0000
0.001	0.5000	1.0000	-0.3750	1.0000	0.0000	1.0000

Tabela 3.3: Influência de Δs nos valores estimados.

3.4 Comparação com a Técnica Ye-Maekawa

Restringiu-se a comparação do nossa técnica com a Ye-Maekawa, por serem os únicos a apresentarem uma técnica para determinar a torção e derivada da curvatura. A técnica proposta por Ye e Maekawa fornece um cálculo exato das propriedades geométricas locais de uma curva de interseção. Entretando, devido a problemas de aritmética de ponto flutuante, para os casos onde a condição indicada pela Eq. 3.26 não é satisfeita (isto é, os vetores normais de ambas as superfícies são quase paralelos), o cálculo de κ, κ', e τ não é numericamente confiável, devido ao termo $\frac{1}{\sin\theta}$ em Eqs. 3.24 e 3.25.

A Tabela 3.4 apresenta as propriedades locais da curva de interseção determinada pela nossa técnica e pela técnica Ye-Maekawa. A curva de interseção foi traçada com o passo de tamanho $L = 0.01$.

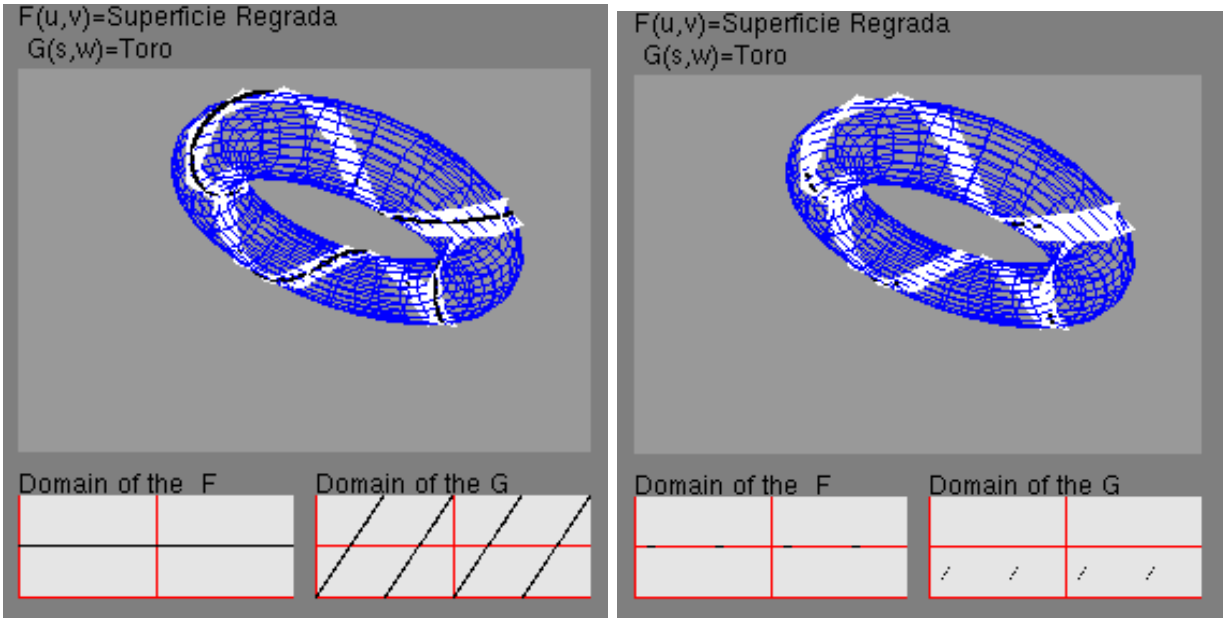
Superfície Regrada $F_1(u,v) = (4+\cos(4u))\cos(u) + v(0.00000001 * cos(4u) + 0.99999999 * sin(4u)) * cos(u)$, $(4+\cos(4u))\sin(u) + v(0.00000001 * cos(4u) + 0.99999999 * sin(4u)) * sin(u)$, $\sin(4u) + v(0.00000001 * sin(4u) - 0.99999999 * cos(4u)), 0 \leq u \leq 2\pi e - 0.5 \leq v \leq 0.5$ $Toro \quad G_1(p,q) = [(4+\cos(p))\sin(q), (4+\cos(p))\cos(q), \sin(p)], 0 \leq p, q \leq 2\pi$							
Pontos Traçados	Cos(θ)	κ		τ		κ'	
		Ye-Maek.	Wu-Andrade	Ye-Maek.	Nossa Est.	Ye-Maek.	Nossa Est.
(-3.466 1.618 -0.985)	0.9999999	0.544909	0.569099	0.654178	0.518759	-0.0000000001222	-0.0063964385
(-3.475 1.615 -0.986)	0.9999999	0.719336	0.569047	0.747620	0.520539	-0.0000000000593	-0.0052067827
(-3.485 1.611 -0.987)	0.9999999	0.571359	0.568970	0.474029	0.511158	0.0000000000399	-0.0077316070
(-3.494 1.608 -0.988)	0.9999999	infinito	0.568898	-0.00000	0.511021	infinito	-0.0072266777

Cilindro $F_2(u,v) = (\cos(u), \sin(u) - 1, v), 0 \leq u \leq 2\pi, -3.0 \leq v \leq 3.0,$ Esfera $G_2(p,q) = (2\cos(p)\cos(q), 2\cos(p)\sin(q), 2\sin(p)), 0 \leq p \leq 2\pi, 0 \leq q \leq \pi.$							
Pontos Traçados	Cos(θ)	κ		τ		κ'	
		Ye-Maek.	Wu-Andrade	Ye-Maek.	Nossa Est.	Ye-Maek.	Nossa Est.
(-0.728 -0.315 1.836)	0.1573029	0.939439	0.93781	0.217445	0.219372	0.316894	0.325097
(-0.722 -0.308 1.840)	0.1539310	0.942687	0.94106	0.215500	0.217445	0.317005	0.324930
(-0.715 -0.301 1.843)	0.1505841	0.945933	0.94431	0.213537	0.215500	0.317039	0.324695
(-0.709 -0.295 1.847)	0.1472627	0.949175	0.94755	0.211556	0.213537	0.316992	0.324390

Cilindro Generalizado $F_3(u,v) = (3.5+\cos(3.0u))\cos(u), (3.5+\cos(3.0u))\sin(u), v), 0 \leq u \leq 2\pi, -1.0 \leq v \leq 1.0,$ Toro $G_3(p,q) = (3.5+\cos(q))\cos(p), (3.5+\cos(q))\sin(p), \sin(q)), -\pi \leq p, q \leq 2\pi.$							
Pontos Traçados	Cos(θ)	κ		τ		κ'	
		Ye-Maek.	Wu-Andrade	Ye-Maek.	Nossa Est.	Ye-Maek.	Nossa Est.
(1.880 1.988 0.645)	-0.623760	0.485811	0.485389	0.969451	0.975825	0.051255	0.084414
(1.888 1.987 0.651)	-0.618415	0.486647	0.486228	0.963098	0.969450	0.051480	0.083898
(1.896 1.986 0.656)	-0.613077	0.487478	0.487061	0.956767	0.963097	0.051679	0.083360
(1.904 1.985 0.662)	-0.607749	0.488303	0.487889	0.950459	0.956766	0.051851	0.082801

Tabela 3.4: Determinação das propriedades locais.

O primeiro par de superfícies, $F_1(u,v)$ e $G_1(p,q)$, é quase não-transversal ($\cos\theta \sim 1.0$). Neste caso, nossa técnica foi capaz de determinar as propriedades locais em qualquer ponto da curva de interseção (Figura 3.7.a), enquanto a técnica proposta por Ye e Maekawa não pode fornecer corretamente os dados para traçá-la completamente (Figura 3.7.b). Isso deve-se ao fato de $\cos\theta \sim 1.0$, isto é, $sen\theta \sim 0$ na vizinhança dos pontos singulares.



(a) (b)

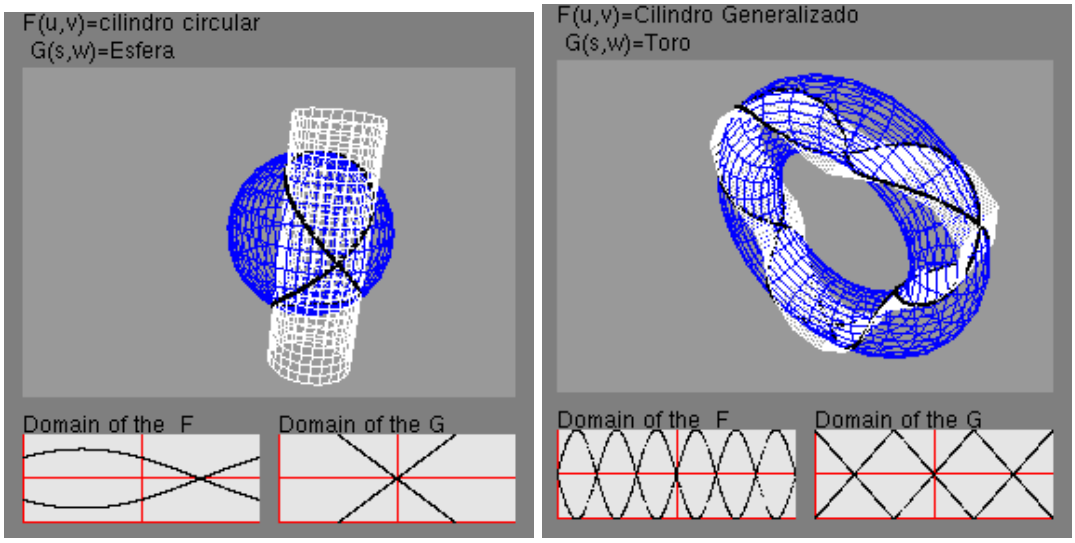
Figura 3.7: Superfície Regrada/Toro.

O segundo par, $F_2(u,v)$ e $G_2(p,q)$ Figura 3.8.(a) e o terceiro par, $F_3(u,v)$ e $G_3(p,q)$ Figura 3.8.(b) têm também alguns pontos interseção não-transversais.

Devido a dificuldade para comparar a técnica Ye-Maekawa com os valores exatos das propriedades geométricas, deixou-se para o Cap. 4 a comparação do desempenho da caminhada de ordem 3, utilizando as propriedades geométricas obtidas pela nosso técnica e a técnica Ye-Maekawa, pois quanto melhor o desempenho mais aproximadas estarão as propriedades geométricas, portanto a direção de caminhada de ordem 3 fornecerá um ponto que precisará de menos itereções para convergir para a curva de interseção.

3.5 Comentários

Apresentou-se uma técnica simples para estimar as propriedades geométricas locais da curva de interseção de duas superfícies regulares. Nos casos testados, a nossa técnica para uma estimativa das propriedades geométricas tem se mostrado mais robusto do que a técnica proposto por Ye e Maekawa na vizinhança de pontos singulares, isto é, pontos que não satisfaçam a Eq. 3.26. A



(a) (b)

Figura 3.8: (a) Cilindro Circular/Esfera e (b) Cilindro Generalizado/Toro..

primeira interseção $F_1(u,v) - G_1(p,q)$ na Tabela 3.4 corrobora esta afirmação. Fora desta região tangencial, a nossa técnica com passo $L = 0.01$ tem obtidos resultados próximos dos obtidos pela técnica Ye-Maekawa. Isto pode ser observado pelos dados fornecidos pelas interseções $F_2(u,v) - G_2(p,q)$ e $F_3(u,v) - G_3(p,q)$ mostrados na Tabela 3.4. Estes resultados possibilitaram elaborar um procedimento de caminhada de contato de ordem 3, que será detalhado no Cap. 4.

Capítulo 4

Direções de Caminhada

Direção e passo são dois importantes ingredientes para uma boa caminhada ao longo de uma curva de interseção desconhecida. Eles são usados para estimar o próximo ponto no traçado. Por causa do compromisso entre eficiência e precisão, este ponto não está geralmente na curva de interseção. Iterações usando método numéricos são necessárias para melhorar a precisão dos pontos alcançados em cada passo. É claro que, quanto mais próximo se encontra o ponto da curva [15], menos iterações são necessárias para melhorar suas coordenadas em relação às coordenadas exatas dos pontos sobre a curva de interseção.

4.1 Trabalhos Correlatos

Nesta seção sintetiza-se os principais resultados encontrados na literatura referentes as direções de caminhada.

4.1.1 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 1

Barnhill e outros [4, 5] usaram como direção de caminhada o vetor tangente em cada ponto alcançado. Suponha que seja dado um ponto P_0 na curva de interseção. Então, o próximo ponto estimado é dado por $Q_i = P_{i-1} + L\vec{t}$, onde L é o tamanho do passo e $\vec{t}$ é o vetor tangente unitário. Para refinar este ponto, isto é, para que ele convirja para um ponto P_i na curva de interseção, usaram a matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose [5, 9] (Figura 4.1).

Barnhill, Farin, Jordan e Piper usaram passos constantes ao longo do traçado em [4]. Barnhill e Kersey propuseram que, no lugar de um passo constante, fosse utilizado um passo adaptativo com um ângulo de tolerância $\Delta\theta$ [5]. Esta nova tolerância é usada com a curvatura estimada a partir da Eq. 4.1.

$$L = \rho \triangle \theta,$$

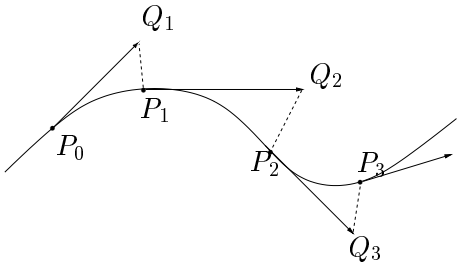


Figura 4.1: Passo tangencial.

onde

$$\rho = \frac{|a||b||a-b|}{2|a \times b|}, \tag{4.1}$$

e $\triangle\theta$ é um valor pré-determinado (tolerânica).

O tamanho do passo L pode ser maior quando a curva for "quase" plana (raio de curvatura maior) e menor quando a curva tiver "bastante" curvatura (raio de curvatura menor) (Figura 4.2).

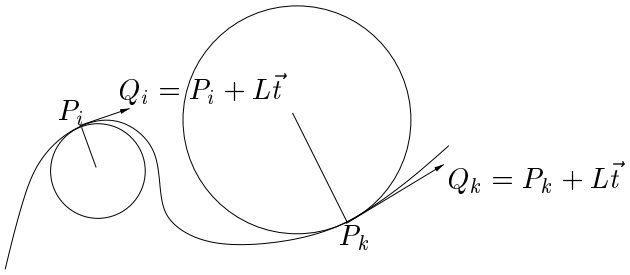


Figura 4.2: Passo tangencial adaptativo

4.1.2 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 2

Usando a curvatura obtida resolvendo o sistema Eq. 3.9, **Stoyanov** [30] propôs uma direção de caminhada ao longo de uma parábola local, que corresponde à expansão de Taylor em torno do ponto corrente P_i até ordem 2

$$p(L) = \alpha(0) + L\alpha'(0) + \frac{1}{2}L^2\alpha''(0).$$

Sabendo que $\alpha(0) = P_i$, $\alpha'(0) = \vec{t}$ e $\alpha''(0) = \kappa\vec{n}$, o próximo ponto P_{i+1} é obtido por refinar Q_i dado por

$$Q_i = P_i + L\vec{t} + \frac{L^2}{2}\kappa\vec{n}.$$

O tamanho do passo L é calculado em cada iteração, em função da curvatura κ

$$L = D\sqrt{2(1+\sqrt{1+\frac{1}{D^2\kappa^2}})},$$

onde D é uma tolerância dada previamente.

Esta expressão utilizada para o tamanho do passo foi obtida calculando o desvio máximo da parábola $p(h)$ com a curva $\alpha(s)$. Estes cálculos podem ser encontrados em [30]. Observe que, quando a curvatura κ é muito pequena, L assume valores grandes, e quando a curvatura κ é grande, L assume valores pequenos.

Wu-Andrade em [9, 37] propuseram uma direção de caminhada circular, isto é, caminhar localmente ao longo de um círculo osculador aproximado, estimando-o através do procedimento descrito na seção 3.1.2 (Figura 4.3).

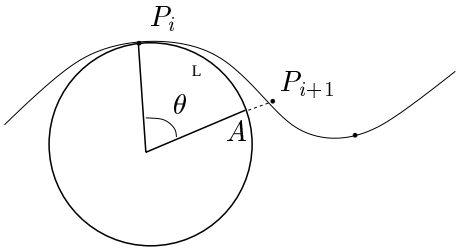


Figura 4.3: Passo Circular.

O passo circular L corresponde ao arco de circunferência P_iA, que é dado por $L = P_iA = R\theta$, onde R é o raio do círculo e θ é um ângulo que deve ser ajustado para R pequenos, a fim de evitar que o próximo ponto estimado se afaste da curva de interseção ao invés de aproximar . Testes exaustivos levaram a utilizar a seguinte heurística:

$$\theta = \begin{cases} L, & se \quad R \leq 1 \\ \frac{L}{R}, & se \quad R \geq 1 \end{cases}$$

4.2 Direções de Caminhada de Contato de Ordem 3

A maioria das direções de caminhada que se conhece usam aproximações de primeira e segunda ordem. Isto deve-se a falta de técnicas apropriadas para determinar propriedades geométricas de ordem superior.

Os resultados que foram obtidos pela nossa técnica, e também pela técnica Ye-Maekawa em relação à determinação de propriedades geométricas de ordem 3 apresentados no Capítulo 3, encorajou a usá-los nas Eqs. 2.7 e 2.9 para obter, respectivamente, direção de caminhada polinomial e direção de caminhada helicial.

A implementação da caminha polinomial e helicial deve levar em conta que a ordem de contato das Eqs. 2.7 e 2.9 com curva de interseção ocorre localmente. Então, os sistemas de referências da curva de contato e da curva de interseção são diferentes. O sistema de referência da curva de interseção é formado pelos vetores $\vec{t}$, $\vec{n}$ e $\vec{b}$ e o sistema de referência das curvas de aproximação dadas pelas Eqs. 2.7 e 2.9 que são as derivadas de primeira, segunda ordem na origem e o produto vetorial de ambas. Para implementar estas direções precisa-se fazer a mudança de base. A caminhada polinomial e helicial prontas para a implementação são, respectivamente:

$$Q_i = P_i + (L - \frac{\kappa^2 L^3}{6})\vec{t} + (\frac{\kappa L^2}{2} + \frac{\kappa' L^3}{6})\vec{n} - \frac{\kappa\tau L^3}{6}\vec{b},$$

$$Q_i = P_i + (\frac{a^2}{c}\sin(L/c) + \frac{b^2}{c^2}L)\vec{t} + (a - a\cos(L/c))\vec{n} + (\frac{ab}{c}\sin(L/c) - \frac{ab}{c}L)\vec{b},$$

onde $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ são, respectivamente, os vetores tangente, normal e binormal.

4.3 Resultados e Comparações

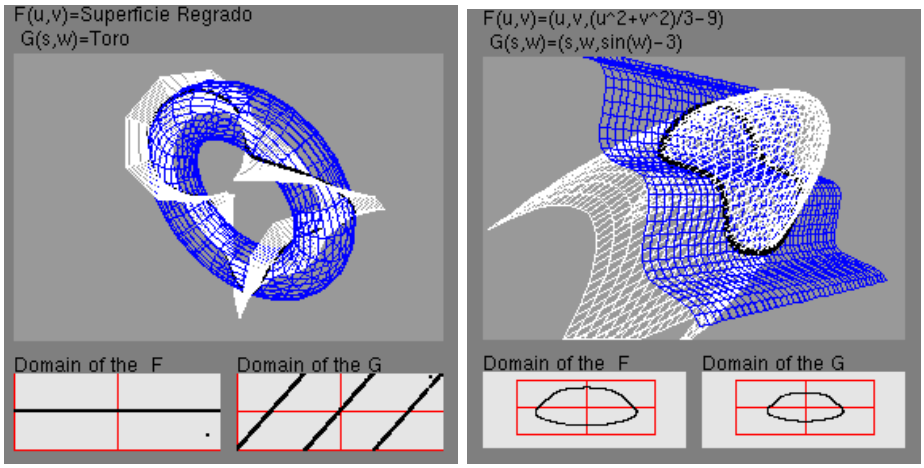
Nesta seção avalia-se comparativamente as direções de caminhada tangencial, circular, polinomial e helicial. Também fez-se uma análise da direção de caminhada de ordem 3 usando as propriedades obtidas pela nossa técnica e a técnica proposto por Ye e Maekawa [38] no contexto da eficiência da computação dos pontos da curva de interseção.

É esperado que pontos aproximados por direções de caminhada com contato de ordem 3 (as direções polinomiais e heliciais) necessitem menos iterações para convergir, para um ponto da curva de interseção, do que pontos aproximados por direções de caminhada de contato de ordem 1 ou 2. Isso pode ser comprovado com os resultados obtidos pelas intersecções dadas na Tabela 4.1. A Tabela 4.1 sintetiza o número de iterações (1 it = uma iteração, 2 it = duas iterações, etc) necessárias para que o ponto Q_i convirja para o ponto P_{i+1} na curva de interseção. O símbolo ($\#pontos$) indica a quantidade de pontos utilizados para obter todos os ramos de curvas de interseção. Esta quantidade de pontos ($\#pontos$) pode estar levando em consideração sobreposições, pois pode-se estar usando dois chutes iniciais diferentes que convirjam para o mesmo ramo da curva de interseção. O tamanho do passo utilizado utilizado foi $L = 0.01$ e as direções de caminhada se encontram especificadas na coluna "método" na Tabela 4.1. Estas direções são: tangencial, circular, polinomial e helicial. Para as duas últimas direções foram utilizadas duas formas distintas para obter as propriedades geométricas em cada ponto traçado: a Ye-Maekawa e a nossa proposta (Nossa). Para comparar as direções de caminhada foram computadas as percentagens de pontos que convergiram para a curva de interseção com 1, 2, 3, 4, 5 e mais 5 iterações.

Surperfície	L	Método		#pontos	1 it	2 it	3 it	4 it	5 it	> 5 it
Superf.Reg.90^o/Toro (Figura 4.4 (a))	0.01	Tangencial		15637	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		15569	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa.	15569	12 %	88 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	15569	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa.	15569	10 %	90 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	15569	81 %	18 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Parab/Onda Sen. (Figura 4.4 (b))	0.01	Tangencial		20000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		20000	3 %	97 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa.	20000	9 %	91 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	20000	71 %	29 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa.	20000	6 %	94 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	20000	34 %	66 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Helicóide/Cilind. (Figura 4.5 (a))	0.01	Tangencial		22750	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		22708	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa.	22708	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	22708	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa.	22708	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	22708	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Parabolóide/Sela. (Figura 4.5 (b))	0.01	Tangencial		10000	0 %	82 %	18 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		10000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa.	10000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	10000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa.	10000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	10000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Tabela 4.1: Comparações de direções de caminhada sem pontos singulares.

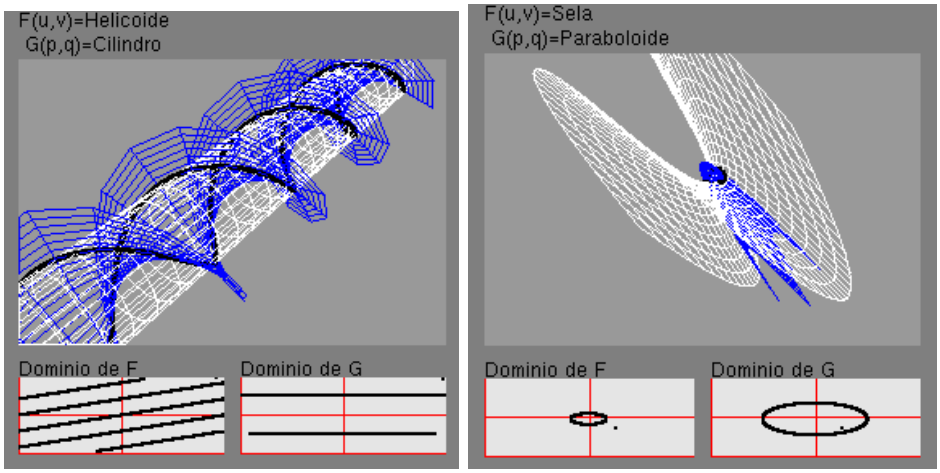
Como as interseções destes quatro pares de superfícies são transversais ($\cos\theta \sim 0$), as direções polinomiais e heliciais que fazem uso das propriedades geométricas calculadas pela proposta Ye-Maekawa apresentam resultados melhores em relação aos que fazem uso das propriedades geométricas aproximadas por nossa proposta. Os dados da Tabela 4.1 atestam também que as direções polinomiais e heliciais são mais apropriadas para traçar intersecções não planares. Conforme esperado, notamos que para a curva de interseção "quase" planar entre um Parabolóide e a Sela (Figura 4.5.(b)), não há uma diferença siguinificativa entre direções de caminhada de contato de ordem 2 e 3.



(a) (b)

Figura 4.4: (a) Interseção Superfície Regrada/Toro e (b) Interseção Parabolóide/Onda Senoidal.

,



(a) (b)

Figura 4.5: (a) Interseção Helicóide/Cilindro e (b) Interseção Parabolóide/Sela.

.

Analisamos ainda o desempenho das distintas direções de caminhada para as intersecções com algumas singularidades ($\cos\theta = 1.0$). A Tabela 4.2 contém os dados referentes ao traçado de três superfícies.

A interseção do primeiro par de superfícies (Figura 4.6) possui dois ramos que se auto-intersectam (pontos singulares). Além disso, possui trechos da curva com vetores normais ($\mathcal{N}_F$ e $\mathcal{N}_G$) quase paralelos. Nestas regiões próximas aos pontos singulares ($\cos\theta \sim 1$), as direções polinomiais e heliciais que fazem uso das propriedades geométricas calculadas pela técnica Ye-Maekawa apresentam desvantagem em relação aos que fazem uso das propriedades geométricas aproximadas calculadas pela nossa proposta. Esta desvantagem é no sentido de porcentagens de iterações (1 it e 2 it) necessárias para que o ponto Q_i convirja para o ponto P_{i+1} na curva de interseção, mostrada na Tabela 4.2. Note que em torno dos pontos singulares, a técnica Ye-Maekawa, como já discutido no capítulo, não consegue determinar corretamente as propriedades geométricas locais, e o procedimento de caminhada pode divergir, enquanto a nossa técnica consegue superar este problema.

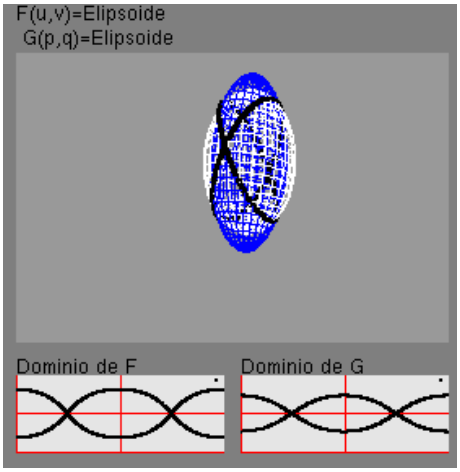


Figura 4.6: Elipsóide/Elipsóide.

Superfície	L	Método		#pontos	1 it	2 it	3 it	4 it	5 it	> 5 it
elipsóide/elipsoide (Figura 4.6)	0.01	Tangencial		16431	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		16366	14 %	86 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa	16366	24 %	76 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	26210	4 %	78 %	15 %	1 %	1 %	1 %
		Helicial	Nossa	16366	14 %	86 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	34177	4 %	79 %	14 %	1 %	1 %	1 %
Bézier/Bézier (Figura 4.7)	0.01	Tangencial		20000	0 %	86 %	12 %	1 %	0.5 %	0.5 %
		Circular		20000	0 %	99.5 %	0.5 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa	20000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	20000	9 %	91 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa	20000	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	20000	8 %	92 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Esfera/Cilindro (Figura 4.8)	0.01	Tangencial		11088	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Circular		13858	1 %	99 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Polin.	Nossa	13858	1 %	99 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	13858	71 %	29 %	0 %	0 %	0 %	0 %
		Helicial	Nossa	13858	1 %	99 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	13858	26 %	74 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Tabela 4.2: Comparações de direções de caminhada com pontos singulares.

