Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial

Operadores Booleanos para Objetos Modelados por Complexos Celulares

Autor: **Luiz Gonzaga da Silveira Júnior**

Orientadora: **Profa. Dr-Ing. Wu, Shin-Ting**

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

20 de Novembro de 1998

Resumo

Neste trabalho propomos um algoritmo de combinações booleanas sobre a classe dos objetos modelados através de complexos celulares. Esta classe abrange objetos de dimensões heterogêneas no $\Re^3$. Os operadores propostos são fechados sobre ela, isto é, o resultado de qualquer combinação booleana é um complexo celular.

Para classificar corretamente a pertinência dos objetos envolvidos numa combinação booleana, introduzimos o conceito de espaço de imersão mínimo. Esta estratégia reduz o problema de classificação de pertinência em problemas locais, nos quais a nossa atenção fica voltada a vizinhança de cada ponto. O algoritmo proposto foi implementado para processar formas geométricas restritas a pontos no $\Re^3$, segmentos de reta e polígonos planares simples.

Abstract

In this work, we proposed an algorithm to perform boolean set operations of objects modeled by cell complex. This class covers objects of heterogeneous in $\Re^3$. The proposed operators are closed over it, i.e., any result of a boolean operation is also a cell complex.

To distinguish correctly a set membership of objects involved in boolean operations, we introduced a minimum embbedding space concept. This approach reduce the classification problem into several local problems, in which we just concentrate on neighborhood of each point. The proposed algorithm has been implemented to processing geometric entities constraits to points into $\Re^3$, straight segments and simple planar polygons.

Agradecimentos

À minha santa mãe (como diria a Val) sempre presente na minha vida e ao meu pai, o coronel Luiz do Tenente, sempre preocupado com o Saber, estão no alto da minha gradidão. Obrigado e muito.

À Ting, esta figura incomparável, pelo tratamento amigo durante nosso convívio; as nossas discussões sempre acirradas, contribuindo em muito com o engrandecimento do nosso trabalho.

Gosto de descobrir coisas novas! Toda a minha estada em Campinas está sendo assim, melhor, as novas também são boas. A experiência de trabalho de pesquisa, o livro do "poeta do absurdo", Fernando Pessoa (o velho que é novo), etc. Sem dúvidas as pessoas que conheci são a mais agradável realidade para mim: A Juju, esta pessoinha que me completa sempre; Os amigos do peito, Ah estes são muitos (vou até arriscar enumerar alguns) Lu, "Clayderman" (Ricardo), Val, o Asilado (Alexandre), Miguis, e Capitão DanDan (Daniel) e nossas andanças pela "pilogamia" da poesia.

As repúblicas. Jugurta, o acolhedor; Ely, conversas filosófica (ele sempre comendo um biscoitinho!); Marie, saudades do quase convívio. Tomáz e sua coleção de unhas: encontros esporádicos e diálogos "topológicos". Os que vieram para ficar no coração: Ritinha (Rita ! Rita!) uma pessoa do bem; as densianas (você também Ernesto); o "velho" Nicola; a Elô; ...

Campinas, eu gosto de você! Sobre ti só tenho boas lembranças; e o mar ? quando eu quiser vê-lo irei até ele. Ele sempre estará lá, não é verdade ?!

aos meus pais:
Sônia e Luiz Gonzaga, pela confiança
e orgulho que sempre depositaram em minha pessoa, obrigado.

minha mulher:
Jussara, pelo amor incondicional
e pelo achado formidável

Sumário

RESUMO i

ABSTRACT ii

AGRADECIMENTOS iii

LISTA DE FIGURAS iv

LISTA DE TABELAS viii

1 Introdução 1

1.1 Esquema de representação 4

1.2 Operações booleanas 6

1.3 Diretrizes do projeto 7

2 Revisão bibliográfica 9

2.1 Operações booleanas em representações *CSG* 11

2.2 Operações booleanas em representações *B-REP* 14

2.3 Representações *CSG* estendidas 16

2.4 Representações *B-REP* estendidas 17

2.5 Comparação entre representações 21

2.5.1 Considerações sobre operadores booleanos em modelagem geométrica . 22

3 Formulação dos Operadores Booleanos Fechados **23**

3.1 Operadores booleanos fechados 26

3.1.1 Interseção fechada 26

3.1.2 União fechada 27

3.1.3 A diferença fechada entre dois conjuntos 29

3.1.4 Resumo da formulação dos operadores booleanos 32

3.2 Espaço de imersão mínimo 34

3.2.1 Espaço de imersão mínimo comum 37

3.3 Função de classificação de pertinência 40

4 Algoritmo de Operação Booleana Fechada para uma Representação da *NM-Classe* **46**

4.1 Modelagem da *NM-Classe* através de complexos celulares 47

4.1.1 Célula n-dimensional 48

4.1.2 Complexos celulares 49

4.2 Um esquema de representação para complexos celulares 52

4.2.1 Modelo de Dados Topológicos (TDM) 53

4.2.2 Uma interface funcional para o TDM 54

4.3 Funções básicas do algoritmo de operação booleana 58

4.3.1 A pré-classificação de pertinência 59

4.3.2 Classificação local 61

4.3.3 Classificação global 73

4.4 Módulos complementares 74

5 Implementação e Resultados **76**

5.1 Representação das entidades geométricas 78

5.2 Considerações sobre a interseção geométrica 81

5.2.1 Coincidências de pontos no $\Re^3$ 85

5.2.2 Incidência de ponto em um segmento de reta 87

5.2.3 Incidência de um ponto sobre um polígono 89

5.2.4 Interseção entre dois segmentos de reta no $\Re^3$ 91
5.2.5 Relações entre segmentos e polígonos 94
5.3 Implementação dos módulos de classificação 95
5.3.1 Implementação da pré-classificação 95
5.3.2 Implementação da classificação de pertinência local 96
5.3.3 Implementação da classificação de pertinência global 99
5.4 Integração dos operadores booleanos no *ProSIm* 101
5.4.1 Edição dos operadores 103
5.4.2 Seleção de entidades 105
5.4.3 Composição do resultados das operações booleanas 106
5.5 Resultados da operação booleana fechada 106

6 Conclusão e sugestões para trabalhos futuros **112**

A Topologia de Conjuntos Fechados **114**
A.1 Conceitos elementares de topologia 114
A.1.1 Espaço topológico 114
A.1.2 Sistema de vizinhança 115
A.1.3 Homeomorfismo 115
A.2 Conjuntos fechados 116
A.3 Pontos limites, interior, fronteira e fecho de um conjunto 117

Referências Bibliográficas **119**

Lista de Figuras

1.1 Objeto geométrico modelável através de complexos celulares 3

1.2 Operação booleana regularizada de diferença entre dois objetos da *NM-Classe*: (a) e (b) primitivas, (c) diferença regularizada, (d) diferença não-regularizada . . 4

1.3 Espaços de modelagem: Comparação da capacidade de modelagem 5

1.4 Operação booleana ordinária de diferença para mostrar que o resultado não pertence a *NM-Classe* 6

2.1 Dois sólidos A e B representados construtivamente 12

2.2 Operação booleana entre dois sólidos A e B determinando um sólido C 12

2.3 Operação booleana de interseção entre os sólidos A e B: (a) primitivas, (b) operação ordinária e (c) operação regularizada 13

2.4 Árvore CSG com sólidos mostrados em projeção ortográfica 14

2.5 Relação em variedades bidimensionais e *r-sets*, quanto ao domínio de representacão 15

2.6 Operação booleana de união entre variedades-2D fechadas, cujo resultado não é variedade-2D fechada 16

2.7 Domínio topológico: (objeto 2D). (a) variedade-2D, (b) *r-set*, (c) *s-set*, (d) generalização de *s-set*, (e) *NM-Classe*, (f) *NM-Classe*, (g) união de subconjuntos abertos, (h) união de subconjuntos abertos não-regularizados, (i) *NM-Classe* e (j) *Selective Geometric Complex* 21