A interseção do segundo par de superfícies (Figura 4.7) possui dois pontos singulares ($\cos\theta \sim$

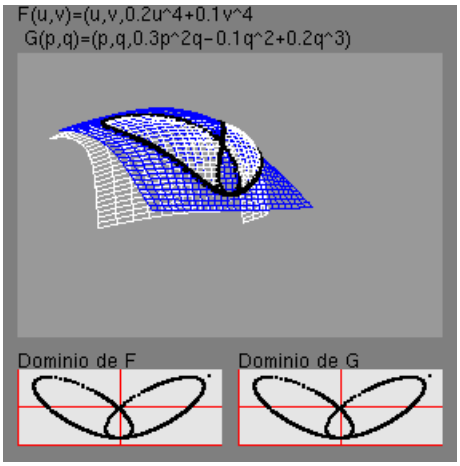


Figura 4.7: Bézier/Bézier.

1), e a interseção do terceiro par de superfícies (Figura 4.8) possui somente um ponto singular.

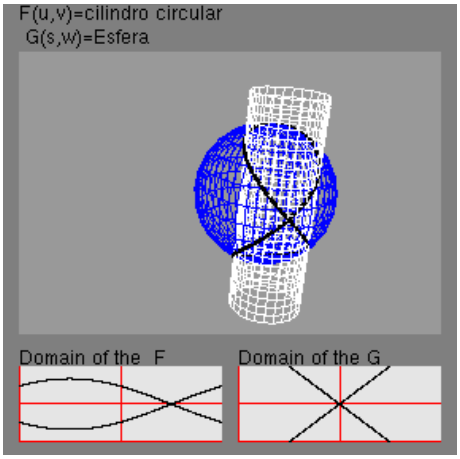


Figura 4.8: Interseção Cilindro Circular/Esfera.

Nestas duas intersecções, embora tenham pontos singulares, não possuem trechos com vetores normais ($\mathcal{N}_F$ e $\mathcal{N}_G$) quase paralelos, como acontece no primeiro par de superfícies. Nota-se que as direções de caminhada polinomial e helicial que fazem uso das propriedades geométricas calculadas pela técnica Ye-Maekawa não sofrem tanto quando o primeiro par de interseção.

Devido à superioridade da técnica Ye-Maekawa nos pontos regulares, e à inferioridade na vizinhança dos pontos singulares, propôs-se o uso das duas técnicas (Técnica Mista). Nos pontos regulares é utilizado da técnica Ye-Maekawa e na vizinhança dos pontos singulares é utilizado a nossa técnica. Com isso deixaremos o algoritmo de caminhada mais robusto.

Para detectar estas regiões próximas a pontos singulares, é usado o ângulo θ entre os vetores normais de ambas as superfícies. Quando o $sen\theta < 0.1$, devemos usar a nossa técnica, caso

contrário, a técnica Ye-Maekawa. O condição $sen\theta < 0.1$ foi escolhida depois de vários testes com o valor do $sen\theta$, isto é, $sen\theta < 0.001$, $sen\theta < 0.01$, $sen\theta < 0.1$, etc . A Tabela 4.3 compara as técnicas de obter propriedades geométricas (Nossa, Ye-Maekawa e Mista) usadas na caminhada polinomial.

Superfície	L	Método		#pontos	1 it	2 it	3 it	4 it	5 it	> 5 it
elipsoide/elipsoide (Figura 4.6)	0.01	Polin.	Nossa	16366	24 %	76 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	26210	4 %	78 %	16 %	1 %	0.5 %	0.5 %
			Mista	16366	14.5 %	80.5 %	5 %	0 %	0 %	0 %
Superf.Reg.90^o/Toro (Figura 4.4 (a))	0.01	Polin.	Nossa	15569	12 %	88 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	15569	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Mista	15569	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Parab/Onda Sen. (Figura 4.4 (b))	0.01	Polin.	Nossa	20000	10 %	91 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	20000	71 %	29 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Mista	20000	71 %	29 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Helicóide/Cilind. (Figura 4.5 (a))	0.01	Polin.	Nossa	22708	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Ye-Maekawa	22708	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
			Mista	22708	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Tabela 4.3: Comparações de direções de caminhada com pontos singulares.

4.4 Comentários

Neste Capítulo, aplicou-se as propriedades geométricas locais para traçar a curva com direções de caminhada de contato de ordem três. Nos casos testados, nossa técnica para estimar as propriedades geométricas foi mais robusta do que a técnica apresentado por Ye e Maekawa na vizinhança dos pontos singulares, e menos eficiente fora destas regiões. Alguns exemplos são fornecidos para atestar esta afirmação. Isso levou a propor um algoritmo de caminhada que faz uso das duas técnicas. Para os pontos que satisfazem a Eq. 3.26 é aplicado a técnica Ye-Maekawa, para o resto utilizamos a nossa proposta.

Adicionalmente, observou-se que as propostas de direção de caminhada polinomial e helicial apresentaram melhores desempenhos do que as direções propostas nos trabalhos anteriores: menos iterações são necessárias para melhorar os pontos estimados em cada passo. Entre estas direções os nossos experimentos apontaram ainda a ligeira superioridade da direção polinomial em relação a direção helicial.

Ao longo do desenvolvimento do algoritmo, identificou-se três problemas: (1) as propriedades geométricas nos pontos singulares só podem ser estimadas nos casos onde a singularidade tem ordem 2. (2) não sabemos o que fazer em relação a direção da caminhada nos pontos cuspidais. (3) ao caminhar ao longo de um laço fechado, não há um procedimento adequado para determinar o final de uma volta. Nos próximos capítulos, serão apresentados alguns resultados para estes problemas.

Pretende-se introduzir em trabalhos futuros um passo adaptativo para caminhada polinomial e helicial. Devido ao comportamento variado da curva de interseção em cada ponto traçado, é interessante manter a adaptatividade dos pontos. Em [3] Bajaj e outros, procuraram fazer uso das derivadas de ordem 3, para obter uma adaptação a tamanho do passo. Com esta estimativa, um tamanho do passo é escolhido de tal maneira que a contribuição dos termos de segunda e terceira ordem juntos é $\frac{1}{5}$ do termo de primeira ordem. Uma possível combinação seria impor que estes termos, $||\frac{L^2\alpha^{''}(0)}{2}||$ e $||\frac{L^3\alpha^{'''}(0)}{6}||$, sejam menores do que $||\frac{L\alpha^{'}(0)}{10}|| = \frac{|L|}{10}$, onde L é o tamanho do passo. Como o tamanho do passo pode tornar-se muito pequeno é ainda proposto o uso de um tamanho mínimo.

Neste trabalho, como em [3], procurou-se fazer uso das derivadas de ordem 3, para obter uma adaptação a tamanho do passo. A tolerância usada foi $\delta = 0.001$. Este valor foi escolhido depois de vários testes.

$$||\frac{L^3\alpha^{'''}(0)}{6}|| < 0.001 \qquad |L|^3||\alpha^{'''}(0)| < 0.006 \qquad L = (\frac{0.006}{||\alpha^{'''}(0)||})^{\frac{1}{3}}, \text{ se } \tau \neq 0$$

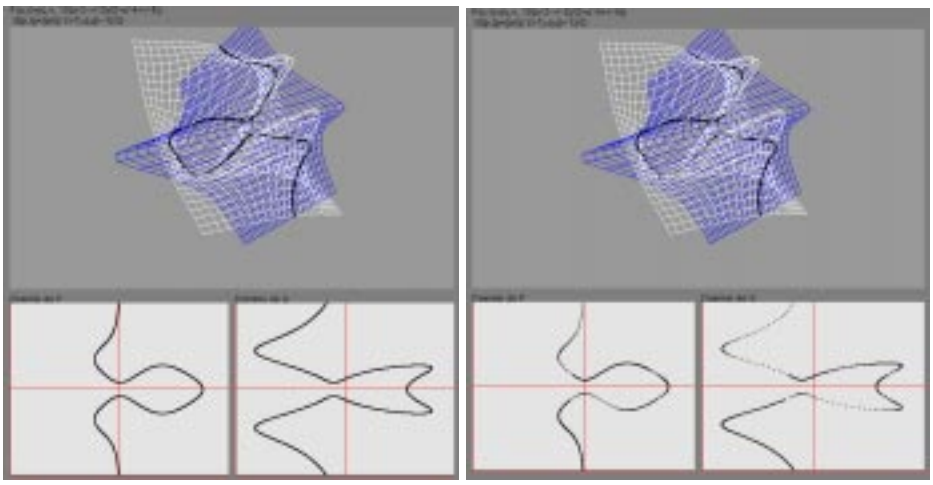
$$||\frac{L^2\alpha^{''}(0)}{2}|| < 0.001 \qquad |L|^2||\alpha^{''}(0)| < 0.002 \qquad L = (\frac{0.002}{||\alpha^{''}(0)||})^{\frac{1}{2}}, \text{ se } \tau = 0.$$

A Tabela 4.4 ilustra a diferença no comportamento do algoritmo de caminhada polinomial com a técnica Mista para o tamanho do passso L fixo e L adapatativo. Note que o número de pontos necessários para traçar a curva de interseção para o tamanho do passo L adaptativo é menor do

que L fixo, como pode ser verificado na Tabela 4.4. Para o tamanho do passo L fixo temos uma porcentagem maior de 2 iterações, do que o passo L adaptativo. Isto ocorre devido ao fato de L ser adaptativo, e estar variando entre $0.001 \leq L \leq 0.2$ enquanto o L fixo é $L = 0.01$. Este resultado pode ser verificado na Tabela 4.4. A distribuição destes pontos ao longo do traço reflete mais a geometria da curva (Figura 4.9).

Superfície	Método		L	#pontos	1 it	2 it	3 it	≥ 4 it
(Figura 4.9).	Polin.	Mista.	0.01	9712	0 %	23 %	60 %	17 %
		Mista. Adp.	$0.001 \leq L \leq 0.2$	2903	0 %	12 %	44 %	44 %

Tabela 4.4: Comparação do Passo polinomial e com L fixo e L adaptativo.



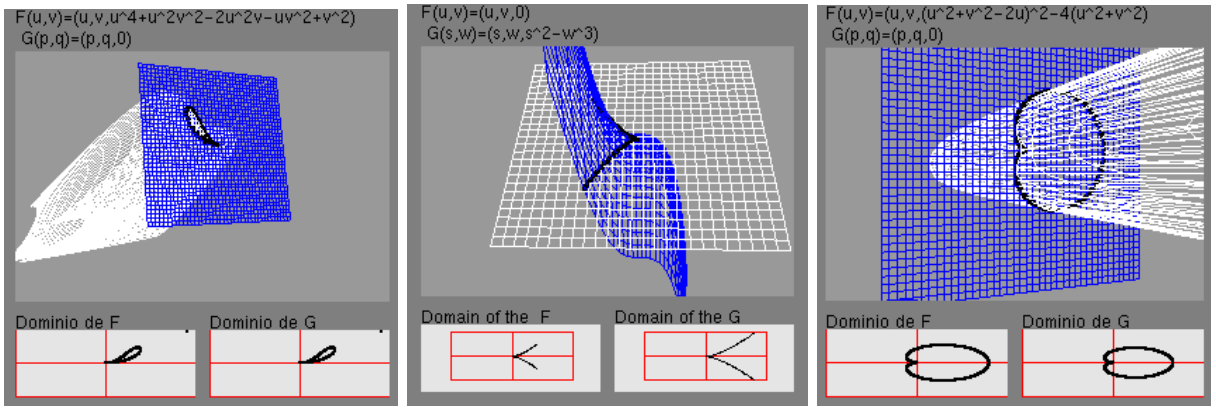
(a) L fixo (b) L Adaptativo

Figura 4.9: Passo Polinomial.

Capítulo 5

Singularidades

É desejável que seja possível traçar maximamente uma curva de interseção a partir de um ponto inicial, isto é, se for uma curva aberta, significa caminhar de um ponto inicial até atingir o bordo do domínio paramétrico (quando estamos olhando a curva no domínio paramétrico), se for curva fechada significa caminhar de um ponto inicial até o retornar a este ponto novamente. Nos capítulos anteriores apresentou-se a técnica de caminhada que estima a partir dos pontos traçados, o próximo ponto, considerando que haja continuidade do vetor tangente. Esta suposição não se aplica, entretanto, para alguns pontos singulares, como ilustra a Figura 5.1. Uma solução para o caso particular da cúspide simples é inverter a direção do vetor tangente e a do vetor normal. Há porém, casos como o de cúspide de "Ramph", em que não se sabe qual é o procedimento que se deve tomar (Figura 5.1.a).



(5.1.a) Cúspide "Ramphoid" (5.1.b) Cúspide Simples (5.1.c) Cúspide Simples

Figura 5.1: Pontos Cuspidais.

Existem ainda situações em que mesmo tendo continuidade no vetor tangente, deve-se verificar se o ponto é um tacnóide (os ramos não se cruzam) ou oscnóide (os ramos se cruzam) para obter um traçado topologicamente correto (Figura 5.2). Se isto não for feito e a curva for como a

da Figura 5.2, pode-se traçar somente o círculo de fora ou o círculo de dentro, levando a obter uma curva topologicamente incorreta.

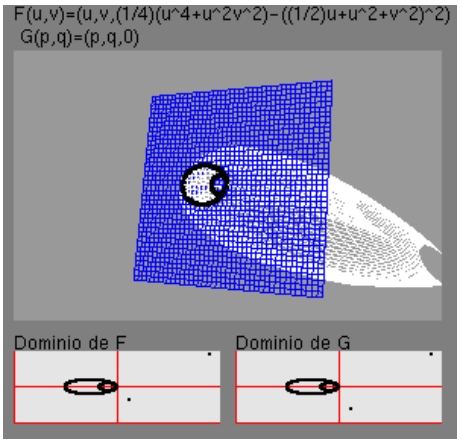


Figura 5.2: Oscnóide.

Aparentemente há uma grande diversidade na forma como uma curva se auto-interseciona num ponto. Felizmente, resultados decorrentes das pesquisas na área de teoria de singularidades indicam que somente um número finito de comportamentos podem ocorrer para uma específica ordem de contato. Alguns destes comportamentos podem ser analisados através dos germes previamente identificados (Seção 2.4).

O objetivo é reconhecer as singularidades produzidas pela interseção de duas superfícies regulares, dadas pelas formas paramétricas $F(u,v)$ e $G(p,q)$, para predizer o traço da interseção e garantir uma caminhada topologicamente correta.

As singularidades correspondem a pontos onde o vetor tangente não está definido, isto é, quando os vetores normais de ambas as superfícies são paralelos. Assim, os pontos singulares na curva interseção são as soluções de

$$\begin{cases} F(u,v) = G(s,w) \\ (F_u(u,v) \times F_v(u,v)) \times (G_s(s,w) \times G_w(s,w)) = (0,0,0)^T. \end{cases} \tag{5.1}$$

A curva de interseção pode se auto intersecionar nestes pontos com uma certa ordem de contato (ordem da singularidade).

Para utilizar as ferramentas providas pela teoria de singularidades no reconhecimento de singularidades foi necessário desenvolver:

1. um procedimento para determinar os pontos singulares e
2. uma técnica para representar a vizinhança deste ponto singular através de uma curva algébrica plana.

Embora ainda não totalmente implementados, mostra-se neste capítulo alguns resultados que foram obtidos.

Foram experimentados três paradigmas para este reconhecimento: o paradigma das tangentes[Subseção 5.2.2], o paradigma da codimensão [Subseção 5.2.4] e o paradigma dos coeficientes[Subseção 5.2.5] . Termina-se o capítulo com a apresentação de uma perspectiva de ampliação da implementação.

5.1 Trabalhos Correlatos

Ye e Maekawa [38] propuseram um algoritmo para analisar o comportamento de um ponto singular de ordem 2, analisando o discriminante da forma quadrática que representa o ponto singular em sua vizinhança. Nestes pontos, o vetor tangente unitário $\vec{t}$ pode ser representado como uma combinação linear de F_u e F_v, ou de G_p e G_q, isto é,

$$\vec{t} = u\prime F_u + v\prime F_v = p\prime G_p + q\prime G_q, \tag{5.2}$$

que são duas equações lineares com quatro variáveis $(u\prime, v\prime, p\prime, q\prime)$. Como nestes pontos os vetores normais das superfícies são paralelos, temos que as curvaturas normais $(k_n^F = k_n^G)$ são iguais

$$L_F(u\prime)^2 + 2M_F u\prime v\prime + N_F(v\prime)^2 = L_G(p\prime)^2 + 2M_G p\prime q\prime + N_G(q\prime)^2. \tag{5.3}$$

Esta equação é quadrática em $(u\prime, v\prime, p\prime, q\prime)$. As Eqs. 5.2 e 5.3 formam um sistema de quatro equações não lineares com quatro variáveis. Este sistema pode ser resolvido por representar $p\prime$ e $q\prime$ em termos de combinação linear de $u\prime$ e $v\prime$ da Eq. 5.2 e

$$p\prime = a_{11}u\prime + a_{12}v\prime \quad e \quad q\prime = a_{21}u\prime + a_{22}v\prime, \tag{5.4}$$

onde

$$a_{11} = \frac{(F_u \times G_q)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}}, \qquad a_{12} = \frac{(F_v \times G_q)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}} \tag{5.5}$$

$$a_{21} = \frac{(G_p \times F_u)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}}, \qquad a_{22} = \frac{(G_p \times F_v)\cdot\mathcal{N}}{(G_p \times G_q)\cdot\mathcal{N}}.$$

Substituindo o resultado na Eq. 5.3, obtém-se

$$b_{11}(u\prime)^2 + 2b_{12}(u\prime)(v\prime) + b_{22}(v\prime)^2 = 0, \tag{5.6}$$

onde

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}^2 L_G + 2a_{11}a_{21}M_G + a_{21}^2 N_G - L_F, \\ b_{12} &= a_{11}a_{12}L_G + 2(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})M_G + a_{21}a_{22}N_G - M_F, \\ b_{22} &= a_{12}^2 L_G + 2a_{21}a_{22}M_G + a_{22}^2 N_G - N_F. \end{aligned}$$

Denotando $\omega = \frac{u'}{v'}$, tem-se o polinômio de grau 2 na variável ω

$b_{11}\omega^2 + 2b_{12}\omega + b_{22} = 0,$

para $\mu = \frac{v'}{u'}$, tem-se o polinômio de grau 2 na variável μ

$b_{22}\mu^2 + 2b_{12}\mu + b_{11} = 0.$

Vamos supor que $b_{11} \neq 0$, pois para o outro caso a análise é análoga, então denotando $\omega = \frac{u\prime}{v\prime}$ temos uma polinômio de grau 2

$$b_{11}\omega^2 + 2b_{12}\omega + b_{22}\omega = 0. \tag{5.7}$$

Assim, podem-se distinguir quatro casos dependendo do discriminante $b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$:

1. $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0$. Não existe raiz real: o ponto é um ponto de contato isolado entre F e G, logo não existe vetor tangente.

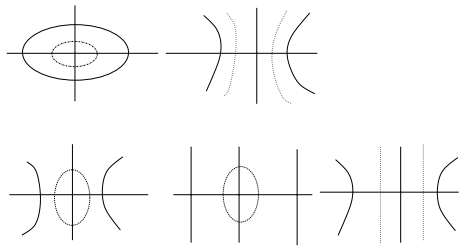
2. $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0$ e $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 \neq 0$. Uma raiz real com multiplicidade dois: o ponto só tem uma tangente. Pode ser um ponto cuspidal (Figura 5.1), tacnoidal (Figura 5.10) e osconoidal (Figura 5.2).

3. $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} > 0$. Há duas raízes reais: o ponto é de bifurcação, isto é, a curva se cruza neste ponto, logo existem dois vetores tangentes (Figura 5.12).

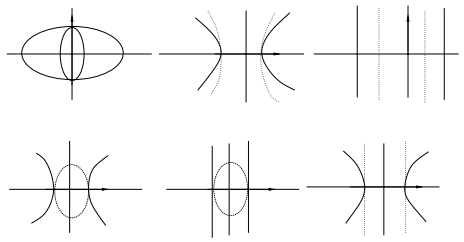
4. $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$: o ponto é um ponto de contato de ordem superior (Figura 5.4).

Ye e Maekawa deram ainda uma interpretação geométrica para estas tangentes com uso de indicatriz de Dupin da superfície em P, que é uma seção cônica. Como F e G se intersectam tangencialmente em P, elas tem o mesmo plano tangente em P. A Eq. 5.3 impõe adicionalmente que o vetor tangente deve ser tal que, ao longo dele, $F(u, v)$ e $G(p, q)$ tem a mesma curvatura normal; portanto, as indicatrizes de Dupin de $F(u, v)$ e $G(p, q)$ em P se intersectam, quando $F(u, v)$ e $G(p, q)$ se intersectam ao longo de uma curva.

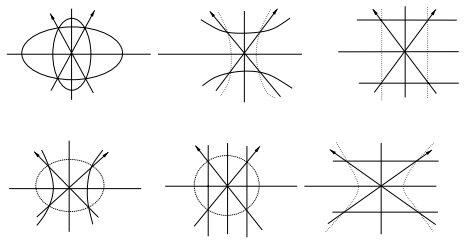
Caso 1: indicatrizes de Dupin não intersectam em nenhum ponto (ponto isolado).
Caso 2: indicatrizes de Dupin intersectam em dois pontos tangenciais.
Caso 3: indicatrizes de Dupin intersectam transversalmente em quatro pontos (ponto de bifurcação).
Caso 4: indicatrizes de Dupin se sobrepõem em um trecho.



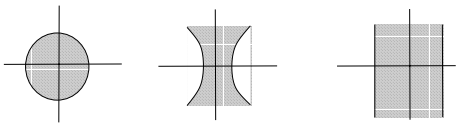
Caso 1.



Caso 2.



Caso 3.



Caso 4.

Observou-se que esta técnica de classificação não consegue diferenciar singularidades que apresentam uma tangente como as mostradas nas Figuras 5.1 e 5.2. Para distinguir tais singularidades só encontramos resultados teóricos na literatura da teoria de singularidades (seção 2.4).

5.2 Reconhecimento de Singularidades

Foram analisados os dois paradigmas encontrados na literatura: o das tangentes e o da codimensão. Nesta seção cada um deles aplicado no contexto de interseção será detalhado. Antes, porém, será apresentado um procedimento para determinar um ponto singular.

5.2.1 Determinação dos Pontos Singulares

Para cada ponto traçado, fazemos testes nos vetores normais de ambas as superfícies para verificar se eles estão quase paralelos ($\sin\theta < 0.01$). Se este for o caso, aplicamos a condição expressa na Eq. 5.8 apresentada por Sederberg e outros [27]:

$$\begin{cases} F_u \times F_v \cdot G_p &= 0 \\ F_u \times F_v \cdot G_q &= 0 \\ (F-G) \cdot F_u &= 0 \\ (F-G) \cdot F_v &= 0. \end{cases}$$

Para obter o ponto singular, usamos o último ponto do traçado P_{i+1} na região onde os vetores normais são quase paralelos ou onde o vetor $N_F(P_i) \times N_G(P_i)$ troca abruptamente de direção com o vetor $N_F(P_{i+1}) \times N_G(P_{i+1})$. A Figura 5.3 ilustra estas situações.

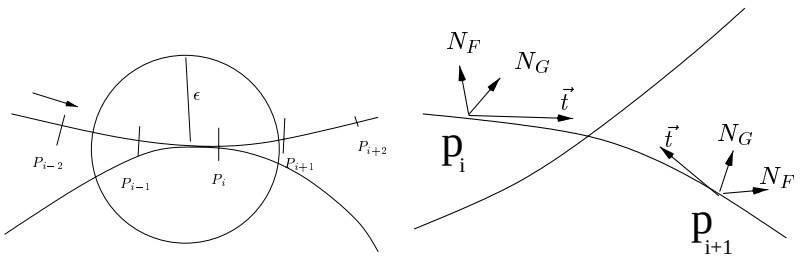


Figura 5.3: Ponto de partida para obtenção do ponto singular.

5.2.2 Paradigma da Tangente

O método de analisar o discriminante proposto por Ye e Maekawa, é bastante atraente computacionalmente, uma vez que o número de raízes é o indicativo da quantidade de tangentes no ponto em análise. Então estendemos a idéia para analisar singularidades de ordens maiores. Nesta seção, é detalhada a nossa proposta que se divide em duas etapas

• obtenção da função implícita (curva algébrica), obtida por igualar as formas fundamentais de ordem n das duas superfícies e

• determinação das raízes reais do polinômio obtido da função implícita por divisão de variáveis.

5.2.2.1 Terceira Ordem

Se $L = M = N = 0$ em P, temos que a segunda forma fundamental é zero, isto é, $II = d^2F(u,v) \cdot \mathcal{N} = d^2G(p,q) \cdot \mathcal{N} = 0$. Portanto, deve-se analisar a terceira forma fundamental,

$$III = d^3F(u,v) \cdot \mathcal{N} = d^3G(p,q) \cdot \mathcal{N},$$

$$F_{uuu} \cdot \mathcal{N} du^3 + 3F_{uuv} \cdot \mathcal{N} du^2 dv + 3F_{uvv} \cdot \mathcal{N} du dv^2 + F_{vvv} \cdot \mathcal{N} dv^3 =$$
$$G_{ppp} \cdot \mathcal{N} dp^3 + 3G_{ppq} \cdot \mathcal{N} dp^2 dq + 3G_{pqq} \cdot \mathcal{N} ds dq^2 + G_{qqq} \cdot \mathcal{N} dq^3.$$

Fazendo a mudança de variáveis dada pelas Eqs. 5.4 e 5.5, obtém-se a seguinte curva algébrica de grau 3

$$b_{11}(u\prime)^3 + 3b_{12}(u\prime)^2(v\prime) + 3b_{13}(u\prime)(v\prime)^2 + b_{14}(v\prime)^3 = 0, \tag{5.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
b_{11} &= A_1a_{11}^3 + B_1a_{11}^2a_{21} + C_1a_{11}a_{21}^2 + D_1a_{21}^3 - A,\\
b_{12} &= 3A_1a_{11}^2a_{12} + B_1(a_{11}^2a_{22} + 2.0a_{11}a_{12}a_{21}) +\\
&\quad C_1(2a_{11}a_{21}a_{22} + a_{12}a_{21}^2) + 3D_1a_{21}^2a_{22} - B,\\
b_{13} &= 3A_1a_{11}a_{12}^2 + B_1(2a_{11}a_{12}a_{22} + a_{12}^2a_{21}) +\\
&\quad C_1(2a_{12}a_{21}a_{22} + a_{11}^2a_{22}) + 3D_1a_{21}a_{22}^2 - C,\\
b_{14} &= A_1a_{12}^3 + B_1a_{12}^2a_{22} + C_1a_{12}a_{22}^2 + D_1a_{22}^3 - D,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A &= F_{uuu}\cdot\mathcal{N} \qquad A_1 = G_{ppp}\cdot\mathcal{N} \\ B &= 3F_{uuv}\cdot\mathcal{N} \qquad B_1 = 3G_{ppq}\cdot\mathcal{N} \\ C &= 3F_{uvv}\cdot\mathcal{N} \qquad C_1 = 3G_{pqq}\cdot\mathcal{N} \\ D &= F_{vvv}\cdot\mathcal{N} \qquad D_1 = G_{qqq}\cdot\mathcal{N} \end{aligned}$$

Como a Eq. 5.8 é uma equação polinômial cúbica em $\omega = \frac{u\prime}{v\prime}$

$$b_{11}\omega^3 + 3b_{12}\omega^2 + 3b_{13}\omega + b_{14} = 0 \tag{5.9}$$

ou em $\mu = \frac{v\prime}{u\prime}$

$$b_{14}\mu^3 + 3b_{13}\mu^2 + 3b_{12}\mu + b_{11} = 0, \tag{5.10}$$

então pode-se ter as seguintes possibilidades:

- Três raízes reais distintas: no ponto há três direções de tangentes,
- Duas raízes reais distintas, uma com multiplicidade dois: no ponto há duas direções de tangente,
- Uma raíz real com multiplicidade três: no ponto há somente uma direção de tangente,
- Uma raíz real e duas complexas: no ponto há somente uma direção de tangente.