3.1 Conjunto A - destaque para sua fronteira, interior, complemento e fecho 24

3.2 Vizinhança completa (P), parcial (Q e R) e nula (S) em relação a uma superfície 35

3.3 Espaços de imersão mínimos para objetos compostos por arestas, faces e sólidos . 36

3.4 Classificação de vizinhança dos pontos em relação a dois complexos celulares. . . 37

3.5 Espaços de imersão mínimo para vizinhanças sobrepostas. 38

3.6 Espaços de imersão mínimo para pontos com vizinhanças parciais. 39

3.7 Espaços de imersão mínimo para vizinhanças disjuntas, sendo uma delas completa. 40

3.8 Relações de fronteira e interior para um conjunto em relação aos espaços de imersão $\Re^2$ e $\Re^3$ 41

3.9 Classificação de vizinhanças para conjuntos em relação ao espaço de imersão mínimo comum $\Re^2$ 42

3.10 Subconjuntos de classificação de pertinência 43

3.11 Operação booleana de diferença: (a) objeto A (Face A) e objeto B (Face B), (b) posicionamento, (c) entidades do grupo 8, (d) entidades do grupo 8^*, (e) resultado para $A \ominus B$ (errôneo), e (f) resultado para $A \ominus B$ (correto) 44

3.12 Identificação dos grupos gerados pela classificação de pertinência 44

4.1 Exemplos de células-n: para $n = 0, 1, 2$ e 3 48

4.2 Complexos celulares 49

4.3 Decomposição celular que não formam complexos, pois viola: (a) a condição (2) e (b) a condição (3) 50

4.4 Subcomplexo (face e fronteiras) de um complexo (cubo e fronteiras) 51

4.5 Modelo de Dados Topológicos (TDM) 54

4.6 Aresta construída através da seqüência de operadores: (a) TdVMakeVertexComponent, (b) TdEMakeVertexEdge 56

4.7 Face construída através da seqüência de operadores: (a) TdVMakeVertexComponent, (b) TdEMakeVertexEdge, (c) TdEMakeVertexEdge, e (d) TdEMakeEdgeFace 57

4.8 Objeto composto pela fusão de uma aresta-arame e uma face,utilizando o operador TdEMakeEdgeKillComponente 57

4.9 Interseção geométrica e classificação de pertinência: módulos básicos do algoritmo de operação booleana 59

4.10 Pré-classificação - o complexo A contém célula-3 e o complexo B é multiplamente conexo e não contém célula-3 61

4.11 Exemplos de interseção entre complexos mostrando os espaços de imersão mínimos 62

4.12 Espaços de imersão mínimos para subcomplexos X e Y, com $dim(X) \leq dim(Y)$ 64

4.13 Espaços de imersão mínimos para subcomplexos X e Y, com $dim(X) \leq dim(Y)$ e célula de maior dimensão com vizinhança parcial em relação a Y 65

4.14 Classificação de pertinência entres subcomplexos-vértice 66

4.15 Incidência de um vértice v_A sobre um subcomplexo-aresta e_B 67
4.16 Incidência de um subcomplexo-vértice v_A sobre um subcomplexo-face f_B 67
4.17 Identificação de espaço de imersão e classificação local para dois subcomplexos-aresta 69
4.18 Espaço de imersão mínimo comum para subcomplexo-aresta e subcomplexo-face 70
4.19 Classificação de subcomplexo-aresta/subcomplexo-face para diferentes espaços de imersão 71
4.20 Espaço de imersão mínimo comum para subcomplexos-face 72
4.21 Classificação local para subcomplexos-face no $\Re^2$ 72
4.22 Classificação local para subcomplexos-face no $\Re^3$ 73
4.23 Módulo de operação booleana fechada implementado no sistema $ProSIm$ 75

5.1 Complexos celulares com geometria restrita a polígonos, segmentos e pontos . . 77
5.2 Organização do TDM relativa a informações adicionais às entidades topológicas . 80
5.3 A representação da informação geométricas para os vértices extremos de uma aresta 81
5.4 Casos de interseção polígono/segmento 82
5.5 Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para um ponto no espaço . . 83
5.6 Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para uma linha no espaço . . 84
5.7 Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para um plano no espaço . . . 84
5.8 Comparação entre três pontos, aplicando o paradigma da tolerância 86
5.9 Novas regiões de inclusão e exclusão para pontos coincidentes 87
5.10 Regiões de tolerâncias de inclusão, ϵ, e exclusão, δ , para: (a) uma reta no espaço,(b) para um segmento limitado por P_1 e P_2. (vista lateral) 88
5.11 Algumas situações que envolvem a localização de um ponto em relação a um polígono no plano 90
5.12 Regiões de tolerâncias ajustadas dos extremos dos segmentos 92
5.13 Interseção de segmentos sobre uma reta 94
5.14 Pré-classificação de um complexo em relação: (a) um complexo A (b) subcomplexo-aresta (c) subcomplexo-face 96
5.15 Classificação local - destaque para o espaço de imersão mínimo comum 98
5.16 Classificação local - destaque para o espaço de imersão comum não-mínimo . . . 98

5.17 Classificação global de uma entidade fundamental de objeto que contém entidade sólida 101

5.18 Sistema de Prototipação e Síntese de Imagens - $ProSIm$ 102

5.19 Módulo de edição no processo de operação booleana: (a) uma operação é selcecionada, (b)todas as operações são visualizadas e depois uma é selecionada . . . 104

5.20 Operação booleana de diferença entre um subcomplexo-aresta (e) e um subcomplexo-face (f): (a) diferença $(f - e)$ (seleção), (b) eliminação da aresta redundante . . 107

5.21 Visualização de objetos da NM-$Classe$ através do $ProSIm$ 108

5.22 Operação booleana entre duas faces (uma convexa e uma côncava); quadro maior destaca linhas de interseção 109

5.23 Combinações booleanas fechadas entre quatro faces 110

5.24 Combinações booleanas fechadas entre um cubo e um cilindro, ambos representados por "cascas" 111

A.1 Exemplos de homeomorfismos 116

Lista de Tabelas

3.1 Subconjuntos básicos para combinações booleanas fechadas 32

4.1 Operadores topológicos básicos de construção do módulo TDM 55

5.1 Interseção entre polígonos, segmentos e pontos 81

Capítulo 1

Introdução

Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quere passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
("Mar Portuguez" - Fernando Pessoa)

O rápido desenvolvimento da computação gráfica e tecnologias de projeto e manufatura auxiliados por computador *(CAD/CAM)* fez surgir a modelagem geométrica. Este termo refere-se aos métodos utilizados para definir e manipular formas e outras características geométricas de um objeto. Sistemas de Modelagem Geométrica *(Geometric Modeling Systems ou GMS)* são projetados para processar objetos com características específicas e bem definidas, visando sempre fornecer resultados válidos. Por exemplo, modeladores de sólidos provêem funcionalidades para processar e gerar objetos sólidos representáveis computacionalmente. Alguns processos como o projeto de circuitos integrados, de peças mecânicas, e outros, requerem a utilização de superfícies e linhas em conjunto com sólidos em uma mesma representação. Requicha e Rossignac [24] levantam um histórico e fazem previsões a respeito de aplicações de técnicas de modelagem geométrica.