Se $b_{11} \neq 0$,

$$\vec{t} = \frac{\omega F_u + F_v}{|\omega F_u + F_v|}$$

ou se $b_{14} \neq 0$,

$$\vec{t} = \frac{F_u + \mu F_v}{|F_u + \mu F_v|},$$

que pode assumir distintas direções para distintos valores de ω ou μ.

Tem-se ainda que tratar casos particulares, nos quais b_{11} e b_{14} se anulam:

1. se $b_{12} \neq 0$ e $b_{13} \neq 0$ então

$$t = \frac{\omega F_u + F_v}{|\omega F_u + F_v|},$$

ou

$$t = \frac{F_u + \mu F_v}{|F_u + \mu F_v|},$$

2. se $b_{12} \neq 0$ e $b_{13} = 0$ $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, onde $\vec{t}$ pode ser calculado como

$$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$$

ou temos que $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, onde $\vec{t}$ pode ser computado como

$$t = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$$

3. se $b_{12} = 0$ e $b_{13} \neq 0$ $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, onde $\vec{t}$ pode ser calculado como

$$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$$

ou tem-se que $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, onde $\vec{t}$ pode ser computado como

$$\vec{t} = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$$

Exemplo 12 *Seja a interseção das superfícies*

$F(u,v)$=$(u, v, (u^2+v^2)^2 + 3u^2v - v^3)$

$G(p,q)$=$(p, q, 0)$

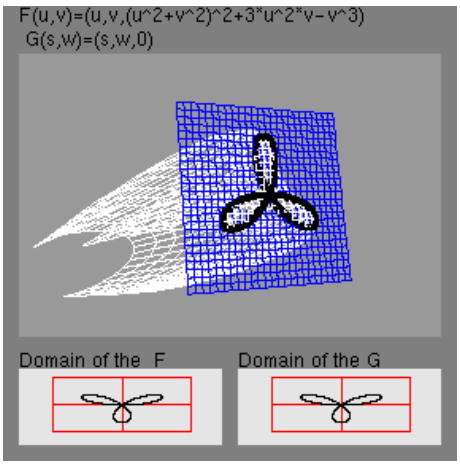


Figura 5.4: Interseção Relevo em 3-Pétalas/Plano.

no ponto singular $F(0,0) = G(0,0) = P$ os coeficientes b_{11}, b_{12} e b_{13} da Eq. 5.7 se anulam. Portanto, a singularidade tem ordem maior do que 2. Analisa-se, então, a terceira forma fundamental. Determinando as terceiras derivadas, tanto de F quanto de G no ponto, obteve-se para os coeficientes b_{11}, b_{12}, b_{13}, e b_{14} da Eq. 5.8 os valores 0, -18, 0 e 6, respectivamente. Substituindo-os na Eq. 5.8, tem-se uma curva algébrica

$$6(v\prime)^3 - 54(u\prime)^2(v\prime) = 0.$$

Denotando $\mu = \frac{v\prime}{u\prime}$, tem-se o polinômio de grau 3

$$6(\mu)^3 - 54(\mu) = 0,$$

cujas raízes são $\mu = 0$, $\mu = 3.0$ e $\mu = -3.0$.

Isso significa que no ponto singular existem três direções tangentes distintas. De fato, a Figura 5.4 atesta que P é um ponto de bifurcação de multiplicidade 3.

5.2.2.2 Quarta Ordem

Se a segunda e terceira forma fundamental de ambas as superfícies se anulam, deve-se inspecionar a quarta forma fundamental,

$$d^4F(u,v)\cdot N = d^4G(p,q)\cdot N,$$

ou seja

$$\begin{array}{c} F_{uuuu}\cdot Ndu^4 + 4F_{uuuv}\cdot Ndu^3dv + 6F_{uuvv}\cdot Ndu^2dv^2 + 4F_{uvvv}\cdot Nvdv^3 + F_{vvvv}\cdot Ndv^4 \quad = \\ G_{pppp}\cdot Ndp^4 + 4G_{pppq}\cdot Ndp^3dq + 6G_{ppqq}\cdot Ndp^2dq^2 + 4G_{pqqq}\cdot Ndpdq^3 + G_{qqqq}\cdot Ndq^4 \end{array} \tag{5.11}$$

para classificar o ponto singular.

Tem-se que p' e q' é uma combinação linear de u' e v', isto é, $p' = a_{11}u' + a_{12}v'$ e $q' = a_{21}u' + a_{22}v'$, com os coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} dados pela Eq. 5.5. Portanto, a Eq. 5.11 é transformada em uma curva algébrica de grau 4 nas variáveis u' e v'

$$b_{11}(u\prime)^4 + 4b_{12}(u\prime)^3(v\prime) + 6b_{13}(u\prime)^2(v\prime)^2 + 4b_{14}(u\prime)(v\prime)^3 + b_{15}(v\prime)^4 = 0, \tag{5.12}$$

onde

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= A_1 a_{11}^4 + 4B_1 a_{11}^3 a_{21} + 6C_1 a_{11}^2 a_{21}^2 + 4D_1 a_{11} a_{21}^3 + E_1 a_{21}^4 - A, \\
b_{12} &= 4A_1 a_{11}^3 a_{12} + 4B_1 (a_{11}^3 a_{22} + 3a_{11}^2) a_{12} a_{21}) + \\
&\quad 12C_1 (a_{11}^2 a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} a_{21}^2) + \\
&\quad 4D_1 (3a_{21}^2 a_{22} + a_{12} a_{21}^3) + 4E_1 a_{21}^3 a_{22} - B, \\
b_{13} &= 6A_1 a11^2 a12^2 + 12B_1 (a_{11}^2 a_{12} a_{22} + a_{11} a_{12}^2 a_{21}) + \\
&\quad 6C_1 (a_{11}^2 a_{22}^2 + 4a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} + \\
&\quad a_{12}^2 a_{21}^2) + 12D_1 (a_{11} a_{21} a_{22}^2 + a_{12} a_{21}^2 a_{22}) + \\
&\quad 6a_{21}^2 a_{22}^2 - C, \\
b_{14} &= 4A_1 a_{11} a_{12}^3 + 4B_1 (3a_{11} a_{12}^2 a_{22} + a_{12}^3 a_{21}) + \\
&\quad 12C_1 (a_{11} a_{12} a_{22}^2 + a_{12}^2 a_{21} a_{22}) + 4D_1 (a_{11} a_{22}^3 \\
&\quad +3a_{12} a_{21} a_{22}^2) + 4E_1 a_{21} a_{22}^3 - D; \\
b_{15} &= A_1 a_{12}^4 + 4B_1 a_{12}^3 a_{22} + 6C_1 a_{12}^2 a_{22}^2 + \\
&\quad 4D_1 a_{12} a_{22}^3 + E_1 a_{22}^4 - E;
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

com os termos a_{ij} definidos pela Eq. 5.5 e

$A = F_{uuuu} \cdot \mathcal{N}, \quad B = 4F_{uuuv} \cdot \mathcal{N} \quad C = 6F_{uuvv} \cdot \mathcal{N}, \quad D = 4F_{uvvv} \cdot \mathcal{N}$ e $E = F_{vvvv} \cdot \mathcal{N}$

$A_1 = G_{pppp} \cdot \mathcal{N}, \quad B_1 = 4G_{pppq} \cdot \mathcal{N}, \quad C_1 = 6G_{ppqq} \cdot \mathcal{N}, \quad D_1 = 4G_{pqqq} \cdot \mathcal{N}$ e $E_1 = G_{qqqq} \cdot N.$

Dividindo a equação algébrica por $(v')^4$, tem-se

$$b_{11}\omega^4 + 4b_{12}\omega^3 + 6b_{13}\omega^2 + 4b_{14}\omega + b_{15} = 0 \tag{5.14}$$

ou por $(u')^4$, tem-se

$$b_{15}\mu^4 + 4b_{14}\mu^3 + 6b_{13}\mu^2 + 4b_{12}\mu + b_{11} = 0 \tag{5.15}$$

A partir das raízes do polinômio podemos distinguir as seguintes situações:

- Quatro raízes reais distintas: no ponto há quatro direções de tangente.
- Três raízes reais distintas, uma com multiplicidade dois: no ponto há três direções de tangente.
- Duas raízes reais distintas e duas complexas: no ponto há duas direções de tangente.
- Duas raízes reais distintas: com multiplicidade dois, portanto no ponto há duas direções tangentes.
- Duas raízes reais distintas: uma com multiplicidade três, portanto no ponto há duas direções tangentes.
- Uma raiz real com multiplicidade dois e duas complexas: no ponto há somente uma direção tangencial
- Uma raiz real com multiplicidade quatro: no ponto há somente uma direção tangente.
- Nenhuma raiz real:é um ponto isolado.

Se $b_{11} \neq 0$,

$\vec{t} = \frac{\omega F_u + F_v}{|\omega F_u + F_v|}$

ou se $b_{15} \neq 0$, tem-se

$\vec{t} = \frac{F_u + \mu F_v}{|F_u + \mu F_v|}$.

Novamente, precisa-se analisar casos particulares para os quais $b_{11} = 0$ e $b_{15} = 0$.

1. se $b_{12} \neq 0$ e $b_{14} \neq 0$ ou $b_{13} \neq 0$, então considerando $\omega = \frac{u\prime}{v\prime}$, obtém-se
$$\vec{t} = \frac{\omega F_u + F_v}{|\omega F_u + F_v|}$$
2. se $b_{12} \neq 0$, $b_{14} = 0$, $b_{13} = 0$, $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, então
$$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$$
ou se $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, então
$$\vec{t} = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$$
3. se $b_{12} = 0$, $b_{14} \neq 0$, e $b_{13} \neq 0$, então considerando $\mu = \frac{v\prime}{u\prime}$, obtém-se
$$\vec{t} = \frac{F_u + \mu F_v}{|F_u + \mu F_v|}$$
4. se $b_{12} = 0$ e $b_{14} \neq 0$ e $b_{13} = 0$ $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, então
$$\vec{t} = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$$
ou quando $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, tem-se
$$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$$
5. se $b_{12} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{13} \neq 0$, $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, então
$$\vec{t} = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$$
e se $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, resulta-se em
$$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$$

Exemplo 13 *A interseção das superfícies* $F(u,v) = (u, v, (u^2+v^2)^3 - 4u^2v^2)$ *e* $G(p,q) = (p,q,0)$*, tem um ponto singular em* $(u,v) = (p,q) = (0,0)$ *(Figura 5.5)).*

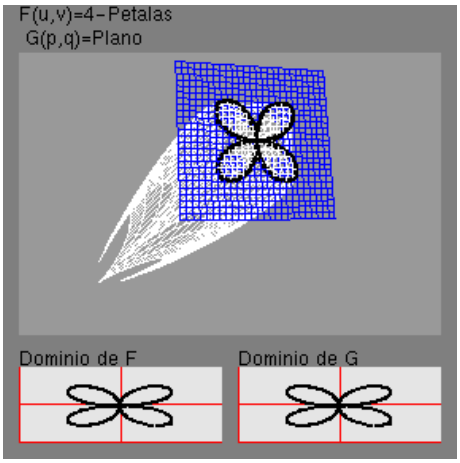


Figura 5.5: Interseção Relevo 4-Pétalas/Plano.

Neste caso, os coeficientes da Eq. 5.14 são $b_{11} = b_{12} = b_{14} = b_{15} = 0$ e $b_{13} = 1$.

A quártica se degenera em $6(u\prime)^2(v\prime)^2 = 0$, isto é, $6(\frac{u\prime}{v\prime})^2 = 0$ ou $6(\frac{v\prime}{u\prime})^2 = 0$. Logo, tem-se duas retas tangentes distintas neste ponto.

Se $v\prime = 0$ e $u\prime \neq 0$, então

$\vec{t} = \frac{u\prime F_u}{|u\prime F_u|}$.

ou se $u\prime = 0$ e $v\prime \neq 0$, então

$\vec{t} = \frac{v\prime F_v}{|v\prime F_v|}$.

5.2.3 Determinação da curva da algébrica aproximada

Nesta seção mostra-se que é possível aproximar, no ponto singular, a interseção de duas superfícies regulares $(F(u,v) - G(p,q) = 0)$ por uma curva algébrica. O interessante é que com isso se pode utilizar os recursos de classificação de curva algébrica plana, para obter o comportamento do ponto singular. Deve-se observar que paradigma das tangentes é um caso particular desta aproximação, pois aproxima-se somente até a ordem da singularidade.

Dadas duas superfícies regulares $F(u,v)$ e $G(p,q)$, pode-se expandí-las em polinômio de Taylor

$$F(u+du, v+dv) = F(u,v) + dF(u,v) + \frac{1}{2}d^2F(u,v) + \frac{1}{3!}d^3F(u,v) + \frac{1}{4!}d^4F(u,v) + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nF(u,v) + Erro_F(n),$$

e

$$G(p+dp, q+dq) = G(p,q) + dG(p,q) + \frac{1}{2}d^2G(p,q) + \frac{1}{3!}d^3G(p,q) + \frac{1}{4!}d^4G(p,q) + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nG(p,q) + Erro_G(n).$$

Então a interseção das duas superfícies regulares ($F(u,v) = G(p,q)$), pode ser aproximada implicitamente pela igualdade de seus polinômios de Taylor de ordem n.

$$dF(u,v) + \frac{1}{2}d^2F(u,v) + \frac{1}{3!}d^3F(u,v) + \frac{1}{4!}d^4F(u,v) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(u,v) =$$

$$dG(p,q) + \frac{1}{2}d^2G(p,q) + \frac{1}{3!}d^3G(p,q) + \frac{1}{4!}d^4G(p,q) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nG(p,q),$$

Particularmente, nos pontos singulares os vetores normais de ambas as superfícies são paralelos ($\mathcal{N} = \mathcal{N}_F = \mathcal{N}_G$), pode-se aplicar o produto escalar do vetor normal em ambos os lados da igualdade, obtendo

$$dF(u,v)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{2}d^2F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{3!}d^3F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{4!}d^4F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(u,v)\cdot\mathcal{N} =$$

$$dG(p,q)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{2}d^2G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{3!}d^3G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{4!}d^4G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nG(p,q)\cdot\mathcal{N}.$$

Além disso, os termos do primeiro grau $dF(u,v)\cdot\mathcal{N} = 0$, $dG(p,q)\cdot\mathcal{N} = 0$ zeram; portanto, tem-se

$$\frac{1}{2}d^2F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{3!}d^3F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{4!}d^4F(u,v)\cdot\mathcal{N} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(u,v)\cdot\mathcal{N} =$$

$$\frac{1}{2}d^2G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{3!}d^3G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \frac{1}{4!}d^4G(p,q)\cdot\mathcal{N} + \cdots + \frac{1}{n!}d^nG(p,q)\cdot\mathcal{N}. \tag{5.16}$$

Sabe-se que os planos tangentes de F e G se coincidem no ponto singular, então pode-se escrever p' e q' como combinação linear de u' e v' dada pela Eq. 5.4.

Com isso, reduzimos a Eq. 5.16 a uma função implícita $f(u',v') = 0$. Fazendo a substituição $u' = x$ e $v' = y$ tem-se

$$f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots.$$

Definição 14 *O grau de um monômio $a_ix^ny^m$ é $m+n$.*

Definição 15 *A ordem da singularidade de uma curva algébrica é menor grau dos monômios que aparecem na curva algébrica.*

Exemplo 14 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, u^4 + u^2v^2 - 2u^2v - uv^2 + v^2)$ *e* $G(p,q) = (p, q, 0)$ *contém um ponto singular em* $(u,v) = (p,q) = (0,0)$.

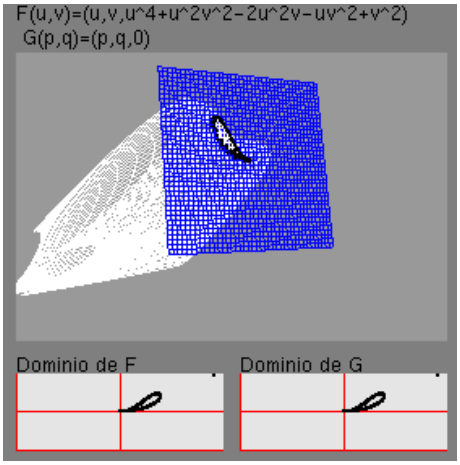


Figura 5.6: Cúspide "Ramphoid".

Expandindo as duas superfícies em polinômio de Taylor até ordem 4, atribuindo valores às derivadas parciais no ponto $(0,0)$, chega-se a

$$f(u\prime, v\prime) = u\prime^4 + u\prime^2 v\prime^2 - 2u\prime^2 v\prime - u\prime v\prime^2 + v\prime^2 = 0. \tag{5.17}$$

Substituindo $u\prime$ e $v\prime$ por x e y, respectivamente, tem-se

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0.$$

A curva algébrica $f(x,y)$ tem grau 2, pois o termo de menor grau é y^2.

5.2.4 Paradigma de Codimensão

Uma análise detalhada do método das tangentes permitiu concluir que este método sozinho não consegue diferenciar singularidades como cúspide, tacnóide e oscnóide. Todos esses pontos quando analisados pelo método das tangentes são de ordem dois e possuem uma única raiz real. O interesse em diferenciar estes tipos de singularidades, levou a busca de elementos para classificá-los em livros de singularidades [7, 12, 13, 19, 23, 26]. Encontrou-se algumas classificações para singularidades de curvas algébricas planas. Portanto, devido a este fato passa-se a olhar o problema de singularidade de uma curva de interseção como uma singularidade de uma curva algébrica. O grande passo foi expandir as superfícies em séries de Taylor nos

pontos singulares. Como os vetores normais são paralelos nestes pontos, foi possível obter a curva algébrica $f(x, y) = 0$, que é uma curva algébrica nas variáveis x e y.

Devido à complexidade do problema de singularidade, restringiu-se a atenção para singularidades do tipo A_k. Na seção 2.4 foram apresentadas duas técnicas para reconhecimento de uma singularidade deste tipo: verificando as condições listadas na tabela da Figura 2.5 ou determinando a codimensão e o coposto da função na vizinhança do ponto singular.

Com base no que existe na literatura de teoria de singularidade, formulou-se o seguinte procedimento de reconhecimento de uma singularidade do tipo A_k numa curva de interseção de duas superfícies regulares:

- descrever a curva na vizinhança de um ponto singular por uma curva algébrica planar $f(x, y) = 0$

e

- determinar a codimensão e o coposto de $f(x, y) = 0$ conforme detalhado na seção 2.4 .

Para ilustrar a técnica de codimensão na classificação de singularidades do tipo A_k, selecionamos 6 pares de superfícies.

Exemplo 15 *A interseção de superfícies $F(u, v) = (u, v, u^4 + u^2v^2 - 2u^2v - uv^2 + v^2)$ e $G(p, q) = (p, q, 0)$ contém um ponto singular em $(u, v) = (p, q) = (0, 0)$ (Figura 5.6). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $(0, 0)$

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0.$$

Derivando $f(x, y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 4x^3 + 2xy^2 - 4xy - y^2,$$

e derivando $f(x, y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 2x^2y - 2x^2 - 2xy + 2y.$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0, 0)$.

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 12x^2 + 2y^2 - 4y & 4xy - 4x - 2y \\ 4xy - 4x - 2y & 2x^2 - 2x + 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right\}.$$

Portanto, o seu co-posto é iagual a 1. Então, a singularidade é do tipo A_k, isto é, tem a forma normal $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora deve-se calcular a codimensão.

De $f_y = 0$ tem-se que

$$y = \frac{1}{2} f_y - x^2y - x^2 - xy,$$

então conclui-se que

$$y \in J_f + \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^3 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

De acordo com o lema de Nakayma, pode-se eliminar o monômio y e os seus múltiplos da base para o complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & x^2 & & (xy) & & & (y^2) & \\ & x^3 & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\ x^4 & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Agora deve-se verificar se o monômio $x \in J_f + \mathcal{M}^2$.

1. $x \notin J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ menos monômios de grau 2.
2. O monômio x^2 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^3$.
3. O monômio x^3 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^4$.
4. O monômio x^4 se encontra em $J_f + \mathcal{M}^5$, pois pode-se escrevê-lo como combinação de f_x e f_y

$$x^4 = \frac{4}{5}((-\frac{1}{4})f_x + (-\frac{5x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{y}{8} + \frac{xy}{8} + \frac{x^2y}{4})f_y)$$

Como isso, sobraram somente 3 monômios no quadro da base de monômios

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & x^2 & & (xy) & & & (y^2) & \\ & x^3 & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Portanto, a codimensão de $f(x, y)$ é igual a 4. Logo, a singularidade é do tipo A_4, e sua forma normal é $y^2 \pm x^5$, que é uma cúspide de "Ramph", na qual só há uma direção de tangente que muda de sentido neste ponto.

Exemplo 16 *A interseção de superfícies* $F(u, v) = (u, v, \frac{3u^4}{4} + u^3 + \frac{u^2}{4} + \frac{7u^2v^2}{2} + uv^2 + v^4)$ *e* $G(p, q) = (p, q, 0)$ *tem uma singularidade em* $(u, v) = (p, q) = (0, 0)$ *(Figura 5.7). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $(0, 0)$

$$f(x, y) = \frac{3x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{7x^2y^2}{2} + xy^2 + y^4 = 0.$$

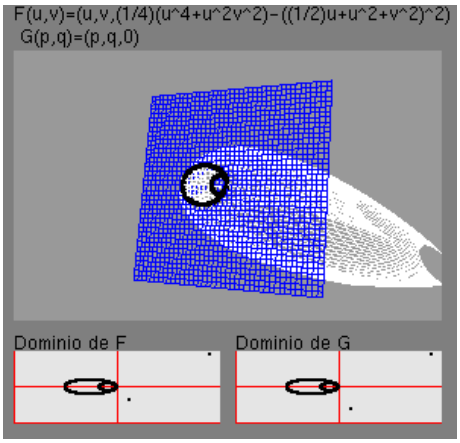


Figura 5.7: Oscnóide.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 3x^3 + 3x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7xy^2}{2} + y^2, \tag{5.18}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = \frac{7x^2y}{2} + 2xy + 4y^3. \tag{5.19}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 9x^2 + 6x + \frac{1}{2} + \frac{7y^2}{2} & 7xy + 2y \\ 7xy + 2y & \frac{7x^2}{2} + 2x + 12y^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\},$$

Portanto o seu co-posto é igual a 1. Então, a singularidade é do tipo A_k, isto é, tem a forma normal $x^2 \pm y^{k+1}$.

Agora vamos calcular a codimensão.

O monômio $x \in J_f + \mathcal{M}^2$ pode ser expresso como combinação das primeiras derivadas parciais e monômios de ordem superior

$$x = 2(f_x - 3x^3 + 3x^2 - \frac{7xy^2}{2} - y^2),$$

então

$$x \in J_f + \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}^2 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

Portanto, deve-se tirar este monômio e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & (x) & & & y & & \\ & & (x^2) & & & (xy) & & y^2 & \\ & (x^3) & & & (x^2y) & & & (xy^2) & & y^3 \\ (x^4) & & & (x^3y) & & & (x^2y^2) & & & (xy^3) & & y^4 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Deve-se ainda verificar se o monômio $y \in J_f + \mathcal{M}^2$.

Tem-se que $y \notin J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ menos monômios de grau maior ou igual a 2.

O monômio y^2 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^3$, pois quando escrevemos $y^2 = af_x + bf_y$ não se consegue eliminar o monômio de grau 1 $(-\frac{x}{2})$ da equação

$$y^2 = f_x - 3x^3 - 3x^2 - \frac{x}{2} - \frac{7xy^2}{2},$$

porque na equação $bf_y = \frac{7bx^2y}{2} + 2bxy + 4by^3$ não apareceu nenhum monômio de grau 1.

O monômio y^3 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^4$, pois quando se escreves $y^3 = af_x + bf_y$ não se consegue eliminar o monômio de grau 2 $(-\frac{xy}{2})$ da equação

$$y^3 = \frac{f_y}{4} - \frac{7x^2y}{8} - \frac{xy}{2},$$

porque na equação $af_x = 3ax^3 + 3ax^2 + \frac{ax}{2} + \frac{7axy^2}{2} + ay^2$ o único valor de a para que apareça o monômio $\frac{xy}{2}$ é colocar $a = y$, porém tem-se o termo $ay^2 = y^3$ que faz desaparecer y^3 do lado esquerdo da equação. Usa-se a equação $y^3 = yf_x - 3x^3y + 3x^2y - \frac{xy}{2} - \frac{7xy^3}{2}$, tem-se o mesmo problema para desaparecer com o termo $-\frac{xy}{2}$. Portanto, não é possível escrever $y^3 = af_x + bf_y +$ termos de grau maior ou igual a 4.

O monômio y^4 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^5$, pois quando se escreve $y^4 = af_x + bf_y$ não se consegue eliminar o monômio de grau 3 $(-\frac{xy^2}{2})$ da equação

$$y^4 = \frac{yf_y}{4} - \frac{7x^2y^2}{8} - \frac{xy^2}{2},$$

porque na equação $af_x = 3ax^3 + 3ax^2 + \frac{ax}{2} + \frac{7axy^2}{2} + ay^2$ tem-se duas opções de a, para que apareça o monômio $\frac{xy^2}{2}$, uma é assumir $a = y^2$ e a outra é $a = \frac{1}{7}$. Para $a = y^2$ tem-se o termo $ay^2 = y^4$ que faz desaparecer y^4 do lado esquerdo da equação e para $a = \frac{1}{7}$ tem-se que o termo $\frac{ax}{2} = \frac{x}{14}$ que somente desaparecerá se for usado $a = \frac{1}{7}$ para $af_x = 3ax^3 + 3ax^2 + \frac{ax}{2} + \frac{7axy^2}{2} + ay^2$ e então reaparecerá o termo $\frac{xy^2}{2}$. Portanto, não é possível escrever $y^4 = af_x + bf_y +$ termos de grau maior ou igual a 5.

O monômio y^5 encontra-se em $J_f + \mathcal{M}^6$,

$$y^5 = (\frac{y}{3} + \frac{17xy}{6})f_x + (-\frac{7y^2}{6} + \frac{17y^2}{12} + \frac{13x^2}{4} - \frac{1}{6} - \frac{23x^3}{16} - \frac{35xy^2}{12})f_y$$

e pode-se eliminar os seus múltiplos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & (x) & & & & y & & \\
 & & & (x^2) & & & (xy) & & & y^2 & \\
 & & (x^3) & & & (x^2y) & & & (xy^2) & & & y^3 & \\
 & (x^4) & & & (x^3y) & & & (x^2y^2) & & & (xy^3) & & & y^4 & \\
(x^5) & & & (x^4y) & & & (x^3y^2) & & & (x^2y^3) & & & (xy^4) & & & (y^5) \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Logo, a singularidade é do tipo A_5, isto é, a sua forma normal é $x^2 - y^6$, que é um oscnóide.

Exemplo 17 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (1.2cos(u)sen(v), 1.6sin(u)sen(v), 2cos(v))$ *e* $G(p,q) = (0.9cos(p)sen(q), 1.6sen(p)sen(q), 2.5cos(q))$ *tem singularidads que correspondem aos pontos* $(-1.57, -1.57)$ *e* $(1.57, -1.57)$ *no domínio de parâmetros (Figura 5.8). Expandindo em Taylor nos pontos* $(-1.57, -1.57)$ $(1.57, -1.57)$*, obtém-se as seguintes curvas algébricas com singularidades na origem* $(0,0)$

Primeiro ponto singular $(-1.57, -1.57)$

$f(x,y) = -1.24x^2 + 1.6y^2 + g(x,y)$, onde $g(x,y)$ tem grau ≥ 3.

Segundo ponto singular $(1.57, -1.57)$

$f(x,y) = -1.24x^2 + 1.6y^2 + h(x,y)$, onde $h(x,y)$ tem grau ≥ 3.

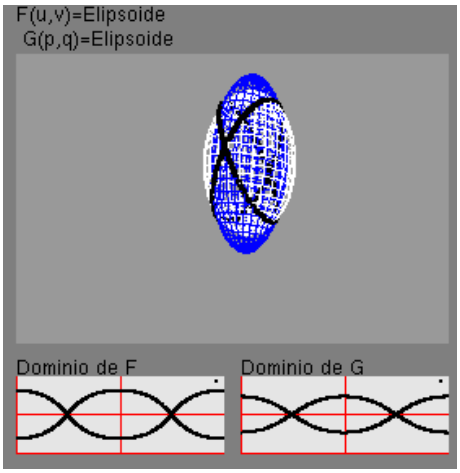


Figura 5.8: Nodes.

Seja a curva algébrica aproximada no ponto singular $(-1.57, -1.57)$. Lembre-se que a singularidade da curva algébrica é na origem $(0,0)$.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = -1.24x + g_1(x,y) \tag{5.20}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 1.6y + g_2(x,y), \tag{5.21}$$

onde $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ tem grau ≥ 2.

Precisa-se analisar a matriz hessiana na origem (0,0).

$f_{xx} = -1.24$;
$f_{xy} = 0$;
$f_{yx} = 0$;
$f_{yy} = -1.6$.

A matriz hessiana é :

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -1.24 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{array} \right\}.$$

Portanto, o posto da hessiana é 2, então a singularidade tem co-posto=0 e codimensão=1. Sua forma normal é, $x^2 \pm y^2$, que é um node (ponto de bifurcação).

Seja a curva algébrica aproximada no ponto singular $(1.57, -1.57)$. Lembre-se que a singularidade da curva algébrica é na origem $(0, 0)$.

Derivando a função $f(x, y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = -1.24x + h_1(x, y) \tag{5.22}$$

e derivando a função $f(x, y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 1.6y + h_2(x, y), \tag{5.23}$$

onde $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$ tem grau ≥ 2.

Precisa-se analisar a matriz hessiana na origem (0,0).

$f_{xx} = -1.24$;
$f_{xy} = 0$;
$f_{yx} = 0$;
$f_{yy} = -1.6$.

A matriz hessiana é :

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -1.24 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{array} \right\}.$$

Portanto, o posto da hessiana é 2, então a singularidade tem co-posto=0 e codimensão=1. Sua forma normal é, $x^2 \pm y^2$, que é um node (ponto de bifurcação).

Exemplo 18 *A interseção de superfícies* $F(u, v) = (u, v, 0.2u^4 + 0.1v^4)$ *e* $G(p, q) = (p, q, 0.3p^2q - 0.1q^2 + 0.2q^3)$ *tem duas singularidades que correspondem aos pontos* $(0, 1)$ *e* $(0, 0)$ *no domínio de parâmetros (Figura 5.9). Expandindo em Taylor nos pontos* $(0, 1)$ $(0, 0)$*, obtém-se as seguintes curvas algébricas com singularidades na origem* $(0, 0)$

Primeiro ponto singular $(0, 1)$

$f(x, y) = 0.55x^2 - 0.18y^2 + g(x, y)$, onde $g(x, y)$ tem grau ≥ 3.

Segundo ponto singular $(0, 0)$

$f(x, y) = 0.2x^4 + 0.1y^4 - 0.3x^2y + 0.1y^2 - 0.2y^3$.

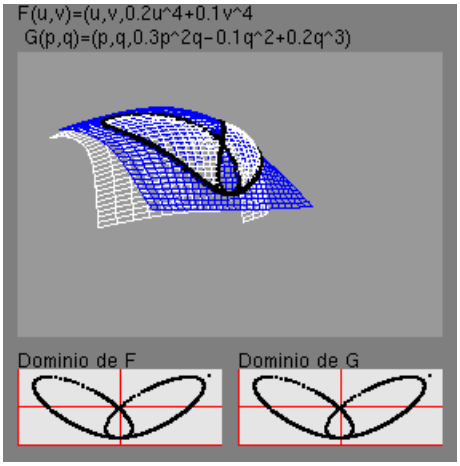


Figura 5.9: Tacnóide em $(0,0)$ e node em $(0,1)$.

Seja a curva algébrica aproximada no ponto singular $(0,1)$. Lembre-se que a singularidade da curva algébrica é na origem $(0,0)$.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 1.1x + h_1(x,y) \tag{5.24}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = -0.36y + h_2(x,y), \tag{5.25}$$

onde $h_1(x,Y)$ e $h_2(x,y)$ tem grau ≥ 2.

Precisa-se analisar a matriz hessiana na origem (0,0).

$f_{xx} = 1.1$;
$f_{xy} = 0$;
$f_{yx} = 0$;
$f_{yy} = -0.36$.

A matriz hessiana é :

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1.1 & 0 \\ 0 & -0.36 \end{array} \right\}.$$

Portanto, o posto da hessiana é 2, então a singularidade tem co-posto=0 e codimensão=1. Sua forma normal é, $x^2 \pm y^2$, que é um node (ponto de bifurcação).

Seja a curva algébrica aproximada no ponto singular $(0,0)$. Lembre-se que a singularidade da curva algébrica é na origem $(0,0)$.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 0.8x^3 - 0.6xy \tag{5.26}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 0.4y^3 - 0.3x^2 + 0.2y + 0.6y^2. \tag{5.27}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$.

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 2.4x^2 - 0.6y & -0.6x \\ -0.6x & 1.2y^2 + 0.2 + 1.2y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{array} \right\},$$

Portanto a matriz hessiana tem co-posto=1. Então, tem-se uma singularidade do tipo A_k, isto é, tem a forma normal $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora deve-se calcular a codimensão. O monômio

$$y = \frac{1}{0.2}(f_y - 0.4y^3 + 0.3x^2 - 0.6y^2),$$

ou seja, o monômio Y pode ser expresso como combinação das primeiras derivadas parciais e monômios de grau maior que dois.

$$y \in J_f + \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}^2 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

Portanto, deve-se tirar este monômio e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$. Veja o quadro abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & x^2 & & (xy) & & & (y^2) & \\ & x^3 & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\ x^4 & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Agora deve-se verificar se o monômio $x \in J_f + \mathcal{M}^2$. Tem-se que o monômio $x \notin J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ mais ou menos monômios de grau maior ou igual a 2.

O monômio x^2 não se encontra em $J_f + \mathcal{M}^3$, pois quando escreve-se $x^2 = af_x + bf_y$ não se consegue eliminar o monômio de grau 1 $(-\frac{0.2y}{0.3})$ da equação

$$x^2 = -\tfrac{f_y}{0.3} - \tfrac{0.4y^3}{0.3} - \tfrac{0.2y}{0.3} - 0.2y^2,$$

já que na equação $af_x = 0.8ax^3 - 0.6axy$ não vai aparecer nenhum monômio de grau 1.

O monômio x^3 se encontra em $J_f + \mathcal{M}^4$, pois podemos escrever

$$x^3 = (-10 - 6y)f_x - 30xf_y - 12xy^3 - 0.48x^3y$$

De acordo com o lema de Nakayama, podemos eliminar o monômio x^3 e seus múltiplos da base

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & x^2 & & (xy) & & & (y^2) & \\ & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Logo, a singularidade é do tipo A_3, isto é, sua forma normal é $y^2 - x^4$, que é **tacnóide.**

Exemplo 19 *A interseção de superfícies $F(u,v) = (u, v, -u^4 - v^4)$ e $G(p,q) = (p, q, -q^2)$ tem uma singularidade em $(0,0)$ (Figura 5.10). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem $0,0)$*

$$f(x,y) = -x^4 - y^4 + y^2.$$

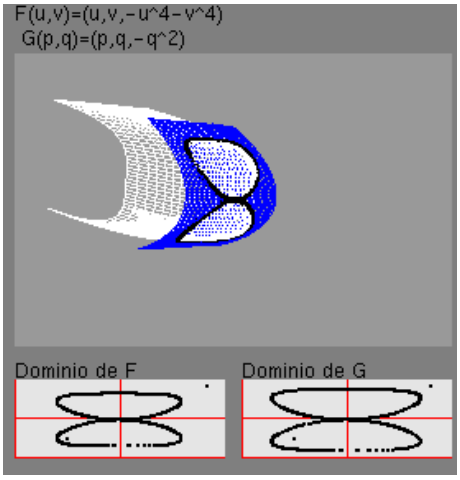


Figura 5.10: Tacnóide.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 4x^3 \tag{5.28}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 4y^3 - 2y \tag{5.29}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$.

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right\}.$$

Portando, a matriz hessiana tem co-posto=1. Então, tem-se uma singularidade do tipo A_k, isto é, sua forma normal é $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora deve-se calcular a codimensão.

O monômio $y \in J_f + \mathcal{M}^2$, pois pode-se isolar o monômio y

$$y = \frac{1}{2}(-f_y + 4y^3),$$

então

$$y \in J_f + \mathcal{M}^3 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

Logo, deve-se tirar este monômio e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$ como ilustra o quadro abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & x & & & (y) & & \\
 & & x^2 & & (xy) & & (y^2) & & \\
 & x^3 & & (x^2y) & & (xy^2) & & (y^3) & \\
x^4 & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Agora deve-se verificar se o monômio $x \in J_f + \mathcal{M}^2$.

O monômio $x \notin J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ mais ou menos monômios de grau maior ou igual a 2.

O monômio $x^2 \notin J_f + \mathcal{M}^3$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ mais ou menos monômios de grau maior ou igual a 3.

O monômio x^3 se encontra em $J_f + \mathcal{M}^4$, pois tem-se

$$x^3 = \frac{1}{4} f_x,$$

O quadro de base de complemento fica reduzido em

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & x & & & (y) & & \\
 & & x^2 & & (xy) & & (y^2) & & \\
 & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & (y^3) & \\
(x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Logo, a singularidade é do tipo A_3, isto é, sua forma normal é $y^2 - x^4$, que é do tipo **tacnóide.**

Exemplo 20 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, u^4 + v^4 - 4u^3 - 4uv^2 + 2u^2v^2 - 4v^2)$ *e* $G(p,q) = (p, q, 0)$ *tem uma singularidade em* $(0,0)$ *(Figura 5.11). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade em* $(0,0)$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 2x^2y^2 - 4y^2.$$

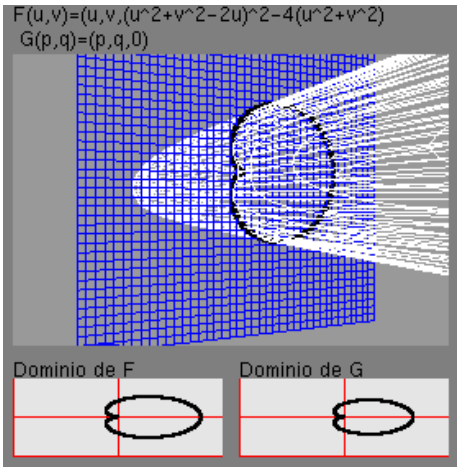


Figura 5.11: Cardióide.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 4x^3 - 12x^2 - 4y^2 + 4xy^2 \tag{5.30}$$

e derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = 4y^3 - 8xy + 4x^2y - 8y \tag{5.31}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$.

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 12x^2 - 24x + 8y^2 & -8y + 8xy \\ -8y + 8xy & 12y^2 - 8x + 4x^2 - 8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{array} \right\},$$

A matrix hessiana tem co-posto=1. Então, tem-se uma singularidade do tipo A_k, isto é, tem a forma normal $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora deve-se calcular a codimensão. O monômio $y \in J_f + \mathcal{M}^2$, de fato

$$y = -\frac{1}{8}(f_y - 4y^3 + 8xy - 4x^2y).$$

Então

$$y \in J_f + \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}^2 \subset J_f + \mathcal{M}^2.$$

Portanto, deve-se tirar este monômio e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & x^2 & & & (xy) & & & (y^2) \\ & x^3 & & & (x^2y) & & & (xy^2) & & & (y^3) \\ x^4 & & & (x^3y) & & & (x^2y^2) & & & (xy^3) & & & (y^4) \\ & & & & & \vdots & & & \end{array}$$

Agora deve-se verificar se o monômio $x \in J_f + \mathcal{M}^2$.

Tem-se $x \notin J_f + \mathcal{M}^2$, pois não pode ser escrito como uma combinação de $af_x + bf_y$ mais ou menos monômios de grau maior ou igual a 2.

O monômio x^2 se encontra em $J_f + \mathcal{M}^3$. De fato, pode-se escrever
$x^2 = -\frac{1}{12}f_x + \frac{1}{24}f_y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{1}{6}x^2y^2$

Com isso, o quadro da base de complementos fica da forma

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & (y) & & & \\ & & (x^2) & & (xy) & & (y^2) & & \\ & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & (y^3) & \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Logo, a singularidade é do tipo A_2, isto é, sua forma normal é $y^2 \pm x^3$, que é do tipo cúspide simples.

Exemplo 21 *A interseção de* $F(u,v) = (u, v, (1/6)u^6 - (5/4)u^4 + 2u^2 + v^2)$ *e* $G(p,q) = (p, q, 0.917)$ *tem dois pontos de singularidade(Figura 5.12). Os pontos singulares na interseção das superfícies ocorrem nos pontos* $(u,v) = (-1,0)$ *e* $(u,v) = (0,1)$ *do domínio paramétrico de uma das superfícies. Expandindo em Taylor obtem-se para cada ponto singular, a seguinte curva algébrica com singularidade em* $(0,0)$

$$f(x,y) = +5.99x^2 - 2y^2 + a_3x^4 + a_4x^6.$$

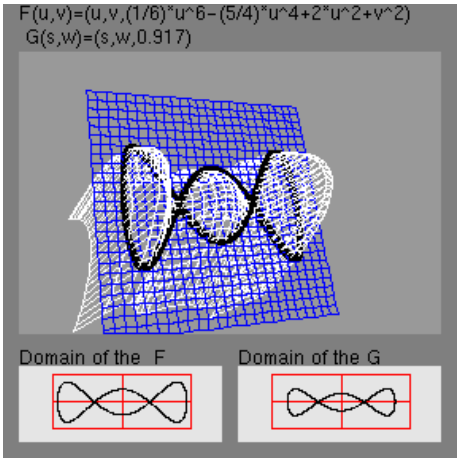


Figura 5.12: Nodes.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 11.98x + 4a_3x^3 + 6a_4x^5 \tag{5.32}$$

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = -4y \tag{5.33}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$.

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 11.98 + 12a_3x^2 + 30a_4x^4 & 0 \\ 0 & -4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 11.98 & 0 \\ 0 & -4 \end{array} \right\},$$

O posto da hessiana é 2, então estas singularidades tem co-posto=0 e codimensão=1. A sua forma normal é $x^2 \pm y^2$, logo são nodes (ponto de bifurcação).

Exemplo 22 *A interseção de superfícies $F(u,v) = (u, v, u^3 - y^2)$ e $G(p,q) = (p, q, 0)$ tem uma singularidade em $(u,v) = (p,q) = (0,0)$ (Figura 5.13). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem $(0,0)$*

$$f(x,y) = x^3 - y^2.$$

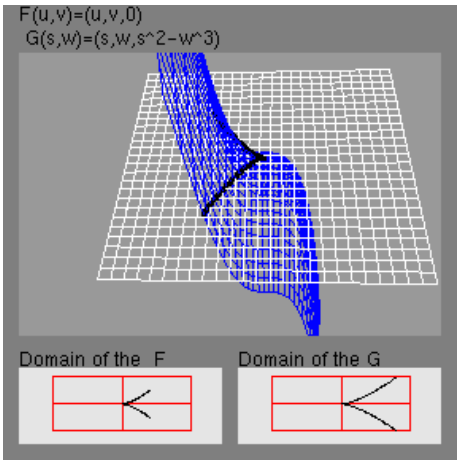


Figura 5.13: Ponto Cuspidal.

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável x, tem-se

$$f_x = 3x^2, \tag{5.34}$$

Derivando a função $f(x,y)$ em relação à variável y, tem-se

$$f_y = -2y. \tag{5.35}$$

Precisa-se analisar a matriz hessiana em $(0,0)$

$f_{xx} = 6x,$
$f_{xy} = 0,$
$f_{yx} = 0,$
$f_{yy} = -2$

A matriz hessiana é :

$$H = \left\{ \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right\}.$$

Portanto, a matriz hessiana tem co-posto=1. Logo tem-se uma singularidade do tipo A_k, isto é, sua forma normal é $y^2 \pm x^{k+1}$.

Agora deve-se calcular a codimensão. O monômio $y \in J_f + \mathcal{M}^2$, pois $y = \frac{-1}{2} f_y$. O monômio $x^2 \in J_f + \mathcal{M}^3$, pois $x^2 = \frac{1}{3} f_x$.

Deve-se tirar este monômio y e x^2 e seus múltiplos da base para um complemento de $J_f + \mathcal{M}^{k+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & x & & & (y) & & \\ & & (x^2) & & (xy) & & & (y^2) & \\ & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Portanto, codimensão de f é 2. Logo, a singularidade é do tipo A_2, isto é, sua forma normal é $y^2 \pm x^3$ que é do tipo cúspide simples.

5.2.5 Paradigma de Coeficientes

Devido a incompletude da técnica das tangentes para as singularidades do tipo A_k e a complexidade nos cálculos da comdimensão de uma curva algébrica plana. Busca-se construir um algoritmo que facilite a classificação de uma curva algébrica plana. No livro [13] Golubitsky e Schaefter apresentam a tabela dada na Figura 2.5 que classifica algumas curvas algébricas planas $f(x, y)$, porém a implementação envolve computação numérica. Entretanto, inspirado neste procedimento, foi desenvolvido uma técnica de classificação de singularidades por meios dos coeficientes da curva algébrica plana $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots = 0$.

Nesta seção apresenta-se uma contribuição para classificação de singularidades do tipo A_k, $k \leq 3$. Esta classificação é feita pelos coeficientes da curva algébrica.

Proposição 5.1 *A curva algébrica associada a singularidade de uma curva interseção não possui o termo de primeira ordem.*

Prova: Isso segue imediatamente do fato de

$$dF(u, v) \cdot \mathcal{N} = dG(p, q) \cdot \mathcal{N} = 0.$$

Proposição 5.2 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $4a_0a_2 - a_1^2 = 0$ *então pode-se reescrevê-la* $f(z, w) = d_0w^2 + d_1z^3 + d_2z^2w + d_3zw^2 + d_4w^3 + d_5z^4 + d_6z^3w + d_7z^2w^2 + d_8zw^3 + d_9w^4 + \cdots$, *onde* $[x \;\; y]^t = P[z \;\; w]^t$, *com* P *a matriz que diagonaliza a matriz hessiana.*

Seja $f(x,y)=0$ dada por:

$f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$

Pode-se escrevê-la

$f(x,y) = [x\ \ y]H[x\ \ y]^t + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots,$

onde

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 \end{bmatrix}$$

como a matriz hessiana é singular e tem *posto* $= 1$, então tem-se que um dos dois autovalores é zero, logo o teorema 2.4 garante que $f(x,y)$ pode ser escrita por umas das seguintes formas

$f(z,w) = b_0z^2 + b_1z^3 + b_2z^2w + b_3zw^2 + b_4w^3 + b_5z^4 + b_6z^3w + b_7z^2w^2 + b_8zw^3 + b_9w^4 + \cdots,$

ou

$f(z,w) = d_0w^2 + d_1z^3 + d_2z^2w + d_3zw^2 + d_4w^3 + d_5z^4 + d_6z^3w + d_7z^2w^2 + d_8zw^3 + d_9w^4 + \cdots,$

Temos que os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = a_0 + a_2$ e os autovetores associados são $\vec{v}_1 = (-a1, 2a_0)$ e $vecv_2 = (a1, 2a_2)$. Escolhendo primeiro $\lambda_2 = a_0 + a_2$ e $\lambda_1 = 0$ esta ordem temos que a matriz que diagonaliza a matriz hessiana é

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ 2a_2 & 2a_0 \end{bmatrix}$$

Como $[x\ \ y]^t = P[z\ \ w]^t$, $x = a_1(z-w)$ e $y = 2(a_2z + a_0w)$, tem-se

$f(z,w) = b_0z^2 + b_3z^3 + b_4z^2w + b_5zw^2 + b_6w^3 + b_7z^4 + b_8z^3w + b_9z^2w^2 + b_{10}zw^3 + b_{11}w^4 + \cdots,$

onde

$b_0 = a_0a_1^2 + 2a_1^2a_2 + 4a_2^3,$

$b_3 = a_1^3a_3 + 2a_2a_1^2a_4 + 4a_2^2a_1a_5 + 8a_2^3a_6,$

$b_4 = -3a_1^3a_3 - 4a_2a_1^2a_4 + 2a_1^2a_0a_4 - 4a_2^2a_1a_5 + 8a_0a_1a_2a_5 + 24a_0a_2^2a_6,$

$b_5 = 3a_1^3a_3 + 2a_2a_1^2a_4 - 4a_1^2a_0a_4 - 8a_0a_1a_2a_5 - 4a_1a_0^2a_5 + 24a_2a_0^2a_6,$

$$b_6 = -a_1^3a_3 + 2a_1^2a_0a_4 - 4a_1a_0^2a_5 + 8a_0^3a_6,$$

$$b_7 = a_1^4a_7 + 2a_2a_1^3a_8 + 4a_2^2a_1^2a_9 + 8a_2^3a_1a_{10} + 16a_2^4a_{11},$$

$$b_8 = -4a_1^4a_7 - 6a_2a_1^3a_8 + 2a_1^3a_0a_8 - 8a_2^2a_1^2a_9 + 8a_0a_1^2a_2a_9 - 8a_2^3a_1a_{10} + 24a_2^2a_1a_0a_{10} + 64a_2^3a_0a_{11},$$

$$b_9 = 6a_1^4a_7 - 6a_1^3a_0a_8 + 6a_2a_1^3a_8 + 4a_2^2a_1^2a_9 - 16a_0a_1^2a_2a_9 + 4a_1^2a_0^2a_9 + 24a_0^2a_1a_2a_{10} - 24a_0a_1a_2^2a_{10} + 96a_0^2a_2^2a_{11},$$

$$b_{10} = -4a_1^4a_7 - 2a_2a_1^3a_8 + 6a_1^3a_0a_8 + 8a_0a_1^2a_2a_9 - 8a_1^2a_0^2a_9 - 24a_2a_1a_0^2a_{10} + 8a_0^3a_1a_{10} + 64a_0^3a_2a_{11},$$

$$b_{11} = a_1^4a_7 - 2a_1^3a_0a_8 + 4a_1^2a_0^2a_9 - 8a_1a_0^3a_{10} + 16a_0^4a_{11}.$$

Fazendo $z = x$ e $w = y$, tem-se

$$f(x,y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \cdots,$$

A derivada direcional $d^3f_{\vec{v}\vec{v}\vec{v}} = b_6$

Proposição 5.3 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$ *então a singularidade é do tipo* A_1.

Prova: Se $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$ tem-se que a matriz hessiana é não singular, então pela proposição 2.4 da seção 2.4 a singularidade é do tipo A_1.

Proposição 5.4 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 = 0$ *e* $a_6 \neq 0$ *então a singularidade é do tipo* A_2.

Por hipótese tem-se $a_0 \neq 0$, $a_2 = 0$ e $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, então

$$f(x,y) = a_0x^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots,$$

logo, tem-se que suas derivadas parciais são

$f_x = 2a_0x + 3a_3x^2 + 2a_4xy + a_5y^2 + 4a_7x^3 + 3a_8x^2y + 2a_9xy^2 + a_{10}y^3 + \cdots$
$f_y = a_4x^2 + 2a_5xy + 3a_6y^2 + a_8x^3 + 2a_9x^2y + 3a_{10}xy^2 + 4a_{11}y^3 + \cdots$

Deve-se calcular $cod_1f = \frac{J_f + \mathcal{M}_2}{J_f + \mathcal{M}_2^2}$

Deve-se verificar quais os monômios de ordem 1 pertencem a $J_f + \mathcal{M}^2$, isto é $x \in J_f + \mathcal{M}^2$ e $y \in J_f + \mathcal{M}^2$.

$$x = \frac{1}{2a_0} f_x - 3a_3x^2 - 2a_4xy - a_5y^2 - 4a_7x^3 - 3a_8x^2y - 2a_9xy^2 - a_{10}y^3 - \cdots$$

então $x \in J_f + \mathcal{M}^2$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & (x) & & & y & & \\
 & & (x^2) & & (xy) & & & y^2 & \\
 & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & y^3 \\
(x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & y^4 \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Tem-se que o monômio y não pode ser excluído, pois y não pertence a $J_f + M^2$.

Deve-se calcular $cod_2 f = \frac{J_f + \mathcal{M}_2}{J_f + \mathcal{M}_2^3}$

Deve-se verificar quais os monômios de ordem 2 pertencem a $J_f + \mathcal{M}^2$, isto é $x^2 \in J_f + \mathcal{M}^3$ e $y^2 \in J_f + \mathcal{M}^3$ e $yx \in J_f + \mathcal{M}^3$.

Como $x \in J_f + \mathcal{M}^2$, então os seus múltiplos x^2 e $xy \in J_f + \mathcal{M}^3$.

Se $a_6 \neq 0$, tem-se que o monômio y^2 pode ser excluído, pois $y^2 = \frac{1}{3a_6} f_y - \frac{a_4}{6a_0a_6} x f_x - \frac{a_5}{3a_0a_6} y f_x + \frac{2a_0a_8 - 3a_3a_4}{6a_0a_6} x^3 + \frac{2a_0a_9 - a_3a_5}{3a_0a_6} x^2y + \cdots$

logo, $y^2 \in J_f + \mathcal{M}^3$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & (x) & & & y & & \\
 & & (x^2) & & (xy) & & & (y^2) & \\
 & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\
(x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Se $a_6 \neq 0$ e $a_0 \neq 0$ tem-se que a codimensão de $f(x, y) = 0$ é 2, logo a singularidade é do tipo A_2.

Proposição 5.5 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 = 0$ *e* $a_6 = 0$ *e* $a_5^2 \neq 4a_0a_{11}$ *então a singularidade é do tipo* A_3.

Se $a_6 = 0$, tem-se a curva algébrica

$$f(x, y) = a_0x^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$$

suas derivadas parciais são

$f_x = 2a_0x + 3a_3x^2 + 2a_4xy + a_5y^2 + 4a_7x^3 + 3a_8x^2y + 2a_9xy^2 + a_{10}y^3 + \cdots$
$f_y = a_4x^2 + 2a_5xy + a_8x^3 + 2a_9x^2y + 3a_{10}xy^2 + 4a_{11}y^3 + \cdots$

Deve-se calcular $cod_1 f = \frac{J_f + \mathcal{M}_2}{J_f + \mathcal{M}_2^2}$

Deve-se verificar quais os monômios de ordem 1 pertencem a $J_f + \mathcal{M}^2$, isto é $x \in J_f + \mathcal{M}^2$ e $y \in J_f + \mathcal{M}^2$.

$$x = \tfrac{1}{2a_0} f_x - 3a_3x^2 - 2a_4xy - a_5y^2 - 4a_7x^3 - 3a_8x^2y - 2a_9xy^2 - a_{10}y^3 - \cdots$$

então $x \in J_f + \mathcal{M}^2$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & (x) & & & y & & \\ & & (x^2) & & (xy) & & & y^2 & \\ & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & y^3 \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & y^4 \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Tem-se que o monômio y não pode ser excluído, pois y não pertence a $J_f + M^2$.

Deve-se calcular $cod_2 f = \frac{J_f + \mathcal{M}_2^2}{J_f + \mathcal{M}_2^3}$

Deve-se verificar quais os monômios de ordem 2 que não foram excluídos ainda pertencem a $J_f + \mathcal{M}^3$, isto é $y^2 \in J_f + \mathcal{M}_2^3$.

Como $x \in J_f + \mathcal{M}^2$, então os seus múltiplos x^2 e $xy \in J_f + \mathcal{M}^3$, isto é, eles já foram excluídos.