A especificação de formas geométricas complexas requer dos Sistemas de Modelagem Geométrica técnicas elaboradas para a modelagem. Uma importante técnica de modelagem geométrica é a **operação booleana**, utilizada para a construção de objetos complexos a partir de operações de união, interseção e diferença (denotadas por $\cup$, $\cap$ e $-$, respectivamente) em objetos simples e de fácil especificação, em geral denominados primitivas.

Discutimos nesta dissertação as diversas abordagens acerca do processo de operação booleana. Apontamos as vantagens e desvantagens destas abordagens em relação às ne-

cessidades práticas dos usuários de modeladores geométricos. De acordo com a literatura existente, a propriedade de fechamento é desejada para os operadores booleanos, pois garante a exclusão de objetos inválidos. Quando se trata de sólidos fisicamente realizáveis, cujas superfícies sejam topologicamente equivalentes à variedades bidimensionais fechadas, Mäntylä [15] mostrou que, implementando os operadores booleanos com os operadores de Euler propostos por ele, os resultados são sempre representáveis pela estrutura *half-edge* e portanto, são variedades bidimensionais fechadas. Quando se trata de *r-sets*, Requicha [23] mostrou que os operadores booleanos regularizados são fechados sobre eles e os implementou para modelos CSG, enquanto Desaulniers e Stewart [26] propuseram uma implementação para os modelos *B-REP*, utilizando um conjunto de operadores de Euler estendido.

A demanda por modelos mais gerais do que variedades bidimensionais ou *r-sets* levou à proposta de esquemas de representação que cobrem o domínio de formas geométricas de dimensões heterogêneas [34, 7, 21, 18, 38]. Para alguns destes esquemas foram apresentados algoritmos de combinações booleanas através dos trabalhos de Crocker e outros [22], Gursoz Choi e Prinz [8], Rossignac e O'Connor [21]. Porém, nestes trabalhos não foi contemplada a propriedade de fechamento dos operadores.

Nosso trabalho tem o intuito de propor um conjunto de operadores booleanos fechados sobre a *NM-Classe*. Esta classe de objetos, modelados através de complexos celulares, não pode ser satisfatoriamente manipulada por algoritmos de operações booleanas existentes, nem por operadores booleanos ordinários, já que não garantem a propriedade de fechamento.

A concepção de algoritmos de operação booleana está intimamente ligada ao esquema de representação e ao *espaço de modelagem* [23]. Sistemas de modelagem de sólidos baseados na representação CSG (*Constructive Solid Geometry*) combina primitivas sólidas simples tais como cones, cilindros, esferas e cubos para produzir objetos sólidos complexos. O algoritmo de combinação consiste em construir uma estrutura de árvore na qual as folhas representam as primitivas e os nós internos as operações booleanas regularizadas (denotadas por $\cup^*$, $\cap^*$ e $-^*$). Em esquemas de representações *B-REP* (*boundary representation*) os algoritmos de operações booleanas requerem a computação explícita das interseções entre as fronteiras de dois modelos *B-REP* para criar um terceiro modelo, também *B-REP*.

Com já mencionamos, diante de necessidades práticas surge a preocupação de estudar e gerir sistemas de modelagem geométrica capazes, não somente de representar e manipular sólidos, mas habilitados a processar uma gama maior de formas geométricas, e com isto tornar os modeladores geométricos mais poderosos. Mais precisamente, uma classe de objetos que possa ser descrita através de complexos celulares com dimensão limitada ao espaço eu-

clidiano $\Re^3$, denominamos esta classe de objetos de *NM-Classe* [1]. Neste trabalho lançamos e fundamentamos a proposta de um conjunto de operadores booleanos para esta classe de objetos. A Figura 1.1 exibe um objeto desta classe formado por sólidos e superfície.