Tem-se que o monômio y^2 não pode ser excluído, pois

$$y^2 = \tfrac{1}{a_5} f_x - \tfrac{2a_0}{a_5}x - \tfrac{3a_3}{a_5}x^2 - \tfrac{2a_3}{a_5}xy - \tfrac{4a_7}{a_5}x^3 - \cdots$$

aparece o termo $\frac{2a_0}{a_5}x$ que só pode ser cancelado por usar f_x novamente, isto desapareceria com a equação acima.

então, y^2 não pertence a $J_f + \mathcal{M}^3$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & (x) & & & y & & \\ & & (x^2) & & (xy) & & & y^2 & \\ & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & y^3 \\ (x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & y^4 \\ & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Deve-se calcular $cod_3 f = \frac{J_f+\mathcal{M}_2^3}{J_f+\mathcal{M}_2^4}$

Deve-se verificar quais os monômios de ordem 3, que não foram exlcuidos, pertencem a $J_f + \mathcal{M}^4$, isto é $y^3 \in J_f + \mathcal{M}^4$.

Se $a_{11} \neq 0$, então $y^3 = \frac{1}{4a_{11}} f_y - \frac{a_4}{8a_0a_{11}} x f_x - \frac{a_5}{4a_0a_{11}} y f_y + \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}} y^3 - g(x,y)$

$y^3 = \frac{a_4}{4a_{11}} x^2 + \frac{2a_3}{4a_{11}} xy + \frac{a_8}{4a_{11}} x^3 + ... + y^3 + ... - \frac{a_4}{8a_0a_{11}} x f_x - \frac{a_5}{4a_0a_{11}} y f_y + \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}} y^3 - g(x,y)$

$y^3 = (1 - \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}}) y^3 - g(x,y)$

onde, $g(x,y)$ soma de termos de grau maior igual a 4. Então, supondo que $a_5^2 \neq 4a_0a_{11}$ tem-se $y^3 \in J_f + \mathcal{M}^4$, $y^3 = \frac{4a_0a_{11}}{4a_0a_{11}-a_5^2}(1 - \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}}) y^3 - \frac{4a_0a_{11}}{4a_0a_{11}-a_5^2} g(x,y) = y^3 - h(x,y)$, onde $h(x,y)$ é soma de termos maior igual a 4.

Se $a_{11} = 0$ e $a_5 \neq 0$, tem-se $a_5^2 \neq 4a_0a_{11}$. Tem-se que

$y^3 = \frac{y}{a_5} f_x - \frac{2a_0}{a_5^2} f_y + \frac{a_4}{a_5^2} x f_x + k_1 xy f_x + k_2 y^2 f_x,$

$y^3 = \frac{2a_0}{a_5} xy + \frac{3a_3}{a_5} x^2 y + \frac{2a_4}{a_5} xy^2 + y^3 + ... - \frac{2a_0}{a_5^2} f_y + \frac{a_4}{a_5^2} x f_x + k_1 xy f_x + k_2 y^2 f_x,$

$y^3 = y^3 + g(x,y)$, com $g(x,y)$ soma de termos maior igual a 4.

então, $y^3 \in J_f + \mathcal{M}^4$..

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & (x) & & & y & & \\
 & & (x^2) & & (xy) & & & y^2 & \\
 & (x^3) & & (x^2y) & & (xy^2) & & & (y^3) \\
(x^4) & & (x^3y) & & (x^2y^2) & & (xy^3) & & (y^4) \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Logo codimensão=3 e a singularidade é do tipo A_3.

Proposição 5.6 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$, *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 = 0$ *e* $a_6 = 0$ *e* $a_5^2 = 4a_0a_{11}$ *então a singularidade é do tipo* A_k, *com* $k \geq 4$.

Se $a_5^2 - 4a_0a_{11} = 0$ tem-se que

$$y^3 = \frac{1}{4a_{11}} f_y - \frac{a_4}{8a_0a_{11}} x f_x - \frac{a_5}{4a_0a_{11}} y f_y + \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}} y^3 - g(x,y)$$

$$y^3 = (1 - \frac{a_5^2}{4a_0a_{11}}) y^3 - g(x,y)$$

com $g(x,y)$ soma de termos com grau maior igual a 4

$$y^3 = (1-1)y^3 \cdots$$

$$y^3 = y^3 - y^3 \cdots$$

que anularia o y^3.

Se $a_{10} \neq 0$, pode-se ter

$$y^3 = \frac{1}{a_{10}} f_x + \cdots$$

$$y^3 = \frac{2a_0}{a_{10}} x + \frac{3a_3}{a_{10}} x^2 + \cdots + y^3 + \cdots$$

não seria possível cancelar o termo $\frac{2a_0}{a_{10}}x$, pois tem-se que usar novamente $-\frac{1}{a_{10}}f_x$, o que anularia y^3.

Portanto $y^3 \notin J_f + \mathcal{M}^4$. Logo, a codimensão é ≥ 4 e a singularidade é do tipo A_k com $k \geq 4$.

Proposição 5.7 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 = 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $a_3 \neq 0$ *então a singularidade é do tipo* A_2.

A prova é análoga a Proposição 5.4.

Proposição 5.8 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 = 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $a_3 = 0$ *e* $a_4^2 \neq 4a_2a_7$ *então a singularidade é do tipo* A_3.

A prova é análoga a Proposição 5.5.

Proposição 5.9 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 = 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $a_3 = 0$ *e* $a_4^2 = 4a_2a_7$ *então a singularidade é do tipo* A_k, *com* $k \geq 4$.

A prova é análoga a Proposição 5.6.

Proposição 5.10 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $b_6 \neq 0$ *então a singularidade é do tipo* A_2.

Prova: Segue da Proposição 5.2 que a curva algébrica $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$ pode ser reescrita por $f(x,y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \cdots$, se $a_0a_2 - a_1^2 = 0$. Como $b_1^2 - b_0b_2 = 0$ e $b_0 \neq 0$ e $b_2 = 0$ e $b_6 \neq 0$ tem-se da Proposição 5.4 que a singularidade é do tipo A_2.

Proposição 5.11 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $b_6 = 0$ *e* $b_5^2 \neq 4b_0b_{11}$ *então a singularidade é do tipo* A_3.

Prova: Segue da Proposição 5.2 que a curva algébrica $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$ pode ser reescrita por $f(x,y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \cdots$, se $a_0a_2 - \frac{a_1}{4} = 0$. Como $b_1^2 - 4b_0b_2 = 0$ e $b_0 \neq 0$ e $b_2 = 0$ e $b_6 = 0$ e $b_5^2 \neq 4b_0b_{11}$ tem-se da Proposição 5.5 que a singularidade é do tipo A_3.

Proposição 5.12 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$. *Se* $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ *e* $a_0 \neq 0$ *e* $a_2 \neq 0$ *e* $b_6 = 0$ *e* $b_5^2 = 4b_0b_{11}$ *então a singularidade é do tipo* A_k, *com* $k \geq 4$.

Prova: Segue da Proposição 5.2 que a curva algébrica $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$ pode ser reescrita por $f(x,y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \cdots$, se $a_0a_2 - \frac{a_1}{4} = 0$. Como $b_1^2 - 4b_0b_2 = 0$ e $b_0 \neq 0$ e $b_2 = 0$ e $b_6 = 0$ e $b_5^2 = 4b_0b_{11}$ tem-se da Proposição 5.6 que a singularidade é do tipo A_k, com $k \geq 4$.

Algoritmo 1 *Seja a curva algébrica dada por* $f(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \cdots$, *e sua forma diagonalizada* $f(x,y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \cdots$, *quando tem-se* $4a_0a_2 - a_1 = 0$. *Então*

Se $a_1^2 - a_0a_2 \neq 0$ **então** A_1

caso contrário se *(*$a_0 \neq 0$ *e* $a_2 = 0$*)* **então**

se *(*$a_6 \neq 0$*)* **então** A_2

caso contrário se *(* $a_5^2 \neq 4a_0a_{11}$*)* **então** A_3

caso contrário A_k *com* $k \geq 4$

caso contrário se *(*$a_2 \neq 0$ *e* $a_0 = 0$*)* **então**

se *(*$a_3 \neq 0$*)* **então** A_2

caso contrário se *(*$a_4^2 \neq 4a_2a_7$*)* **então** A_3

caso contrário A_k *com* $k \geq 4$

caso contrário se *(*$a_2 \neq 0$ *e* $a_0 \neq 0$*)* **então**

se *(*$b_6 \neq 0$*)* **então** A_2

caso contrário se *(*$b_5^2 \neq 4b_0b_{11}$*)* **então** A_3

caso contrário A_k *com* $k \geq 4$

Para mostrar a simplicidade da aplicação da técnica de coeficientes em relação à técnica por codimensão, reclassificamos as singularidades apresentadas nos Exemplos[15,$\cdots$, 22].

Exemplo 23 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, -u^4 - v^4)$ *e* $G(p,q) = (p, q, -q^2)$ *tem uma singularidade em* $(0,0)$ *(Figura 5.10). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $0,0)$

$$f(x,y) = -x^4 - y^4 + y^2.$$

Foi visto no Exemplo 19 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_2y^2 + a_7x^4 + a_{11}y^4$ seus coeficientes são $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_7 = -1$ e $a_{11} = -1$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. Como $a_1^2 - a_0a_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ e $a_4^2 \neq 4a_0a_7$, então a singularidade é do tipo A_3 (tacnóide) (Figura 5.10).

Exemplo 24 *A interseção de* $F(u,v) = (u, v, (1/6)u^6 - (5/4)u^4 + 2u^2 + v^2)$ *e* $G(p,q) = (p, q, 0.917)$ *tem dois pontos de singularidade. Os pontos singulares na interseção das superfícies ocorrem nos pontos* $(u,v) = (-1, 0)$ *e* $(u,v) = (0, 1)$ *do domínio paramétrico de uma das superfícies. Expandindo em Taylor obtem-se para cada ponto singular, a seguinte curva algébrica com singularidade em* $(0, 0)$

$$f(x,y) = +5.99x^2 - 2y^2 + a_3x^4 + a_4x^6.$$

Foi visto no Exemplo 21 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_0x^2 + a_2y^2 + a_7x^4 + a_{18}x^6$ seus coeficientes são $a_0 = 5.99$, $a_1 = 0$ e $a_2 = -2$, logo a determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = -11.98$ (**Se** $a_1^2 - a_0a_2 \neq 0$ **então** A_1) a singularidade é do tipo A_1 node (ponto de bifurcação) (Figura 5.12).

Exemplo 25 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, u^3 - y^2)$ *e* $G(p,q) = (p, q, 0)$ *tem uma singularidade em* $(u,v) = (p,q) = (0, 0)$ *(Figura 5.13). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $(0, 0)$

$$f(x,y) = x^3 - y^2.$$

Foi visto no Exemplo 22 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_2y^2 + a_3x^3$, seus coeficientes são $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, logo o determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. **Se** $(a_1^2 - a_0a_2 = 0)$, $a_2 = -1 \neq 0$ e $a_3 = 1 \neq 0$ temos que a singularidade é do tipo A_2 (cúspide simples) (Figura 5.13).

Exemplo 26 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (1.2cos(u)sen(v), 1.6sin(u)sen(v), 2cos(v))$ *e* $G(p,q) = (0.9cos(p)sen(q), 1.6sen(p)sen(q), 2.5cos(q))$ *tem singularidads que correspondem aos pontos* $(-1.57, -1.57)$ *e* $(1.57, -1.57)$ *no domínio de parâmetros (Figura 5.8). Expandindo em Taylor nos pontos* $(-1.57, -1.57)$ $(1.57, -1.57)$*, obtém-se as seguintes curvas algébricas com singularidades na origem* $(0, 0)$

Primeiro ponto singular $(-1.57, -1.57)$

$f(x,y) = -1.24x^2 + 1.6y^2 + g(x,y)$, onde $g(x,y)$ tem grau ≥ 3.

Segundo ponto singular $(1.57, -1.57)$

$f(x,y) = -1.24x^2 + 1.6y^2 + h(x,y)$, onde $h(x,y)$ tem grau ≥ 3.

Foi visto no Exemplo 17 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Para o primeiro ponto singular $(u, v) = (-1.57, -1.57)$

Como $f(x, y) = a_0x^2 + a_2y^2 + g(x, y)$ seus coeficientes são $a_0 = -1.24$, $a_2 = 1.6$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 1.984$. Como $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 \neq 0$. Então a singularidade é do A_1 (Node) (Figura 5.8).

Para o segundo ponto singular $(u, v) = (1.57, -1.57)$

Como $f(x, y) = a_0x^2 + a_2y^2 + g(x, y)$ seus coeficientes são $a_0 = -1.24$, $a_2 = 1.6$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 1.984$. Como $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 \neq 0$. Então a singularidade é do A_1 (Node) (Figura 5.8).

Exemplo 27 *A interseção de superfícies* $F(u, v) = (u, v, 0.2u^4 + 0.1v^4)$ *e* $G(p, q) = (p, q, 0.3p^2q - 0.1q^2 + 0.2q^3)$ *tem duas singularidades que correspondem aos pontos* $(0, 1)$ *e* $(0, 0)$ *no domínio de parâmetros (Figura 5.9). Expandindo em Taylor nos pontos* $(0, 1)$ $(0, 0)$*, obtém-se as seguintes curvas algébricas com singularidades na origem* $(0, 0)$

Primeiro ponto singular $(0, 1)$

$f(x, y) = 0.55x^2 - 0.18y^2 + g(x, y)$, onde $g(x, y)$ tem grau ≥ 3.

Segundo ponto singular $(0, 0)$

$f(x, y) = 0.2x^4 + 0.1y^4 - 0.3x^2y + 0.1y^2 - 0.2y^3$.

Foi visto no Exemplo 18 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Para o primeiro ponto singular $(u, v) = (0, 1)$

Como $f(x, y) = a_0x^2 + a_2y^2 + g(x, y)$ seus coeficientes são $a_0 = 0.55$, $a_2 = 0.1$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0.055$. Como $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 \neq 0$. Então a singularidade é do A_1 (Node) (Figura 5.9).

Para o segundo ponto singular $(u, v) = (0, 0)$

Como $f(x, y) = a_2y^2 + a_4x^2y + a_6y^3 + a_7x^4 + a_{11}y^4$ seus coeficientes são $a_2 = 0.1$, $a_4 = -0.3$, $a_6 = -0.2$, $a_7 = 0.2$ e $a_{11} = 0.1$. O derterminante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. Como $a_1^2 - a_0a_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_0 = 0$, $a_3 = 0$ e $(a_4^2 \neq 4a_0a_7)$, então a singularidade é do A_3 (tacnóide) (Figura 5.9).

Exemplo 28 *A interseção de superfícies* $F(u, v) = (u, v, u^4 + v^4 - 4u^3 - 4uv^2 + 2u^2v^2 - 4v^2)$ *e* $G(p, q) = (p, q, 0)$ *tem uma singularidade em* $(0, 0)$ *(Figura 5.11). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade em* $(0, 0)$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 2x^2y^2 - 4y^2.$$

Foi visto no Exemplo 20 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_2y^2 + a_3x^3 + a_5xy^2 + a_7x^4 + a_9x^2y^2 + a_{11}y^4$, seus coeficientes são $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. Como $a_1^2 - a_0a_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$, então a singularidade é do tipo A_2 (cúspide simples) (Figura 5.11).

Exemplo 29 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, u^4 + u^2v^2 - 2u^2v - uv^2 + v^2)$ *e* $G(p,q) = (p,q,0)$ *contém um ponto singular em* $(u,v) = (p,q) = (0,0)$ *(Figura 5.6). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $(0,0)$

$$f(x,y) = y^2 - 2x^2y - xy^2 + x^4 + x^2y^2.$$

Foi visto no Exemplo 15 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_2y^2 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_7x^4 + a_9x^2y^2$, seus coeficientes são $a_0 = 0$,$a_1 = 0$ e $a_2 = 1$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. Como $a_1^2 - a_0a_2 = 0$, $a_2 = 1$, $a_0 = 0$, $a_3 = 0$ e $a_4^2 = 4a_2a_7$, então a singularidade é tipo A_k com $k \geq 4$ (Figura 5.6). Logo a codimensão é maior igual a 4.

Exemplo 30 *A interseção de superfícies* $F(u,v) = (u, v, \frac{3u^4}{4} + u^3 + \frac{u^2}{4} + \frac{7u^2v^2}{2} + uv^2 + v^4)$ *e* $G(p,q) = (p,q,0)$ *tem uma singularidade em* $(u,v) = (p,q) = (0,0)$ *(Figura 5.7). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem* $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + x^3 + xy^2 + \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^2y^2}{2} + y^4.$$

Foi visto no Exemplo 16 a classificação da curva algébrica calculando a codimensão. Agora vamos classificar a curva algébrica usando a técnica dos coeficientes.

Como $f(x,y) = a_0x^2 + a_3x^3 + a_5xy^2 + a_7x^4 + a_9x^2y^2 + a_{11}y^4$, seus coeficientes são $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$. O determinante da hessiana é $det(H) = a_1^2 - a_0a_2 = 0$. Como $a_1^2 - a_0a_2 = 0$, $a_0 \neq 0$ e $a_2 = 0$, $a_6 = 0$ e $a_5^2 = 4a_0a_{11}$, então a singularidade é do tipo A_k com $k \geq 4$ (Figura 5.7). Logo a codimensão é maior igual a quatro.

5.3 Comentários

O desejável na técnica de caminhada é que seja possível traçar maximamente uma curva de interseção a partir de um ponto inicial, isto é, obter o traçado completo e topologicamente correto. Em algumas curvas de interseção pode-se ter pontos singulares que não permitam a continuidade da caminhada (pontos cuspidais) e pontos singulares que mesmo havendo continuidade na caminhada pode levar a um traçado da curva topologicamente errôneo (pontos oscnoidais). Portanto necessita-se fazer um estudo local do comportamente destas singularidades para que se possa traçar uma curva topologicamente correta.

Da teoria de singularidade pode-se extrair diversas técnicas para classificar localmente um ponto singular: técnica da tangente, técnica da codimensão e técnica dos coeficentes.

A técnica da tangente é computacionalmente fácil de ser implementada, porém não se consegue distinguir o comportamento de pontos singulares do tipo A_k (cuspidais, tacnoidais e osnoidais) devido a existência de uma única tangente.

A técnica da codimensão consegue classificar singularidades do tipo A_k e outras singularidades previamente classificadas (D_k, com $k \geq 1$ e E_k, com $k \in \{6, 7, 8\}$). Porém é difícil implementar esta técnica devido a complexidade dos calculos da codimensão para cada curva algébrica.

A técnica dos coeficientes é computacionalmente fácil de ser implementada e também muito mais simples do que a técnica da codimensão. Pode-se verificar esta afimação comparando os Exemplos[15,$\cdots$, 22] (técnica da codimensão) com os Exemplos[23,$\cdots$, 30] (técnica dos coeficientes). Entretando algoritmicamente ainda limita-se a classificar singularidades do tipo A_k, com $k \leq 3$. Embora muito limitada na quantidade de tipos de singularidades é uma proposta muito animadora devido sua fácil implementação. Pretende-se estabelecer condições algorítmicas para singularidades A_k, com $k \geq 4$ e outras singularidades previamente classificadas em teorias de singularidades.

Capítulo 6

Critério de Parada em Curvas Fechadas

O método de caminhada, como já foi mencionado no Capítulo 3, começa por achar um ponto na curva interseção, e prossegue caminhando ao longo da curva. Por causa da complexidade inerente de curvas algébricas de ordem superior que podem ser geradas pela interseção de duas superfícies regulares, caminhar ao longo desta curva é um problema difícil. Tais curvas podem ter pontos singulares onde os vetores normais de ambas superfícies são paralelos e soluções numéricas podem falhar. Além disso, quando uma curva fechada é traçada, não há suficientes condições conhecidas como critério de parada para o método da caminhada. Na tese de doutorado [9], Andrade propôs a seguinte solução para este problema: para evitar o problema de "infinitas iterações" quando se está caminhando ao longo de curvas fechadas, fixou-se o número máximo de pontos para caminhada, isto é, para cada ponto inicial ele poderá no máximo caminhar um número já fixado.

Porém, fixar uma quantidade de pontos pode gerar o problema de não completar a caminhada ou a sobreposição de pontos já percorridos. A Figura 6.1 é um exemplo de que quantidade de pontos fixados pode ser pouca para que se complete uma curva totalmente.

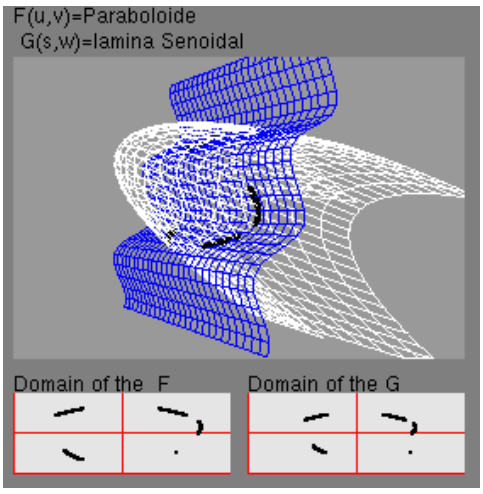


Figura 6.1: Curva de interseção fechada.

Todos os testes baseados no critério de vetores normais podem rapidamente alcançar a condição de não existência de curva fechada para a interseção de superfícies. Mas, se duas superfícies intersecionam em laços fechados, as superfícies são divididas e novos testes serão realizados nos retalhos (*subpatches*) para detectar a não existência de laços fechados. Quando duas superfícies intersecionam em laços fechados muito pequenos, ou em casos extremos, quando duas superfícies intersecionam em pontos isolados (singularidades), estes critérios apresentam problemas parecidos com os do algoritmo da subdivisão.

A detecção baseada no critério da distância, envolve um trabalho computacional laborioso e sua robustez depende da qualidade dos chutes iniciais para encontrar os pontos críticos.

Devido às dificuldades apresentadas acima e também devido a novas direções de caminhada de terceira ordem apresentadas no Capítulo 4, optou-se em perseguir um critério que fornecesse uma condição suficiente para caminhar ao longo de uma curva fechada e parar quando esta fosse percorrida totalmente. Este critério é baseado na estimativa do índice de rotação da curva de interseção olhada no domínio paramétrico, quando a curva é fechadao índice de rotação éum inteiro. Os resultados aqui apresentados são parte integrante dos artigos [33, 34]

Teoricamente, uma curva fechada de classe C^k é a imagem de uma parametrização $\alpha\colon [a,b] \rightarrow R^2$, com derivadas contínuas de ordem k, tal que $\alpha\prime(t) \neq 0 \forall t$ e $\alpha(t)$ e todas suas derivadas concordem em a e b; isto é, quando $\alpha(a) = \alpha(b), \quad \alpha\prime(a) = \alpha\prime(b), \quad \alpha\prime\prime(a) = \alpha\prime\prime(b), \cdots$. Esta última condição é equivalente dizer que α é uma função periódica C^k restrita a um período. Neste trabalho, assume-se que α é pelo menos C^2. Então a primeira idéia que surge naturalmente é testar as condições geométricas locais da curva no domínio paramétrico:

- distância entre o ponto corrente e o ponto inicial é menor que ϵ;

  A magnitude de ϵ depende do tamanho do passo. A Figura 6.2 descreve a situação onde devido ao valor do ϵ escolhido pode-se passar pelo ponto incial sem detectá-lo.

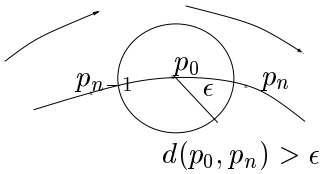


Figura 6.2: Condições de proximidade.

  Para solucionar este problema, pode-se pensar em aumentar a magnitude do ϵ escolhido; porém, a condição $d(p_0, p_i) < \epsilon$ poderá ser satisfeita sem que p_i seja o último ponto (Figura 6.3).

- o ângulo entre os vetores tangentes no ponto ínicial e final é menor que δ.

  Para resolver o problema que foi mencionado no ítem anterior achou-se que usando as condições de primeira ordem, vetor tangente, pode-se resolver este problema. Esta condição

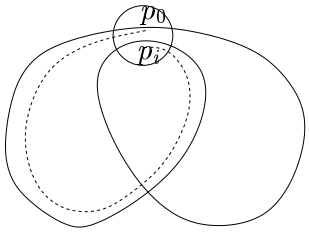


Figura 6.3: Condições de proximidade.

é medida por fixar um ângulo inicial ϕ_0 (ângulo entre $\vec{t}_0$ e $\vec{t}_1$) e ao caminhar na curva deve-se ir medindo o valor do ângulo entre os vetores: tangente no ponto inicial $\vec{t}_0$ e o vetor $p_0\vec{p}_i$, que foi denotado ϕ_i. Na Figura 6.4 tem-se que a condição $d(p_o, p_i) < \epsilon$ é satisfeita, mas a condição $\mid \phi_0 - \phi_i \mid < \delta$ não.

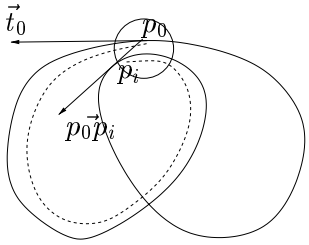


Figura 6.4: Condição de primeira ordem.

Porém, pode-se ter situações onde são satisfeitas as condições de $d(p_0, p_i) < \epsilon$ e $\mid \phi_0 - \phi_i \mid < \delta$, entretanto não é o "último" ponto da curva. Esta situação está ilustrada na Figura 6.5.

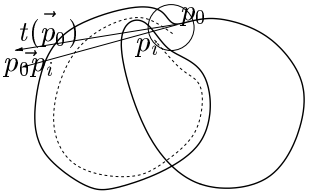


Figura 6.5: Condições de proximidade e primeira ordem.

Na prática, estas condições são muito sensíveis a erros na aritmética de ponto flutuante. Chegou-se a pensar em incluir mais duas condições diferenciais: verificar curvatura e torção no ponto corrente e no ponto inicial. Infelizmente, todas são sensíveis ao valor de erro escolhido. Só com passos suficientemente pequenos pode-se assegurar que tais condições podem ser satisfeitas.

Para contornar este problema de sensibilidade e aumentar a robustez na decisão da parada, foi proposto adicionar uma condição topológica (propriedade geométrica global) - - comparar a somatória da variação do ângulo dos vetores tangente dos pontos traçados com o índice de rotação da curva a qual eles pertencem. Para isso, precisa-se estimar o índice de rotação da curva que não é

conhecida. **Como estimar este índice?** Foi proposto utilizar as informações topológicas, isto é, pontos de bifurcação, quantidade de laços e suas orientações, para pre-determinar o provável índice da curva. Este índice será em função de $I(m)$, com $m \in N$, onde m é o número algébrico de laços (contamos +1 ou -1 conforme o laço esteja orientado no sentido anti-horário ou horário).

A idéia básica é simples: Deve-se estimar o índice de rotação I antes de terminar a caminhada da curva e comparar com a somatória dos ângulos θ_t entre o vetores tangentes de pontos sucessivos. Se a condição $\mid 2I\pi - \theta_t \mid < \eta$ com a magnitude de η for satisfeita, então diminui-se o tamanho do passo localmente enquanto a condição $\mid 2I\pi - \theta_t \mid < \eta$. Quando as condições de proximidade, de primeira ordem e de índice forem satisfeitas, assume-se que percorremos totalmente a curva. Para não diminuir o passo quando está longe do ponto final, coloca-se a condição de distância $d(p_0, p_i) < 0.1$.

Se ($\mid 2I\pi - \theta_t \mid < \eta$ e $d(p_o, p_i) < 0.1$) **então** $L = \frac{L_0}{100}$
  Se ($d(p_0, p_i) < \epsilon$ e $\mid \phi_0 - \phi_i \mid < \delta$) **então** ponto final
  Caso contrário continua a caminhada
senão $L_0 = 100 * L$ e continua a caminhada

No teste $\mid 2I\pi - \theta_t \mid < \eta$, pode-se escolher um valor razoavelmente grande para o errro η, pois se o índice não for o correto, a diferença $\mid 2I\pi - \theta_t \mid$ é grande. Índices adjacentes ($I = a$ ou $I = a + 1$) tornam a diferença $\mid 2I\pi - \theta_t \mid$ próximo ao valor de 2π. Os valores a serem comparados não são tão sensíveis como acontece com as condições geométricas diferenciais locais usando valores de ϵ e δ pequenos.

Na Seção 6.1 apresenta-se um algoritmo que estima o índice de rotação de uma curva fechada. Uma prova para validar este algoritmo é dada na seção 6.2. A aplicação deste algoritmo no controle do traçado de curva interseção é descrita na seção 6.4. Finalmente, algumas observações são feitas na Seção 6.5.

6.1 Índice em Função de Pontos de Auto-interseção

Serão introduzidas algumas definições antes de apresentar a fórmula que relaciona os pontos singulares com o índice de rotação.

Como será visto na Proposição 6.1 pares de pontos tangenciais podem ser ignorados no cálculo do índice de rotação, pois uma pequena deformação pode descolar um pequeno arco contendo um dos pontos do par tangencial da parte restante da curva. A nova curva, agora sem o par tangencial tem o mesmo índice de rotação da curva original. Neste processo reduz-se a multiplicidade do ponto de auto-interseção em consideração, sem afetar o índice de rotação. Isto motivou a introduzir a seguintes definições *par de bifurcação*, *par tangencial*, *multiplicidade líquida* e *laço parametrizado*.

Definição 16 *Seja* $\alpha\colon [a, b] \to R^2$ *uma curva regular fechada dada por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *e seja* $\mathcal{P} = c(t_1)$ *um auto-interseção. Se existe* $t_2 \neq t_1 \in [a, b]$, *tal que* $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \mathcal{P}$ *e o sinal do*

produto vetorial $\dot{\alpha}(t_1-\varepsilon)\times\dot{\alpha}(t_2-\delta)$ *e* $\dot{\alpha}(t_1+\varepsilon)\times\dot{\alpha}(t_2+\delta)$ *é o mesmo para um* ε *e* δ *suficientemente pequenos e positivos. Então, diz-se que* $\mathcal{P}$ *é um* ponto de bifurcação *relativo para* $\{t_2,t_1\}$ *e chama-se* $\{t_2,t_1\}$ *um* par bifurcação. *Caso contrário,* $\mathcal{P}$ *é denominado um* ponto tangencial *relativo para* $\{t_2,t_1\}$ *e chama-se* $\{t_2,t_1\}$ *um* par tangencial.

Observa-se que um ponto transversal duplo (um ponto onde as tangentes não são coincidentes) é um ponto de bifurcação (Figura 6.6.(a)). Mas, se há somente uma tangente em um ponto duplo, pode ser ou um ponto de bifurcação (Figura 6.6.(b)) ou um ponto tangencial (Figura 6.6.(c)).

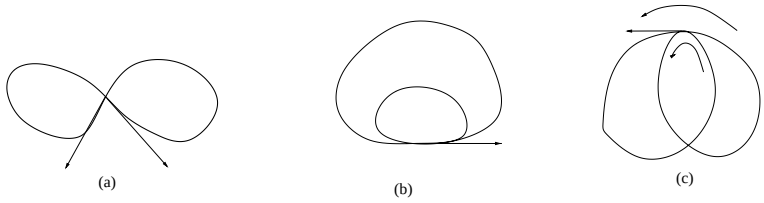
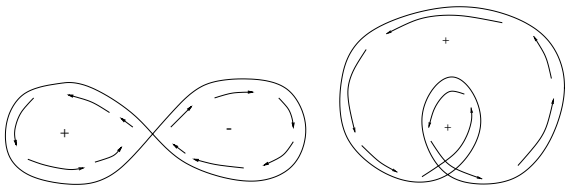


Figura 6.6: Pontos transversais e não transversais.

Observe que as curvas do tipo formato de oito e tipo C_m contém pontos de bifurcação.

A curva em formato de oito tem um ponto de bifurcação que separa "laços" com orientações opostas (Figura 6.7.a), enquanto na curva C_m, ele conecta "laços" com a mesma orientação. A Figura 6.7.b ilustra uma curva C_1 separando dois laços com mesma orientação.



(a) formato de oito (b) Curva C_1

Figura 6.7: Laços orientados.

Definição 17 *Seja* $\mathcal{P}$ *um ponto múltiplo e* $\alpha^{-1}(\mathcal{P}) = \{ t_1, \cdots, t_j, \cdots, t_k\}$. t_j *é chamada um* gerador de bifurcação *se existe* t_l *tal que* $\mathcal{P}$ *é um ponto de bifurcação para* $\{t_j,t_l\}$. *A* multiplicidade líquida *de um ponto* $\mathcal{P}$ *na curva é um número de pontos em* $\alpha^{-1}(P)$ *que são geradores de bifurcação.*

Definição 18 *Seja* $\mathcal{A} = [t_0,t_1)\cup[t_2,t_3)\cup\cdots\cup[t_{n-1},t_n)$. *A restrição* α: $\mathcal{A}\to R^2$, $a < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n < b$, *onde* t_1, t_2, $\cdots$ t_{n-1}, t_n *são todos geradores de bifurcação de* α *restrito para* $\mathcal{A}$, *é chamado um* laço parametrizado *se a seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\alpha|\mathcal{A}$ *tem multiplicidade líquida igual 1,*
2. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$, $\alpha(t_3)=\alpha(t_4)$, $\alpha(t_5)=\alpha(t_6)$, $\cdots$, $\alpha(t_{n-2})=\alpha(t_{n-1})$,

3. $\alpha(t_0) = \alpha(t_n)$,

4. t_0 *e* t_n *é um par de bifurcação.*

Se não há geradores de bifurcação em α, a condição acima não será furada e portanto assume-se que α é por si mesma um laço parametrizado.

Se $\alpha(t)$ é curva suave, regular e fechada, cada laço parametrizado $\mathcal{L}$ é suave por partes, regular e fechada, que não tem auto-interseção exceto em pontos tangenciais. O índice de rotação (Eq. 2.14) de $\mathcal{L}$ é 1 ou -1 de acordo com a orientação do laço parametrizado ser positiva ou negativa.

Uma curva fechada sempre pode ser dividida em um conjunto de laços parametrizados. Esta partição é única quando o ponto inicial é fixo. Na Figura 6.8 ilustra quatro diferentes partições de uma curva em laços parametrizados.

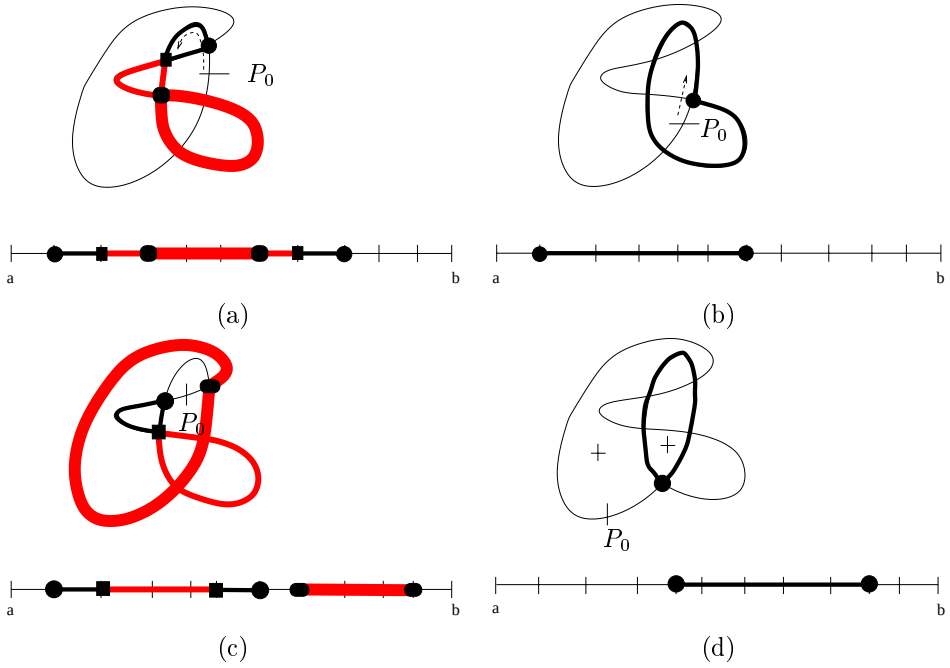


Figura 6.8: Diferentes partições paramétricas para a mesma curva.

Para proceder o relacionamento do índice de rotação de uma curva com seus laços parametrizados, nota-se que em um ponto de bifurcação que tem multiplicidade 2, a soma algébrica de ângulos externos orientados em $\mathcal{P}$, relativemente a dois laços adjacentes, é zero. Isto implica que para uma curva fechada que possui somente pontos múltiplos do tipo (cruzamento simples) o índice de rotação é justamente a soma algébrica do índices de seus laços parametrizados (Prop. 6.2).

Se a multiplicidade líquida no ponto $\mathcal{P}$ é maior do que 2, a soma algébrica dos ângulos externos orientados de seus laços parametrizados pode ser zero ou um múltiplo de 2π, como afirma a Proposição 6.3. Para cada ponto $\mathcal{P}$ que tem multiplicidade líquida maior que 2, deve-se então

incluir na equação dada na Proposição 6.2 um fator corretor k, onde k é soma dos algébrica ângulos externos orientados dividido por 2π. Uma expressão geral que ralaciona o índice de rotação e o número de laços parametrizados é obtida

$$n_c = (m - n) - k. \tag{6.1}$$

A Figura 6.9(a) ilustra uma curva fechada tendo dois pontos com multiplicidade maior do que 2 com 7 laços parametrizados (m=6, n=1) e a soma dos ângulos exteriores é zero nestes pontos (k=0) e sua deformação contínua é uma curva C_5. Este resultado pode ser obtido da Eq. 6.1, uma vez que $I_\alpha = 6-1-0 = 5$. A Figura 6.9(b) mostra uma curva tendo dois pontos com multiplicidade maior do que 2 com oito laços parametrizados (m=4 e n=4) e a soma dos ângulos exteriores é zero $k = 0$ que pode ser deformado continuamente em uma curva formato-oito. O resultado é também obtido com o uso da Eq. 6.1 ($n_c = m - n - k = 4 - 4 - 0 = 0$).

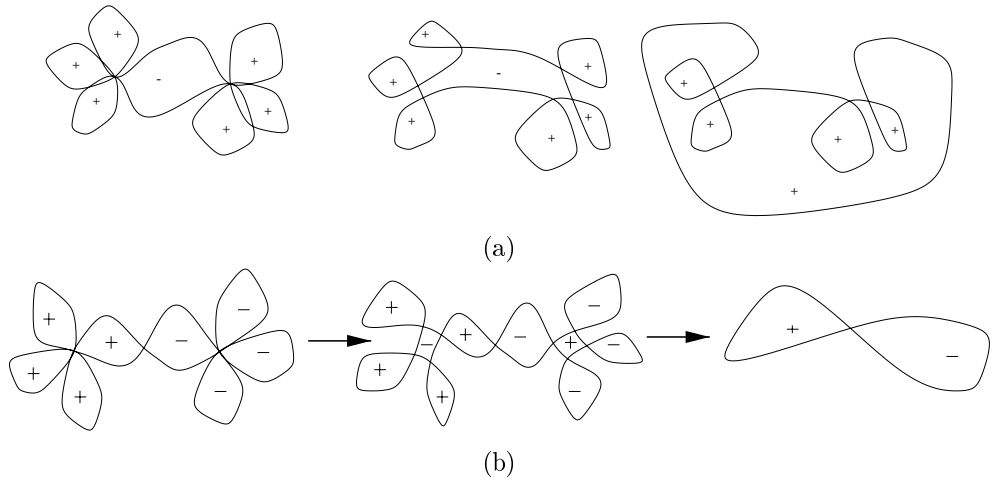


Figura 6.9: Deformação.

6.2 Validação

Nesta seção será validada a Eq. 6.1 para curvas com multiplicidade até 2 ou n ($n \geq 3$) quando os laços parametrizados são regulares exceto num ponto. Proposição 6.1 assegura que pontos tangenciais podem ser ignorados no cálculo de índice de rotação de uma curva fechada; Proposição 6.2 é restrita a curvas que possuem pontos singulares com multiplicidade 2 (cruzamento simples); e a Proposição 6.3 que considera os fatores corretores é restrita a curvas com pontos singulares com multiplicidade maior igual a 2.

Proposição 6.1 *Qualquer curva regular fechada α_1 é homotópica para uma curva α_2 que não possui pontos tangenciais.*

Prova: Seja $\mu(t)$ sendo a função "lombada" que desloca ligeiramente, sem sobrepôr $\alpha_1(t)$, o ponto tangencial $\alpha_1(t_2)$ relativamente para o par $\{t_1, t_2\}$ e sua vizinhança de $\alpha_1(t_1)$ na direção do vetor normal $n_1(t) = \kappa(t)n(t)$ de $\alpha_1(t)$, tal que $\alpha_2 \colon [a, b] \to R^2$ definida pela (Figura 6.10)

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{if } t \in [a, t_2 - \delta], \\ \alpha_1(t) + \mu(t)n_1(t) & \text{if } t \in (t_2 - \delta, t_2 + \delta), \\ \alpha_1(t) & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

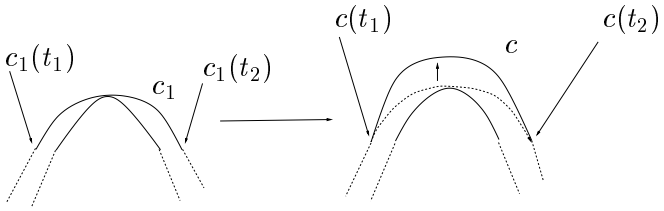


Figura 6.10: Ligeira deformação de $\alpha_1(t)$ para $\alpha_2(t)$.

Com a clássica $C^{\inf}$ funçõa de Cauchy $\beta \colon R \to R$ (Figura 6.11)

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0, \\ \pm\epsilon \; exp(-\frac{1}{t}) & \text{if } t > 0. \end{cases} \quad ,$$

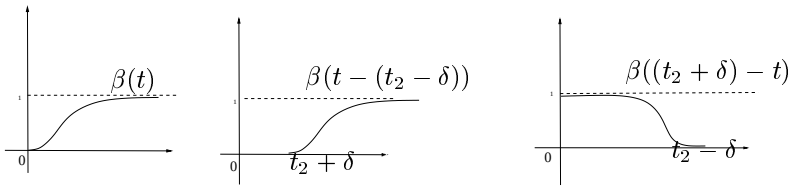


Figura 6.11: Função de Cauchy.

a função $\mu \colon R \to R$ pode ser definida por (Figura 6.12)

$$\mu(t) = \beta(t - t_1).\beta(t_2 - t), \forall t \in [a, b]. \tag{6.2}$$

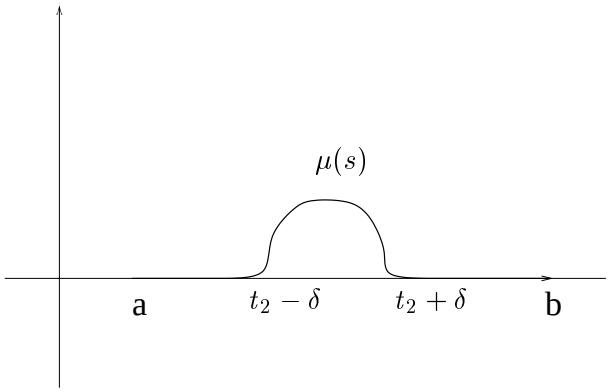


Figura 6.12: Função "Lombada".

Note que $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ não intersectam na vizinhança de t_2 pela apropriada escolha do sinal $\pm$ e valor de ϵ.

Portanto, a função $\mathcal{H}\colon I \times I \to R^2$

$$\mathcal{H}(t,u) = \begin{cases} c_1(t) & \text{if } t \in [a, t_2 - \delta], \\ c_1(t) + u\mu(t)n_1(t) & \text{if } t \in (t_2 - \delta, t_2 + \delta), \\ c_1(t) & \text{if } t \in [t_2 + \delta, b] \end{cases}$$

com $t \in [0,1]$ deformando $\alpha_1(t)$ em $\alpha_2(t)$ sem o par de pontos tangenciais $\{t_1, t_2\}$.

$\mathcal{H}$ é uma função contínua e $\mathcal{H}(t,0) = \alpha_1(t)$, $\mathcal{H}(t,1) = c(t)$. Além disso, para u fixo, $\alpha_u(t) = \mathcal{H}(t,u)$ é uma curva regular. Par ver isto, pode-se assumir sem perda de generalidade que α_1 é parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto, $|\dot{\alpha}_1(t)| = 1$ e $\dot{n}_1(t) = -\kappa(t)\dot{\alpha}_1(t)$. Assim, tem-se que para $t \in (t_2 - \delta, t_2 + \delta)$

$$\dot{c}_u(t) = \dot{c}_1(t) + u\dot{\mu}(t)n_1(t) + u\mu(t)\dot{n}_1(t) = (1 - u\mu(t)\kappa(t))\dot{c}_1(t) + u\dot{\mu}(t)n_1(t).$$

Isto significa que para ϵ convenientemente pequeno

$$|\dot{c}_u(t)|^2 = (1 - u\mu(t)\kappa(t))^2 + (u\dot{\mu}(t))^2 \geq (1 - u\mu(t)\kappa(t))^2 > 0.$$

Para $t \in [a, t_2 - \delta] \cup [t_2 + \delta, b]$, pode-se ver que $\dot{c}_u(t) = \dot{c}_1(t)\ \forall u$, desde que $\dot{\mu}(t_2 - \delta) = \dot{\mu}(t_2 + \delta) = 0$.

Uma vez existindo a função contínua $\mathcal{H}$ tal que $\alpha_u(t) = \mathcal{H}(t,u)$, $u \in [0,1]$, é uma curva de $\alpha_u(a)$ para $\alpha_u(b)$ e $\alpha_0(t) = \alpha_1(t)$ e $\alpha_1(t) = \alpha(t)$ são curvas iniciais dadas, $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ são curvas homotópicas. Da Proposição 2.3, conclui-se que $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ tem o mesmo índice de rotação.

O mesmo procedimento pode ser aplicado recursivamente para todos os outros pares tangentes da curva original α_1 para finalmente obter a curva α_2, sem pontos tangenciais, homotópica a α_1.

Proposição 6.2 *Uma vez que o ponto inicial é fixado, se todos os pontos da curva plana, regular e fechada tem no máximo multiplicidade líquida igual a 2, então o índice de rotação é*

$$I_\alpha = m - n, \tag{6.3}$$

onde m e n são o número de laços parametrizados da curva orientados positivamente e negativamente.

Prova: Para enfatizar a idéia geométrica envolvida, primeiro considera-se o caso em que a curva $\alpha\colon [a,b] \to R^2$ tem somente um par bifurcação $\{t_1, t_2\}$, $a < t_1 < t_2 < b$. Então

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt].$$

Reagrupando esta soma de acordo com seus laços parametrizados $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, tem-se

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[\int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + (\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt)]. \tag{6.4}$$

Como tem-se tangentes se curzando em $\mathcal{P} = \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, para qualquer parametrização os ângulos exteriores de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ at $\mathcal{P}$ têm o mesmo valor ϕ, porém com orientação revertida. Adicionando o termo $\phi - \phi$ para o lado direito da Eq. 6.4, tem-se

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}(\int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \phi) + \frac{1}{2\pi}(\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt - \phi)]. \tag{6.5}$$

De acordo com a Proposição 2.5, há três classes de curvas. Então se faz necessário mostrar que para todas as curvas pode-se escrever o índice de rotação de uma curva como a soma algébrica de seus laços parametrizados.

Supondo que ambos os laços são positivamente orientados (Figura 6.13.a), então o ângulo exterior de um laço, $\mathcal{L}_1$, está no mesmo sentido (positivo) e o outro ângulo exterior está no sentido reverso (negativo). Segue que cada termo nos parenteses da Eq. 6.5 correspondem exatamente para o índice de rotação de cada laço parametrizado. Então, pode-se escrever I_α como uma função do índice de rotação de laços parametrizados $I_{\alpha,\mathcal{L}_1}$ e $I_{\alpha,\mathcal{L}_2}$

$$I_\alpha = I_{\alpha,\mathcal{L}_1} + I_{\alpha,\mathcal{L}_2} = 2.$$

Um argumento análogo assegura a demonstração da proposição nos casos onde ambos os laços são negativemente orientados (Figura 6.13.b).

Agora considerando que ambos os laços tenham orientação revertidas, então o ângulo exterior do laço orientado positivamente, $\mathcal{L}_1$, é posisivo e o ângulo exterior laço orientado negativamente, $\mathcal{L}_2$, é negativo. Então, os termos dentro do primeiro par de parenteses na Eq. 6.5 corresponde para $\mathcal{L}_1$ e dentro do segundo par para $\mathcal{L}_2$. Claramente,

$$I_\alpha = I_{\alpha,\mathcal{L}_1} - I_{\alpha,\mathcal{L}_2} = 0.$$

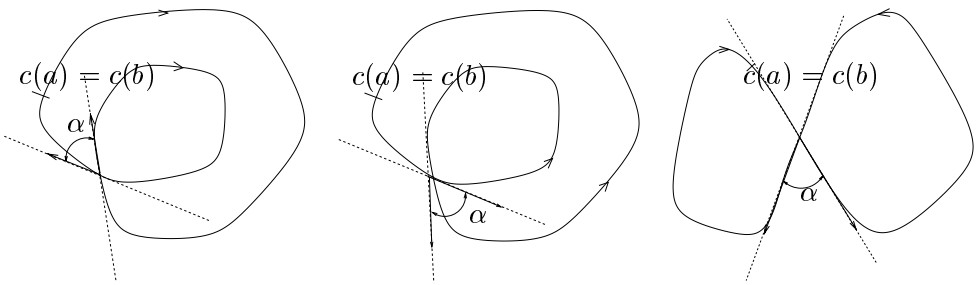


Figura 6.13: Ângulos exteriores de laços parametrizados.

Esta prova pode ser estendida para uma curva fechada qualquer α com pontos de multiplicidade igual a 2. Uma vez que a parametrização (também o ponto inicial) é fixada, considere a decomposição de α em laços parametrizados $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\cdots$, $\mathcal{L}_m$.

Seja $\overline{\alpha} = \{t_1, \cdots, t_{k-1}\}$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, sendo a união de todos os pontos de bifurcação de $\alpha(t)$ com $\alpha(a) = \alpha(b)$. O índice de rotação pode ser escrito como

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{i}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt.$$

Pode-se reagrupar esta soma de acordo com seus laços parametrizados $\mathcal{L}_j$ de α, $j = 1, \cdots, m$, cada um deles formado pela imagem de n segmentos disjuntos

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} (\sum_{l=1}^{n} \int_{t_{j,l}}^{t_{j,l+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt).$$

Como em cada singularidade de cada laço tem-se cruzamento simples, a soma algébrica dos ângulos exteriores dos laços adjacentes é zero. O mesmo raciocínio do caso simples pode ser aplicado aqui.

Reagrupando convenientemente cada termo e conhecendo que, por simetria, os termos ϕ_i são cancelados, pode-se expressar o índice de rotação de α (com m laços orientados positivamente e n laços orientados negativamente) como

$$I_\alpha = m(+1) + n(-1) = m - n.$$

Proposição 6.3 *Seja α uma curva plana, regular, fechada com laços parametrizados regulares exceto no ponto singular com multiplicidade maior do que 2. Então o índice de rotação é a soma*

algébrica dos laços parametrizados subtraídos do fator $\frac{\sum_i \phi_i}{2\pi}$, *onde* ϕ_i *é ângulo exterior de* i *adjacente laços em* $\mathcal{P}$.

Prova: Sem perda de generalidade, considere o caso da curva $\alpha\colon [a,b] \to R^2$ com um ponto de auto-interseção que é a iamagem dos geradores bifurcação $\{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_i < \cdots < t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_i < \cdots < t_n < b$. Então,

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots +$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt].$$

Reagrupando esta soma de acordo com seus laços parametrizados $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\cdots$, $\mathcal{L}_n$, tem-se

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[\int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots +$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + (\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt)].$$

Seja ϕ_i o ângulo exterior de i laço parametrizado. Adicionando o termo $\sum_i \phi_i - \sum_i \phi_i$ para o lado direito da equação, tem-se

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[\int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \cdots +$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + (\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt)] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Distribuindo ϕ_i na soma dentro dos parentesis, a equação torna-se

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}[(\int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \alpha_1) + \cdots + (\int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \alpha_i) + \cdots +$$

$$(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \alpha_{n-1}) + (\int_a^{t_1} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \int_{t_2}^{b} \kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \alpha_n)] - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

do qual segue imediatamente

$$I_\alpha = I_{\alpha,\mathcal{L}_1} + I_{\alpha,\mathcal{L}_2} + \cdots + I_{\alpha,\mathcal{L}_n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}{2\pi}$$

$$= I_{\alpha,\mathcal{L}_1} + I_{\alpha,\mathcal{L}_2} + \cdots + I_{\alpha,\mathcal{L}_n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{2\pi}. \tag{6.6}$$

Exemplo 31 *A Figura 6.14 ilustra uma curva em forma de 3-pétalas, multiplicidade 3.*

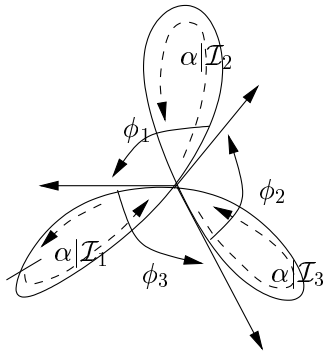


Figura 6.14: Ângulos em um ponto de bifurcação.

Observe que neste caso $2\pi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$. *Pode-se escrever o ângulo de rotação de* $\alpha|\mathcal{I}_1$, $\alpha|\mathcal{I}_2$, $\alpha|\mathcal{I}_3$ *como*

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_1}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_1) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} = 1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_2}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_2) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} = 1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_3}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_3), = I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} = 1$

$$I_\alpha = (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathcal{I}_i}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt) + (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i) - (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i)$$

$$I_\alpha = [\frac{1}{2\pi}(\int_{\mathcal{I}_1}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_1)+(\int_{\mathcal{I}_2}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_2)+(\int_{\mathcal{I}_3}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_3)] - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)]$$

$$I_\alpha = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)] = 3 - 1 = 2$$

Exemplo 32 *A Figura 6.15 ilustra um ponto de bifurcação com multiplicidade 3.*

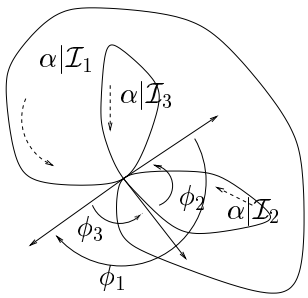


Figura 6.15: Ângulos em um ponto de bifurcação.

Observe que neste caso $\phi_1 = -(\phi_2 + \phi_3)$. *Pode-se escrever o ângulo de rotação de* $\alpha|\mathcal{I}_1$, $\alpha|\mathcal{I}_2$, $\alpha|\mathcal{I}_3$ *como*

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_1}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_1) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} = +1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_2}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_2) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} = +1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_3}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_3), = I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} = +1$

$$I_\alpha = (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathcal{I}_i}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt) + (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i) - (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i)$$

$$I_\alpha = [\frac{1}{2\pi}(\int_{\mathcal{I}_1}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_1) + (\int_{\mathcal{I}_2}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_2) + (\int_{\mathcal{I}_3}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_3)] - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)]$$

$$I_\alpha = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)] = 3 - 0 = 3$$

Exemplo 33 *A Figura 6.16 ilustra um ponto de bifurcação com multiplicidade 3.*

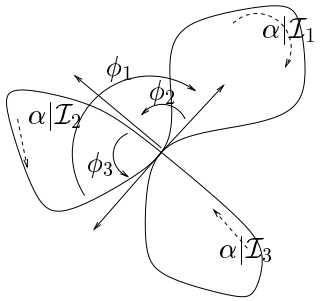


Figura 6.16: Ângulos em um ponto de bifurcação.

Observe que neste caso $\phi_1 = -(\phi_2 + \phi_3)$. *Pode-se escrever o ângulo de rotação de* $\alpha|\mathcal{I}_1$, $\alpha|\mathcal{I}_2$, $\alpha|\mathcal{I}_3$ *como*

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_1}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_1) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} = +1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_2}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_2) = I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} = -1,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}_3}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt + \frac{1}{2\pi}(\phi_3), = I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} = +1$

$$I_\alpha = (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathcal{I}_i}\kappa(t)|\dot{\alpha}(t)|dt) + (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i) - (\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\phi_i)$$

$$I_\alpha = [\frac{1}{2\pi}(\int_{\mathcal{I}_1}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_1) + (\int_{\mathcal{I}_2}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_2) + (\int_{\mathcal{I}_3}k(t)|\dot{\alpha}(t)|dt+\phi_3)] - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)]$$

$$I_\alpha = I_\alpha|_{\mathcal{I}_1} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_2} + I_\alpha|_{\mathcal{I}_3} - [\frac{1}{2\pi}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)]$$

$$I_\alpha = (+1) + (-1) + (+1) - 0 = 1 - 0 = 1$$

6.3 Um Algoritmo para Traçado Não-Sobreposto

O problema na implementação da condição de índice de rotação é que o índice I_α de uma curva de interseção não é conhecido. Portanto, a implementação não pode ser reduzida para uma simples comparação entre dois valores de ponto flutuante: a soma dos vetores tangentes $\sum \theta_{t_n}$ e I_α. Em vez disso, compara-se $\sum \theta_{t_n}$ com $(I_\alpha + 1)$ ou $(I_\alpha - 1)$, onde I_α é índice de rotação dinamicamente estimado enquanto se está caminhado na curva de interseção. Isto ocorre por causa que ao longo de cada laço parametrizado a soma $\sum \theta_{t_i} \pm \sum \phi_j$, onde $\sum \phi_j$ é a soma dos ângulos externos orientados no ponto de bifurcação, é múltiplo de 2π. Portanto o índice de rotação I_α é acrescido $2(I_\alpha + 1)\pi$ ou decrescido para $2(I_\alpha - 1)\pi$. Considera-se que a condição de índice rotação é satisfeita se $\| 2(I_\alpha + 1)\pi - \sum \theta_{t_i} \| < \eta$ ou $\| 2(I_\alpha - 1)\pi - \sum \theta_{t_i} \| < \eta$.

A proposta é resumida no seguinte algoritmo:

Algoritmo de traçado

Tome um ponto inicial $\alpha(s_0)$ distante de pontos singulares;
$P_0 = P_i = \alpha(s_0)$;
índice de rotação = 0;
tamanho do passo= L;
Obtenha o próximo ponto da curva de interseção P_{i+1};
enquanto *condição de próximidade* **ou** *condição tangencial* **ou** *condição de índice de rotação não for satisfeita por P_0 e P_{i+1}* **faça**

> $P_i = P_{i+1}$;
> *Obtenha o próximo ponto da interseção P_{i+1};*
> **Se** *condição de índice de rotação é satisfeita por P_0 e P_{i+1}* **então**
> *tamanho do passo* $= \frac{L}{100}$
> **Se** *condição de índice de rotação não é satisfeita por P_0 e P_{i+1}* **então**
> *tamanho do passo* = L.
> **Se** *P_{i+1} passou por um ponto bifurcação* **então**
> *Atualize indice de rotação se necessário:*
> *deve-se levar em consideração a orientação*
> *do laço parametrizado e o tipo de singularidade.*

Uma breve descrição do algoritmo

Inicia-se com índice $I = 0$, mas a condição do índice de rotação $||\theta_t| - 2I\pi| < \eta$ deverá ser substituída por $||\theta_t| - 2I_{p1}\pi| < \eta$ e $||\theta_t| - 2I_{p2}\pi| < \eta$, onde $I_{p1} = |I| + 1 = 1$ e $I_{p2} = |I| - 1 = -1$ que indica os possíveis índices, isto é, são candidatos a ser índice de rotação. Somente depois de passar por pontos de bifucação que a curva poderá não ser simples. Quando passar duas vezes por um ponto de bifurcação, tem-se um laço parametrizado orientado, então o índice passa a ser $I = I \pm 1$ e a condição $||\theta_t| - 2I_{p1}\pi| < \eta$ e $||\theta_t| - 2I_{p2}\pi| < \eta$, passa a ter os seguintes índices possíveis $I_{p1} = |I| + 1 = 2$, $I_{p2} = |I| - 1 = 0$. Assim segue o algoritmo. Quando a condição $||\theta_t| - 2I_{p1}\pi| < \eta$ e $||\theta_t| - 2I_{p2}\pi| < \eta$, for satisfeita o tamanho do passo será diminuido para tamanho do passo=$\frac{L}{100}$. O traçado só para quando as condições de proximidade, tangente e índice de rotação forem satisfeitas, caso contrário continua a caminhada. O tamanho do passo volta ao tamanho normal tamanho de passo=L quando a condição de índice de rotação não for satisfeita.

Da Proposição 6.3 desenvolveu-se um procedimento para estimar o índice de rotação de uma curva regular fechada $\alpha\colon [a, b] \to R^2$ percorrendo ao longo dela do ponto $\alpha(a)$ para $\alpha(b)$.

Algoritmo para obter o índice de rotação

índice de rotação = 0;

De $s = a$ a $s = b$

Se *há um ponto de bifurcação em* s_j **então**
Se *ele é encontrado pela primeira vez* **então**
Registra ele como um ponto extremo potencial do laço parametrizado.
Caso contrário
Remove os pontos no intervalo $[s_k, s_j]$ *que foram marcados como pontos extremos potenciais.*
Calcule a orientação do laço parametrizado $\alpha(s), t \in [s_k, s_j]$, *tal que* $s_k < s_j$ *e* $\alpha(s_k) = \alpha(s_j)$*;*
Se *orientação é positiva* **então** *incremente índice de rotação por 1;*
Caso contrário *decremente ele por 1.*

Para *cada ponto extremo i do laço parametrizado*

Se *ele é um ponto de bifurcação com multiplicidade* ≥ 3 **então**
encontre o ângulo exterior orientado
Se *número de vezes passado pelo ponto é igual a multiplicidade* **então**
Se *a soma dos ângulos externos é positiva* **então**
decremente o índice pela soma dividida por 2π
Caso contrário *incremente o índice pela soma dividida por* 2π
Caso Contrário *continue a caminhada.*

O funcionamento deste algoritmo é ilustrado no traçado de uma curva fechada da formato 3-pétalas. Quando o ponto de bifurcação é alcançado pela primeira vez p_0, ele é colocado na primeira pilha S_1 e também detecta-se que ele é um ponto de multiplicidade igual a 3 (Figura 6.17.a). Quando ele é encontrado pela segunda vez p_0 (Figura 6.17.b), um laço parametrizado com orientação positiva é formado e o ângulo externo é ϕ, então $I = 1$ e p_0 é movido da primeira pilha para a terceira pilha S_3. Quando ele é encontrado pela terceira vez p_0 (número de vezes que se passou no ponto é igual a multiplicidade), então calcula-se os ângulos exteriores ϕ_2 e ϕ_3 e neste momento tem-se mais um laço parametrizado positivamente, então o índice é acrescentado $I = I + 1 = 2$ (Figura 6.17.c). Quando a curva inteira foi percorrida, temos três laços parametrizados com a mesma orientação $m = 3$ e como a soma dos ângulos exteriores é positiva (2π) deve-se decrementar o índice em 1 ($k = 1$), ou seja o índice é $I = m - k = 3 - 1 = 2$ (Figure 6.17.d).

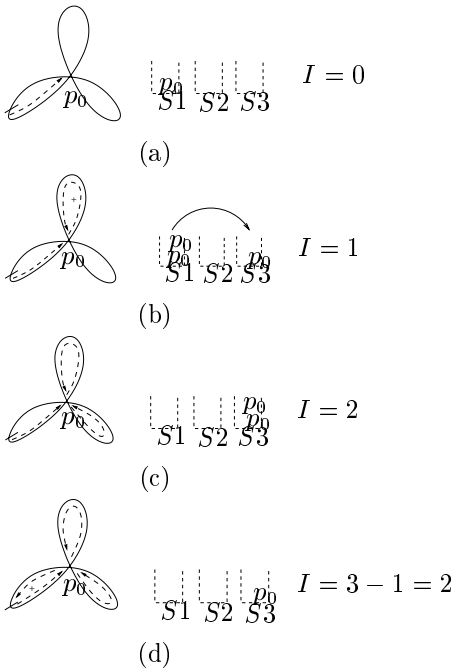


Figura 6.17: Aplicação do algoritmo proposto.

6.4 Resultados Numéricos

O algoritmo tem sido exaustivamente testado em vários pares de superfícies paramétricas. Nesta seção, alguns destes exemplos são apresentados. Para mostrar o comportamento numérico do algoritmo, uma tabela contento o início e o final do traçado e todos os pontos singulares ao longo da curva estão incluidos, e também as medidas usadas para os critérios: índice, distância e primeira ordem.

Exemplo 34 *O primeiro par de superfícies apresentado na Figura 6.18 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, 0.2u^4 + 0.1v^4)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, 0.3p^2q - 0.1q^2 + 0.2q^3)$,

onde tem-se dois pontos singulares, um tangencial e um de bifurcação. O índice de rotação da curva é $I = 2$.

Inicia-se o traçado no ponto $F(1.20, 0.97)$ com passo $L = 0.1$ e com $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 1.0)$ descobre-se que ele é ponto de bifurcação, então guarda-se como possível extremidade de laço parametrizado e continua a caminhada. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 0.0)$ descobre-se que ele é tangencial, então deve-se igonorá-lo e continuar a caminhada. Ao passar pelo ponto de bifurcação $F(0.0, 1.0)$, o índice passa a ser $I = 1$, pois forma-se o laço

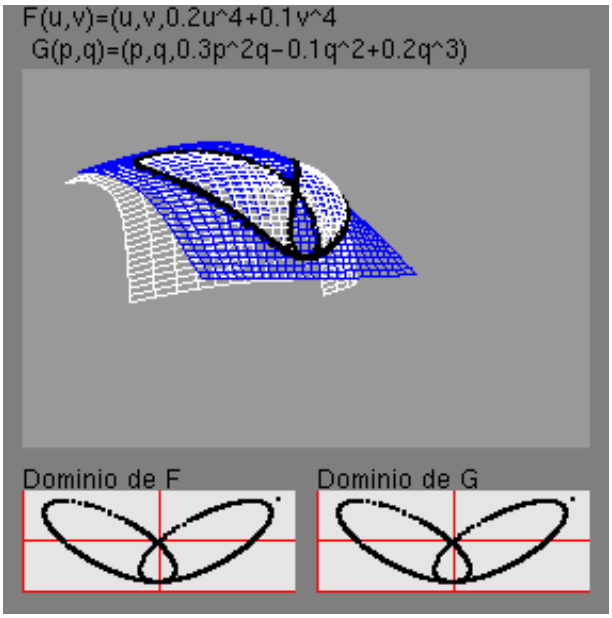


Figura 6.18: Interseção de $F(u, v)$ e $G(p, q)$.

parameterizado com orientação positiva. Ao passar pelo ponto $F(0.36, 0.11)$, a condição $|12.0747 - 2(I_{p1})\pi| = 0.4916 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 2)$ é satisfeita, porém $d(p_0, p_i) = 1.1962 < 0.1$ não, então continua-se a caminhada. Ao passar pelo ponto $F(1.16, 0.89)$, ambas as condições são satisfeitas $|12.5365 - 2(I_{p1})\pi| = 0.0297 < 0.5$ $(I_{p1} = 2)$ e $d(p_0, p_i) = 0.0865 < 0.1$; portanto, o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$ e continua-se a caminhada. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(1.20, 0.97)$, então para-se a caminhada.

Ponto inicial do domínio (1.20 0.97), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1}, I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(1.20,0.97)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1000
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(1.40,1.35)	0.4291	0.0839	0.1806	1,-1	6.1025	6.4638	0.1825
(1.44,1.44)	0.5253	0.1067	0.2368	1,-1	6.0463	6.5200	0.2000
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.85,1.92)	1.0160	0.9238	2.6933	1,-1	3.5897	8.9765	0.0336
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.01,1.02)	1.1947	2.0916	3.1742	1,-1	3.1089	9.4574	0.0976
(0.00,1.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(-0.03,0.94)	1.2381	2.1563	3.2086	1,-1	3.0745	9.4918	0.0945
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.01,0.00)	1.5478	2.8084	5.2530	1,-1	1.0301	11.5362	0.0310
(0.00,0.00)	(ponto singular:tangencial)						
(0.03,0.00)	1.5217	2.8210	5.3835	1,-1	0.8996	11.6667	0.0324
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.01,0.99)	1.1975	2.1152	7.3656	1,-1	1.0825	13.6488	0.0161
(0.00,1.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(-0.00,1.00)	1.2054	2.1043	7.3714	2,0	5.1949	7.3714	0.0161
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(-0.02,0.00)	1.5594	2.8021	11.5175	2,0	1.0487	11.5175	0.0469
(0.00,0.00)	(ponto singular:tangencial)						
(0.03,0.00)	1.5218	2.8215	11.6133	2,0	0.9530	11.6133	0.0480
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(0.36,0.11)	1.1962	2.9271	12.0747	2,0	0.4916	12.0747	0.0156
(0.38,0.12)	1.1809	2.9308	12.0864	2,0	0.4799	12.0864	0.0158
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(1.15,0.88)	0.1002	3.1242	12.5319	2,0	0.0343	12.5319	0.0184
(1.16,0.89)	0.0865	3.1266	12.5365	2,0	0.0297	12.5365	0.0001
(1.16,0.89)	0.0863	3.1266	12.5366	2,0	0.0297	12.5366	0.0001
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(1.20,0.97)	0.0002	3.1415	12.5662	2,0	0.0000	12.5662	0.0001
(1.20,0.97)	0.0001	3.1415	12.5663	2,0	0.0000	12.5663	0.0001
(1.20,0.97)	0.0000	0.0000	12.5663	I=2	0.0000	0.0000	0.0001

Tabela 6.1: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 35 *O segundo par de superfícies apresentado na Figura 6.23 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, -u^4 + v^2 - v^4)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, 0)$,

onde temos duas curvas simples com um ponto tangencial entre elas.

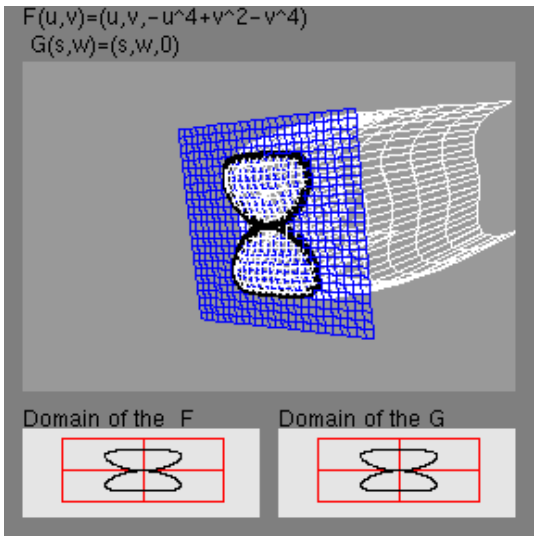


Figura 6.19: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Para a curva que está nos quadrantes 1 e 2, inicia-se o traçado no ponto $F(0.70, 0.64)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 0.0)$, descobre-se que ele é tangencial, então deve-se ignorá-lo e continuar a caminhada. Ao passar pelo ponto $F(0.69, 0.80)$, a condição $|5.8078 - 2(I_{p1})\pi| = 0.4753 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ é satisfeita, porém a condição $d(p_0, p_i) = 0.1542 < \epsilon$ não. Ao passar pelo ponto $F(0.71, 0.74)$, as condições $|6.0229 - 2(I_{p1})\pi| = 0.2602 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_n) = 0.0966 < \epsilon$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo é diminuído em $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.70, 0.64)$, então para-se a caminhada.

Para a curva que está nos quadrantes 3 e 4, inicia-se o traçado no ponto $F(-0.56, -0.94)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 0.0)$, descobre-se que ele é tangencial, então deve-se ignorá-lo e continuar a caminhada. Ao passar pelo ponto $F(0.31, -1.00)$, a condição $|5.7888 - 2(I_{p1})\pi| = 0.4943 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ é satisfeita, porém a condição $d(p_0, p_n) = 0.8648 < \epsilon$ não. Ao passar pelo ponto $F(-0.46, -0.98)$, as condições $|6.0713 - 2(I_{p1})\pi| = 0.2118 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_n) = 0.0973 < \epsilon$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo é diminuído em $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(-0.56, -0.94)$, então para-se a caminhada.

Ponto inicial do domínio (0.70,0.64), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.70,0.64)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.56,0.34)	0.3393	0.2688	0.4757	1,-1	5.8074	6.7589	0.0139
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.01,0.00)	0.9474	0.6666	1.3995	1,-1	4.8836	7.6827	0.0100
(0.00,0.00)	(ponto singular:tangencial)						
(-0.01,0.00)	0.9621	0.6808	1.4395	1,-1	4.8436	7.7227	0.0100
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.69,0.80)	0.1542	2.9287	5.8078	1,-1	0.4753	12.0909	0.0069
(0.70,0.79)	0.1474	2.9404	5.8359	1,-1	0.4472	12.1191	0.0070
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.70,0.75)	0.1042	3.0090	5.9973	1,-1	0.2858	12.2805	0.0075
(0.71,0.74)	0.0966	3.0202	6.0229	1,-1	0.2602	12.3061	0.00007
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.70,0.64)	0.0001	3.1414	6.2829	1,-1	0.0002	12.5661	0.00007
(0.70,0.64)	0.0000	3.1415	6.2831	1,-1	0.0000	12.5663	0.00007
(0.70,0.64)	0.0000	0.0000	6.2832	I=1	0.0001	0.0001	0.00007

Ponto inicial do domínio (-0.56,-0.94), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(-0.56,-0.94)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.68,-0.83)	0.1674	0.3089	0.6674	1,-1	5.6157	6.9506	0.0067
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.01,-0.00)	1.0926	1.6619	2.6911	1,-1	3.5920	8.9742	0.0100
(0.00,-0.00)	(ponto singular:tangencial)						
(0.01,-0.00)	1.1027	1.6776	2.7311	1,-1	3.5520	9.0142	0.0100
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.31,-1.00)	0.8648	2.7650	5.7888	1,-1	0.4943	12.0720	0.0173
(0.29,-1.00)	0.8465	2.7674	5.7990	1,-1	0.4841	12.0822	0.0183
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.45,-0.98)	0.1087	3.0147	6.0533	1,-1	0.2298	12.3364	0.0119
(-0.46,-0.98)	0.0973	3.0259	6.0713	1,-1	0.2118	12.3544	0.0001
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.56,-0.94)	0.0002	3.1412	6.2825	1,-1	0.0006	12.5657	0.00011
(-0.56,-0.94)	0.0001	3.1414	6.2828	1,-1	0.0003	12.5660	0.00011
(-0.56,-0.94)	0.0000	0.0000	6.2831	I=1	0.0000	0.00000	0.00011

Tabela 6.2: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 36 *O terceiro par de superfícies apresentado na Figura 6.20 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, (1/6)u^6 - (5/4)u^4 + 2u^2 + v^2)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, 0.917)$,

onde temos a curva da forma de um "duplo oito" com três laços parametrizados, dois na mesma orientação e o outro com orientação oposta.

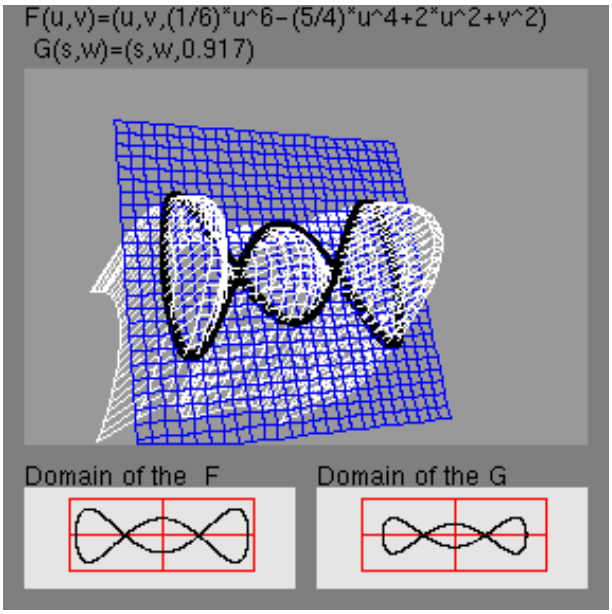


Figura 6.20: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Inicia-se o traçado no ponto $F(0.83, 0.27)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(-1.0, 0.0)$, descobre-se que é ponto de bifurcação, então guarda-se como possível extremidade de laço parametrizado e continua a caminhada. Ao passar novamente pelo ponto de bifurcação $F(-1.0, 0.0)$, o índice passa a ser $I = -1$, pois forma-se o laço parameterizado com orientação negativa. Ao passar pelo segundo ponto singular $F(1.0, 0.0)$, descobre-se que é um ponto de bifurcação, então guarda-se como possível extremidade de laço parametrizado e continua a caminhada. Ao passar novamente pelo ponto de bifurcação $F(1.0, 0.0)$, o índice passa a ser $I = -2$, pois forma-se o laço parameterizado com orientação negativa. Ao passar pelo ponto $F(0.99, 0.01)$, a condição $|6.3322 - 2(I_{p2})\pi| = 0.0490 < 0.5$ $(I_{p2} = |I| - 1 = 1)$ é satisfeita, porém a distância $d(p_0, p_i) = 0.3043 < 0.1$ não. Ao passar pelo ponto $F(0.88, 0.20)$, ambas as condições $|6.2975 - 2(I_{p2})\pi| = 0.0144 < 0.5$ $(I_{p2} = |I| - 1 = 1)$ e $d(p_0, p_n) = 0.0812 < 0.1$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.83, 0.27)$, então deve-se parar a caminhada.

Na tabela abaixo, pode ser observado que o índice de rotação é 1.

Ponto inicial do domínio (0.83,0.27), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.83,0.27)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.02,0.96)	1.0612	0.2931	0.9448	1,-1	5.3383	7.2280	0.0098
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.99,0.02)	1.8390	1.1310	2.0387	1,-1	4.2444	8.3219	0.0383
(-1.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(-1.01,-0.01)	1.8630	1.1474	2.0438	1,-1	4.2393	8.3270	0.0386
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-1.01,0.02)	1.8634	1.1305	-3.1947	1,-1	3.0884	9.4779	0.0438
(-1.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(-0.99,-0.02)	1.8474	1.1523	-3.1895	2,0	9.3767	3.1895	0.0434
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(0.99,-0.02)	0.3274	3.0649	-1.0998	2,0	11.4665	1.0998	0.0385
(1.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(1.01,0.02)	0.3092	3.1121	-1.0953	2,0	11.4710	1.0953	0.0383
...	...	...	...	2,0	...	...	...
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(1.01,-0.03)	0.3479	3.1108	-6.3369	2,0	6.2293	6.3369	0.0441
(1.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.99,0.01)	0.3043	3.1140	-6.3322	3,1	12.5173	0.0490	0.0435
...	...	...	...	3,1	...	...	...
(0.90,0.17)	0.1150	3.1300	-6.3037	3,1	12.5458	0.0205	0.0348
(0.88,0.20)	0.0812	3.1332	-6.2975	3,1	12.5519	0.0144	0.00033
...	...	...	...	3,1	...	...	...
(0.83,0.27)	0.0005	3.1415	-6.2814	3,1	12.5681	0.0017	0.00033
(0.83,0.27)	0.0001	3.1415	-6.2813	3,1	12.5682	0.0018	0.00033
(0.83,0.27)	0.0001	0.0000	-6.2812	I=-1	0.0019	0.0019	0.00033

Tabela 6.3: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 37 *O quarto par de superfícies apresentado na Figura 6.21 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, (u^2+v^2)^2+3u^2v-v^3)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, 0)$,

onde tem-se uma curva em forma de 3-pétalas.

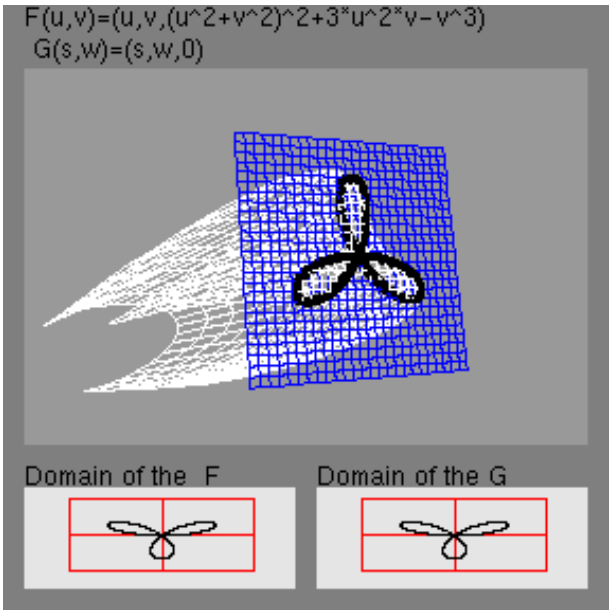


Figura 6.21: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Inicia-se o traçado no ponto $F(0.14, 0.88)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 0.0)$, descobre-se que ele é um ponto de bifurcação com multiplicidade 3, então guarda-se como possível extremidade de laço parametrizado e continua a caminhada. Ao passar pelo ponto de bifurcação $F(0.0, 0.0)$, calcula-se o ângulo externo orientado $\phi_1 = 1.8925$ e tem-se que que o índice de rotação é $I = 1$, pois forma-se o laço parameterizado com orientação positiva. Ao passar novamente pelo ponto de bifurcação $F(0.0, 0.0)$, forma-se um nova laço parametrizado positivo, então o índice passa a ser $I = I + 1 = 2$. Porém, como este ponto é um ponto de multiplicidade líquida igual a 3, deve-se calcular $\phi_2 = 1.8925$ e $\phi_3 = 2.4980$. Como a soma destes ângulos exteriores orientados ϕ_i é $6.2831 \sim 2\pi$ deve-se decrementar 1 para o índice $I = I-1 = 1$. Ao passar pelo ponto $F(0.17, 0.80)$ as condições $|12.3902 - 2(I_{p1})\pi| = 0.1760 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 2)$ e $d(p_0, p_n) = 0.0796 < \epsilon$ são satisfeitas, portanto o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.14, 0.88)$, então deve-se parar a caminhada.

Ponto inicial do domínio (0.14,0.88), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.14,0.88)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(-0.00,0.01)	0.8837	2.5584	3.2401	1,-1	3.0430	9.5233	0.0173
(0.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.00,-0.01)	0.8971	2.5707	3.2516	1,-1	3.0314	9.5348	0.0173
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(0.02,-0.00)	0.8876	2.5843	7.4225	1,-1	1.1393	13.7057	0.01730
(0.00, 0.00)	(ponto singular:bifurcação) $\phi_1 = 1.8925$						
(-0.07,-0.00)	0.9050	2.4896	7.4803	2,0	5.0860	7.4803	0.01730
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(-0.01,-0.01)	0.8997	2.5602	11.6164	2,0	0.9499	11.6164	0.01731
(0.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação) $\phi_2 = 1.8925$ e $\phi_3 = 2.4980$						
(0.03,0.05)	0.8348	2.5883	11.6626	2,0	0.9037	11.6626	0.01731
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(0.17,0.78)	0.1058	3.0216	12.3443	2,0	0.2220	12.3443	0.0111
(0.17,0.79)	0.0949	3.0324	12.3629	2,0	0.2034	12.3629	0.00011
...	...	...	...	2,0	...	...	...
(0.14,0.88)	0.0002	3.1413	12.5658	2,0	0.0005	12.5658	0.00011
(0.14,0.88)	0.00009	3.1414	12.5661	2,0	0.0002	12.5661	0.00011
(0.14,0.88)	0.00001	0.00002	12.5664	I=2	0.00004	0.00004	0.00011

Tabela 6.4: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 38 *O quinto par de superfícies apresentado na Figura 6.22 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, (3u^2 + 3v^2))$ *e*

$G(p,q)$=$(p, 5(p^2 + q^2) - 1, q + 1)$,

onde tem-se duas curvas disjuntas cada uma delas sendo uma curva simples.

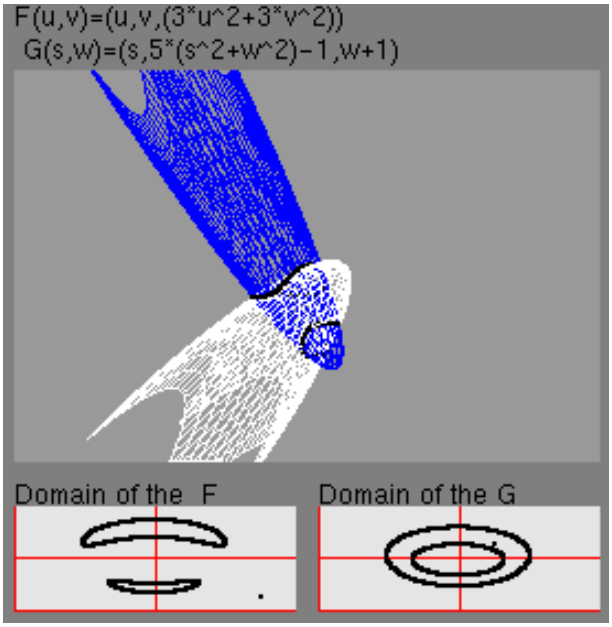


Figura 6.22: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

O ponto inicial para traçar a curva menor é $F(0.30, -0.52)$, enquanto para a curva maior é $F(-0.50, 0.36)$. Então inicia-se a caminhada para a curva menor pelo ponto $F(0.30, -0.52)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto $F(0.22, -0.58)$, as condições $|5.9897 - 2(I_{p1})\pi| = 0.2934 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_i) = 0.0882 < 0.1$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.30, -0.52)$, então para-se a caminhada.

Para traçar a maior curva inicia-se pelo $F(-0.50, 0.36)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto $F(-0.47, 0.45)$, as condições $|6.0482 - 2(I_{p1})\pi| = 0.2349 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_i) = 0.09647 < 0.1$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F((-0.50, 0.36))$, então para-se a caminhada.

Na Tabela 6.5 tem-se uma amostra dos pontos traçados.

Ponto inicial do domínio (0.30,-0.52) , $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.30,-0.52)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.15,-0.46)	0.1564	1.8527	2.4246	1,-1	3.8585	8.7077	0.0083
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.20,-0.60)	0.1206	2.9350	5.9024	1,-1	0.3807	12.185	0.0386
(0.23,-0.58)	0.0882	2.9836	5.9897	1,-1	0.2934	12.2729	0.00040
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.30,-0.52)	0.0004	3.1407	6.2814	1,-1	0.0017	12.5645	0.00040
(0.30,-0.52)	0.00015	3.1412	6.2825	1,-1	0.0006	12.5656	0.00040
(0.30,-0.52)	0.00009	0.0002	6.2835	I=1	0.0004	0.0004	0.00040
Ponto incial do domínio (-0.50,0.36), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(-0.50,-0.36)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.43,0.25)	0.1317	0.7995	2.2421	1,-1	4.0410	8.5253	0.0091
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.44,0.49)	0.1404	2.9585	5.9516	1,-1	0.3315	12.2348	0.0625
(-0.47,0.45)	0.09647	3.0108	6.0482	1,-1	0.2349	12.3314	0.0006
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.50,0.36)	0.00054	3.1407	6.2950	1,-1	0.0118	12.5782	0.00065
(-0.50,0.36)	0.00017	3.1413	6.29617	1,-1	0.0129	12.5793	0.00065
(-0.50,0.36)	0.00019	0.00030	6.29733	I=1	0.0141	0.01414	0.00065

Tabela 6.5: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 39 *O sexto par de superfícies apresentado na Figura 6.23 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, \frac{u^2}{3} - \frac{v^2}{3} - 9)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, sin(q) - 3)$,

onde tem-se uma curva simples.

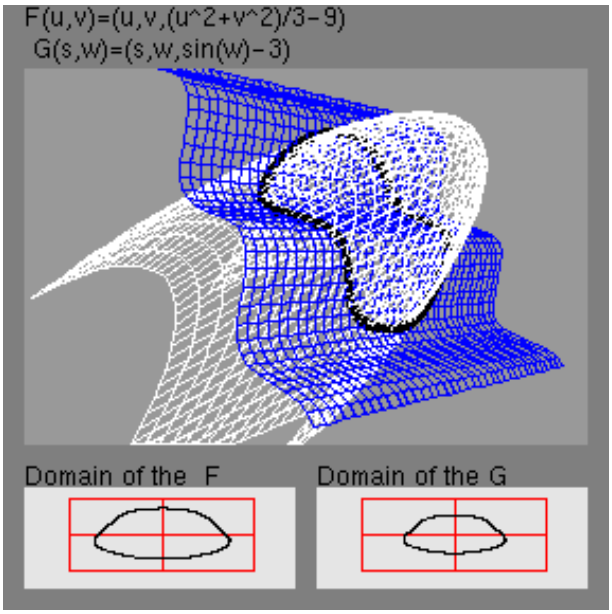


Figura 6.23: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Inicia-se a caminhada no ponto $F(4.42, 0.90)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo $F(2.88, -3.09)$, tem-se que a condição $|5.7865 - 2(I_{p1})\pi| = 0.4966 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ é satisfeita, porém a condição $d(p_0, p_i) = 4.2781 < 0.1$ não. Ao passar pelo ponto $F(4.42, 0.84)$, tem-se que as condições $|6.2552 - 2I_{p1}\pi| = 0.0279 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_i) = 0.0609 < 0.1$ são satisfeitas; portanto, o tamanho do passo L é diminuído para $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(4.42, 0.90)$, então para-se a caminhada.

Alguns dos pontos traçados no domínio de F são dados na Tabela 6.6

Ponto inicial do domínio (4.42,0.90), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1},I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(4.42,0.90)	0.0000	0.0000	0.0000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(1.83,3.64)	3.7648	0.7645	1.2233	1,-1	5.0598	7.5065	0.2000
(1.65,3.70)	3.9367	0.7869	1.2568	1,-1	5.0263	7.5400	0.2000
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(2.88,-3.09)	4.2781	2.7800	5.7865	1,-1	0.4966	12.0696	0.0338
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(4.41,0.76)	0.1405	3.1077	6.2178	1,-1	0.0653	12.5010	0.1021
(4.42,0.84)	0.0609	3.1267	6.2552	1,-1	0.0279	12.5383	0.0009
...	...	...	...	1,-1	...	...	...
(4.42,0.90)	0.0013	3.1412	6.2840	1,-1	0.0009	12.5672	0.0009
(4.42,0.90)	0.0005	3.1414	6.2845	1,-1	0.0013	12.5676	0.0009
(4.42,0.90)	0.0002	0.0000	6.2849	1,1	0.0017	0.0017	0.0009

Tabela 6.6: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 40 *O sétimo par de superfícies apresentado na Figura 6.24 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, u^4 - u^2 + v^4 - v^2)$ *e*

$G(p,q)$=$(p, q, -0.25)$,

onde tem-se duas curvas simples com quatro pontos de bifurcação.

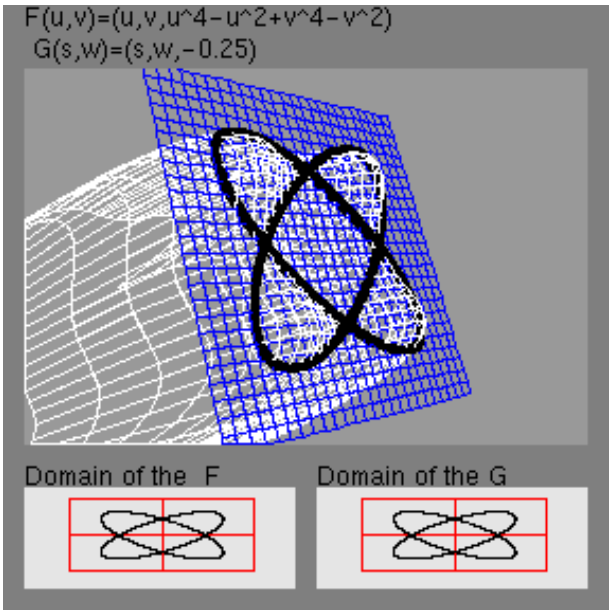


Figura 6.24: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Inicia-se a caminhada no ponto $F(0.75, 1.00)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelos pontos singulares $F(0.00, 0.71)$, $F(-0.71, 0.00)$, $F(0.00, -0.71)$ e $F(0.71, 0.00)$, descobre-se que eles são pontos de bifurcação, então são guardados como prováveis extremidades de laços parametrizados. Ao passar pelo ponto $F(0.85, 0.97)$, tem-se que as condições $|5.9832 - 2I_{p1}\pi| = 0.2999 < 0.5$ $(I_{p1} = |I| + 1 = 1)$ e $d(p_0, p_i) = 0.0984 < 0.1$ são satisfeitas, portanto $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.75, 1.00)$, então para-se a caminhada. Neste exemplo, os pontos de bifurcação não são extremidades de laços parametrizados, porque eles são derivados da interseção de duas curvas simples.

Ponto inicial do domínio (0.75,1.00) , $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1}, I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.75,1.00)	0.0000	0.000	0.000	1,-1	6.2800	6.2800	0.1
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.01,0.72)	0.7913	0.462	0.707	1,-1	5.5757	6.9906	0.022
(0.00,0.71)	(ponto singular:bifurcação)						
(-0.01,0.70)	0.8132	0.469	0.716	1,-1	5.5670	6.9993	0.0225
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.69,0.02)	1.7463	0.693	1.044	1,-1	5.2386	7.3277	0.0231
(-0.71,-0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(-0.72,-0.02)	1.7894	0.702	1.062	1,-1	5.2209	7.3454	0.0228
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.02,-0.72)	1.8870	1.245	3.843	1,-1	2.4392	10.1271	0.02230
(-0.00,-0.71)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.01,-0.70)	1.8483	1.258	3.861	1,-1	2.4217	10.1445	0.02263
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.70,-0.01)	1.0093	1.617	4.189	1,-1	2.0933	10.4730	0.02321
(0.71, 0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.71,0.01)	0.9899	1.629	4.198	1,-1	2.0844	10.4819	0.02301
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.85,0.97)	0.1056	2.990	5.956	1,-1	0.3270	12.2392	0.00717
(0.85,0.97)	0.0984	3.002	5.983	1,-1	0.2999	12.2664	0.00007
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.75,1.00)	0.0001	3.141	6.282	1,-1	0.0002	12.5660	0.00007
(0.75,1.00)	0.00004	3.141	6.283	1,-1	0.0001	12.5662	0.00007
(0.75,1.00)	0.00002	0.000	6.283	I=1	0.00006	0.00006	0.00007

Tabela 6.7: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

Exemplo 41 *O oitavo par de superfícies apresentado na Figura 6.25 mostra a interseção de:*

$F(u,v)$=$(u, v, v^4 - v^2 - u^4 + 2u^2)$ *e*

$G(s,w)$=$(s, w, 0)$,

A interseção resulta na "Devil's Curve" consistindo de duas curvas abertas e uma curva fechada em forma de oito.

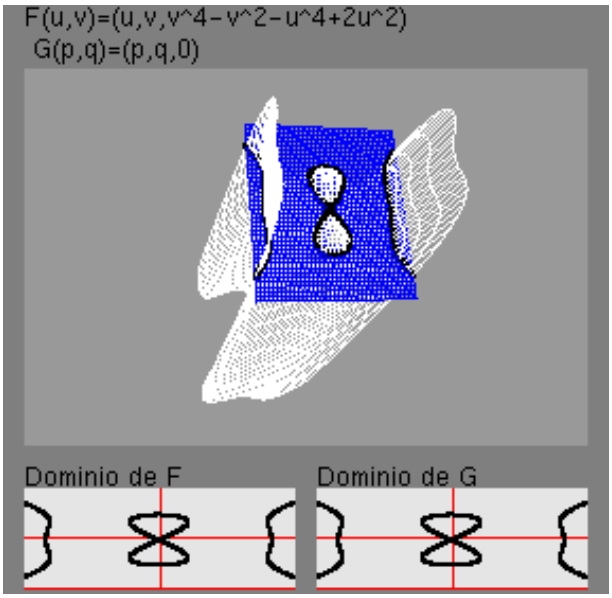


Figura 6.25: Interseção de $F(u,v)$ e $G(p,q)$.

Os pontos inciais para as três curvas: A curva aberta $F(1.39, 0.43)$, a curva tipo oito $F(0.06, 1.00)$ e a outra curva aberta $F(-1.38, 0.87)$.

Vamos analisar a curva fechada em forma de oito. Inicia-se a caminhada no ponto $F(0.06, 1.00)$ com passo $L = 0.1$ e $I = 0$. Ao passar pelo ponto singular $F(0.0, 0.0)$, descobre-se que ele é um ponto de bifurcação, então guarda-se como provável extremidade de laço parametrizado. Ao passar novamente pelo ponto de bifurcação $F(0.0, 0.0)$, obtém-se um laço parametrizado com orientação positiva, portanto $I = I + 1 = 1$. As condições $|0.1967 - 2I_{p2}\pi| = 0.1967 < 0.5$ ($I_{p2} = |I| - 1 = 0$) e $dist(p_0, p_i) = 0.0908 < 0.1$ são satisfeitas; portanto, o passo é diminuído $L = \frac{L}{100}$. As condições de proximidade, tangnencial e índice de rotação são satisfeitas no ponto $F(0.06, 1.00)$, então para-se a caminhada.

Ponto inicial do domínio (0.06,1.00), $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$ e $\eta = 0.5$							
Ponto	Dist.	$ang(t_0, P_n\vec{P}_0)$	θ_t	I_{p1}, I_{p2}	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p1})\pi\|$	$\|\|\theta_t\| - 2(I_{p2})\pi\|$	L
(0.06,1.00)	0.0000	0.000	0.000	1,-1	6.280	6.280	0.1
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.34,0.57)	0.5874	0.938	2.018	1,-1	4.264	8.301	0.0110
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.01,0.01)	0.9843	1.624	2.315	1,-1	3.967	8.598	0.05997
(0.00 ,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.03,-0.05)	1.0446	1.671	2.314	1,-1	3.969	8.597	0.0768
...	...	...	...	...	...	...	...
(-0.02,-0.03)	1.0315	1.615	-2.056	1,-1	4.226	8.339	0.0544
(0.00,0.00)	(ponto singular:bifurcação)						
(0.03,0.04)	0.9593	1.660	-2.056	2,0	10.509	2.056	0.0848
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.16,0.97)	0.1000	3.035	-0.218	2,0	12.348	0.218	0.0091
(0.15,0.98)	0.0908	3.045	-0.196	2,0	12.369	0.196	0.00009
...	...	...	...	...	...	...	...
(0.06,1.00)	0.0001	3.141	-0.000	2,0	12.565	0.0003	0.00009
(0.06,1.00)	0.0000	3.141	-0.000	2,0	12.566	0.0001	0.00009
(0.06,1.00)	0.0000	0.000	0.000	I=0	0.000	0.0000	0.00009

Tabela 6.8: Pontos representativos de $F(u, v) - G(p, q) = 0$.

6.5 Comentários

Apresentou-se um algoritmo para estimar o índice de rotação de uma curva fechada regular com base nos seus pontos singulares. O índice de rotação é uma propriedade geométrica global que reflete o comportamento da curva inteira e que é representado por um número inteiro - - menos susceptivel para a precisão da máquina. Mostrou-se que o índice de rotação, juntamente com as condições de proximidade e contato de primeira ordem, podem prevenir duplicações de pontos no traçado de uma curva regular fechada sem recorrer para divisão do domínio paramétrico ou fixar um número máximo de pontos a ser percorrido por cada ramo de interseção. Combinando estas três condições com a direção de caminhada de ordem 3 proposta no Capítulo 3 e publicada no artigo [35], uma técnica robusta de caminhada tem sido obtida.

O procedimento para estimar o índice de rotação para curvas regulares que possuem laços parametrizados regulares exceto no ponto singular de ordem maior que três, foi provado formalmente neste capítulo e também foi testado extensivamente em várias situações. No artigo [36] a ser submetido para CAGD a prova do procedimento de estimar o índice de rotação é para qualquer curva regular, isto é, não há restrição para que os laços parametrizados sejam regulares exceto no ponto singular de ordem maior ou igual a três que os forma.

Como o procedimento para estimar o índice de rotação foi baseado nos pontos singulares que se cruzam (pontos de bifurcação), tem-se que resolver o problema de classificação de pontos singulares de contato de ordem maior ou igual a dois para poder separá-los em pontos que se cruzam e pontos que não se cruzam (pontos tangenciais).

Através das técnicas apresentadas no Capítulo 5 que classificam singularidades de grau maior ou igual a 2 pode-se classificar algumas singularidades. O método das tangentes classifica pontos singulares pela quantidade de raízes, isto é, pela quantidade de retas tangentes. Para grau dois usa-se o algoritmo Ye-Maekawa [38] que classifica as singularidades pelo discriminante do polinômio de grau dois e para grau 3 e 4 usa-se a técnica desenvolvida por nós no Capítulo 5. Porém a técnica das tangentes não consegue classificar se os pontos singulares são pontos tangenciais ou pontos de bifurcação, pois podem possuir somente uma tangente. Para resolver este problema usa-se o método dos coeficientes para singularidades de contato de ordem 2 e para singularidades de contato de ordem mairo usa-se o fato de que pontos de bifurcação ocorrem quando os vetores normais de ambas superfícies em um ponto antes $\mathcal{N}_F(P_{i-1}) \times \mathcal{N}_G(P_{i-1})$ e um ponto depois $\mathcal{N}_F(P_{i-1}) \times \mathcal{N}_G(P_{i-1})$ fornecem direções tangentes cujo ângulo $\cos\theta$ entre estas direções é negativo. Com a combinação destes métodos pode-se tomar decisão nos pontos singulares de ignorá-los (tangenciais) ou guardá-los em pilhas para serem candidatos a pontos finais de laços parametrizados (pontos de bifurcação).

Capítulo 7

Conclusões

Inspirados na geometria diferencial clássica, apresentou-se um caminho alternativo para estimar as propriedades geométricas de ordem 3 (torção e derivada da curvatura) da curva de interseção de quaisquer duas superfícies regulares. A única exigência é que os vetores normais sejam conhecidos. Nosso algoritmo é baseado no vetor normal estimado por Wu e Andrade [37]. Em testes realizados, o nosso algoritmo para estimar as propriedades geométricas mostrou-se mais robusto do que o algoritmo Ye e Maekawa nos pontos próximos dos pontos não-transversais que satisfazem a Eq. 3.26, que pode ser atestado pelos dados do primeiro par de interseção apresentados na Tabela 3.4. Porém, fora desta região e nos pontos singulares de ordem 2, o algoritmo Ye-Maekawa fornece valores exatos. Devido à superioridade do algoritmo Ye-Maekawa nos pontos regulares, e à inferioridade na vizinhança dos pontos singulares, propôs-se o uso combinado dos dois algoritmos (Técnica Mista). Nos pontos regulares é utilizado o algoritmo Ye-Maekawa e na vizinhança dos pontos singulares é utilizado o nosso algoritmo. Com estas propriedades geométricas bem estimadas, pode-se introduzir duas novas direções de caminhada com contato de ordem 3: direção polinomial que faz uso da tangente, curvatura, torção e derivada da curvatura e direção helicial que faz uso tangente, curvatura e torção. Estas abordagens foram apresentadas por nós em [35]. Nos testes numéricos realizados observou-se que as direções de caminhada de ordem 3, polinomial e helicial, apresentaram resultados melhores do que as propostas já existentes, menos iterações são necessárias para obter pontos na curva de interseção em cada passo. Isso pode ser atestado através da Tabela 4.1.

Foi apresentado um algoritmo para estimar o índice de rotação, para curvas fechadas no domínio paramétrico das superfícies, em função do números de pontos singulares e o comportamento destes pontos. O índice de rotação é uma propriedade geométrica global que reflete o comportamento da curva inteira e que é representado por um número inteiro menos susceptível a precisões numéricas de uma máquina. Mostrou-se que a condição do índice de rotação, junto com a proximidade e o contato de primeira ordem, podem prevenir sobreposições no traçado de uma curva fechada. Combinando estas três condições com o passo de caminhada de ordem 3, uma técnica robusta de determinação de interseção foi obtida, que pode ser obeservada nos Exemplos [34, $\cdots$, 41] que estão na Seção 6.4. Este procedimento para estimar o índice de rotação foi provado

formalmente neste capítulo 6 para curvas regulares que possuem laços parametrizados regulares exceto no ponto singular de ordem maior que três. No artigo [36] a ser submetido para CAGD a prova do procedimento de estimar o índice de rotação foi provado formalmente sem restrições para as curvas fechadas regulares em relação aos laços parametrizados.

O comportamento dos pontos singulares inicialmente foi dividido em duas classes: tangencial e bifurcação. Achou-se no início deste estudo, que usando a técnica Ye-Maekawa conseguiría pelo menos distinguir o comportamento de pontos singulares de ordem 2, através do número de tangentes no ponto: um ponto é tangencial se ele tiver uma única tangente; senão ele é chamado ponto de bifurcação. Por analogia, estendeu-se o seu algoritmo para determinar o número de tangentes para pontos singulares de ordem 3 e 4. Porém, foi constatado que existem pontos de bifurcação que possuem somente uma tangente (oscnóide). Para resolver este problema de singularidades de curva de interseção, buscamos aplicações de diversas técnicas de Geometria/Topologia Diferencial. Nossa contribuição foi transformar o problema de singularidade de curva de interseção em singularidades de curvas algébricas planas e a propor um método de classificação, denominado método de coeficientes com base no procedimento dado na Figura 2.5 encontrado no livro de Golubitsky e Schaefter [13]. Conseguimos simplificar o procedimento Golubitsky-Schaefter ao usarmos o coeficientes da forma diagonalizada das curvas algébricas para classificar as singularidades sem requerer o cômputo de derivadas direcionais. Porém, esta classificação limita-se a singularidades do tipo A_k, com $k \leq 3$. Sabe-se que a técnica de codimensão de curvas algébricas planas pode classificar outras singularidades além das do tipo A_k, entretanto é de difícil implementação. Pretende-se ampliar o método dos coeficientes para singularidades A_k, com $k \in \{4, 5, 6\}$ e singularidades que possuem suas formas normais, isto é, que são previamente classificadas, por exemplo as singularidades do tipo D_k, com $k \geq 1$ e E_k, com $k \in \{6, 7, 8\}$.

Referências Bibliográficas

[1] K. Abdel-Malek and H. J. Yeh. Determining intersection curves between surfaces of two solids. *Computer Aided Design*, 28(6/7):539–549, 1996.

[2] C. Asteasu. Intersection of arbitrary surfaces. *Computer-Aided Design*, 20:533–538, 1988.

[3] C. L. Bajaj, C. M. Hoffmann, J. E. Hopcroft, and R.E. Lynch. Tracing surface intersections. *Computer Aided Geometric Design*, 5:285–307, 1988.

[4] R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan, and B.R.Piper. Surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 4(1/2):3–16, 1987.

[5] R. E. Barnhill and S. N. Kersey. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1–4):257–280, 1990.

[6] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, volume 1. Springer-Verlag, 1988.

[7] J. W. Bruce and P. JU. Giblin. *Curves and Singularities.* Cambridge-University Press, 2nd edition, 1992.

[8] M. P. Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice Hall Inc., New Jersey, 1st. edition, 1976.

[9] L. N. de Andrade. *Traço de Interseção de Superfícies Regulares com Passos Circulares.* PhD thesis, FEEC - Unicamp, Campinas, Julho 1998.

[10] H. H. Domingues e G. Iezzi. *Álgebra Moderna.* Atual, São Paulo-SP, 1 edition, 1982.

[11] A. Garcia e Y. Lequain. *Álgebra: Um Curso de Introdução.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada.(Projeto Euclides), Rio de Janeiro-RJ, 1 edition, 1988.

[12] C. G. Gibson. *Singular points of smooth mappings.* Pitman London-Sao Francisco-Melbourne, 1 edition, 1979.

[13] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory*, volume 1. Springer-Verlag New York Inc., New York 10010, U.S.A., 1984.

[14] T. A. Grandine and F. W. Klein IV. A new approach to the surface intersection problem. *Computer Aided Geometric Design*, 14(2):111–134, 1997.

[15] J. Hoschek and D. Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, Ltd., Wellesly, Massachusetts, USA, 1993. Translation of: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, by Larry L. Schumaker.

[16] W. Klingenberg. *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1978.

[17] G. A. Kriezis, N. M. Patrikalakis, and F. E. Wolter. Topological and differential equation methods for surface intersections. *Computer-Aided Design*, 24(1):41–55, 1992.

[18] S. Krishnan and D. Manocha. An efficient surface intersection algorithm based on lower-dimensional formulation. *ACM Transactions on Graphics*, 16(1):74–106, 1997.

[19] G. Looss. *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer-Verlag New York Inc., New York-United States of America, 1980.

[20] Yawei Ma and Yuan-Shian Lee. Detection of loops and singularities of surface intersections. *Computer-Aided Design*, 30(14):1059–1067, 1998.

[21] Yawei Ma and Ren C. Luo. Topological method for loop detection of surface intersection problems. *Computer-Aided Design*, 27(11):811–820, 1995.

[22] R.P. Markot and R.L. Magedson. Procedural method for evaluating the intersection curves of two parametric surfaces. *Computer-Aided Design*, 23(6):395–404, 1991.

[23] J. Milnor. *Annals of Mathematics Studies: Morse Theory*, volume 51. Princeton University Press, 1963.

[24] M. E. Mortenson. *Geometric Modeling*. John Wiley & Sons, USA, 1st. edition, 1985. ISBN 0-471-88279-8.

[25] G. Müllenheim. On determining start points for a surface/surface intersection algorithm. *Computer Aided Geometric Desgin*, 8:401–408, 1991.

[26] A. V. Pogorelov. *Geometria Diferencial*. Editorial MIR MOSCU, URSS, 1st. edition, 1977. Traduzido do Russo por Carlos Vega.

[27] T. W. Sederberg, H. N. Christiansen, and S. Katz. An improved test for closed loops in surfaces intersections. *Computer Aided Design*, 21(8):505–508, october 1989.

[28] T. W. Sederberg and R. J. Meyers. Loop detection in surface patch intersections. *Computer Aided Geometric Design*, 5:161–171, 1988.

[29] P. Sinha, E. Klassen, and K. K. Wang. Exploiting topological and geometric properties for selective subdivision. In *Proc. ACM Symp. Computational Geometry*, pages 39–45, 1985.

[30] Tz. E. Stoyanov. Marching along surface/surface intersection curves with an adaptative step length. *Computer Aided Geometric Desgin*, 9:485–489, 1992.

[31] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry.* Dover Publications, Inc., 2nd. edition, 1961.

[32] K. Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial.* Fundação Universidade de Brasília, 2nd. edition, 1988.

[33] S.-T. Wu and O. Aléssio. Tracing along an intersection closed loop, when should one stop? In *Proceedings of SIBGRAPI 2001*, pages 2–9, 2001.

[34] S.-T. Wu and O. Aléssio. Complete and non-overlapping marching along a closed regular intersection curve. *Computers And Graphics*, 26(6), 2002.

[35] S. T. Wu, O. Aléssio, and S. I. R. Costa. On estimating local geometric properties of intersection curves. In *Proceedings of SIBGRAPI 2000*, pages 152–159, 2000.

[36] S. T. Wu, O. Aléssio, and S. I. R. Costa. An algorithm for the rotation index of a closed regular curve and its application. *Submit Computer Aided Geometric Design*, 2003.

[37] S. T. Wu and L. N. de Andrade. Marching along a regular surface/surface intersection with circular steps. *Computer Aided Geometric Design*, 16:249–268, 1999.

[38] X. Ye and T. Maekawa. Differential geometry of intersection curves of two surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16:767–788, 1999.