Figura 1.1: Objeto geométrico modelável através de complexos celulares

Os algoritmos de operações booleanas desenvolvidos para manipular os *r-sets* [23] e as variedades bidimensionais fechadas [16] não são capazes de processar objetos da *NM-Classe*. Por exemplo, a Figura 1.2.(a-b) mostra dois objetos modeláveis por variedades bidimensionais fechadas, e a Figura 1.2.(c) exibe um objeto regular resultante da operação booleana de diferença entre os dois. O resultado é consistente, mas, do ponto de vista do domínio da *NM-Classe*, é incorreto, já que a face deveria fazer parte do resultado como mostrado na Figura 1.2.(d).

Como do ponto de vista de domínio de representação as variedades bidimensionais são subconjuntos dos *r-sets*, as operações propostas para aquele domínio forneceria da mesma forma resultados inválidos se aplicados a *NM-Classe*, sendo esta mais representativa do que os *r-sets*.

Portanto, é imprescindível que ao iniciarmos um projeto com intuito de prover um processo de operação booleana, definamos o esquema de representação a ser utilizado procurando responder as seguintes questões:

1. Que tipo de objeto será manipulado ?

[1] A denominação *NM-Classe* deve-se a intenção de não traduzir o termo *non-manifold* do inglês por ser impreciso e inadequado para a descrição dos objetos em questão

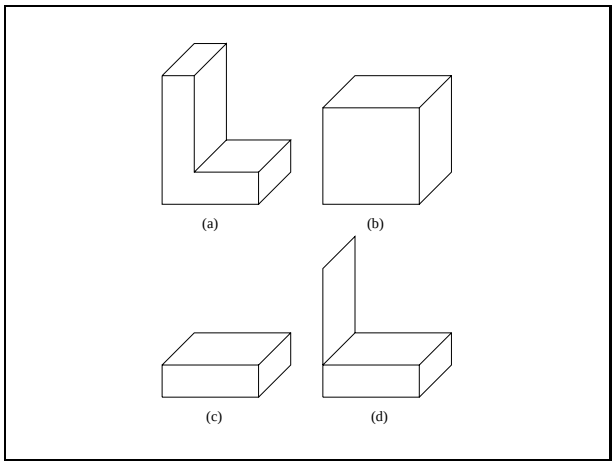

Figura 1.2: Operação booleana regularizada de diferença entre dois objetos da *NM-Classe*: (a) e (b) primitivas, (c) diferença regularizada, (d) diferença não-regularizada

2. Como descrever modelos matemáticos destes objetos ?
3. Como representar computacionalmente estes modelos ?

1.1 Esquema de representação

O objeto que desejamos manipular engloba a noção de sólidos e entidades não-sólidas (dimensões inferiores a três) no espaço tridimensioanl em uma única representação. Esta classe de objetos apresenta as seguintes propriedades:

- rigidez: qualquer objeto da classe tem forma invariante quanto a sua localização ou orientação no espaço.
- dimensão não-homogênea no $\Re^3$: Pode possuir fronteira com pontos isolados, inclusive conter entidades de dimensões inferiores a três.
- compacto: um objeto da *NM-Classe* deve ocupar uma porção finita do espaço, e contém seus elementos de fronteira.
- invariante às transformações rígidas: a aplicação de translação e/ou rotação em objetos da *NM-Classe* deve produzir um objeto da *NM-Classe*.

- particionável: as fronteiras de qualquer objeto da *NM-Classe* deve ser particionável em conjuntos finitos de entidades de dimensões menores. Por exemplo, um modelo de um sólido pode ser particionado em um conjunto finito de faces, arestas e vértices, que representam suas fronteiras.
- fronteiras bem comportadas: propriedade decorrente da anterior, pela qual qualquer ponto da fronteira pode ser unicamente identificado.

Estes objetos podem ser representados por complexos celulares com dimensões inferiores a dimensão três, e constituem o domínio *NM-Classe*. A relação entre os espaços de modelagem para variedades bidimensionais fechadas, *r-sets*, e *NM-Classe* é ilustrada na Figura 1.3.

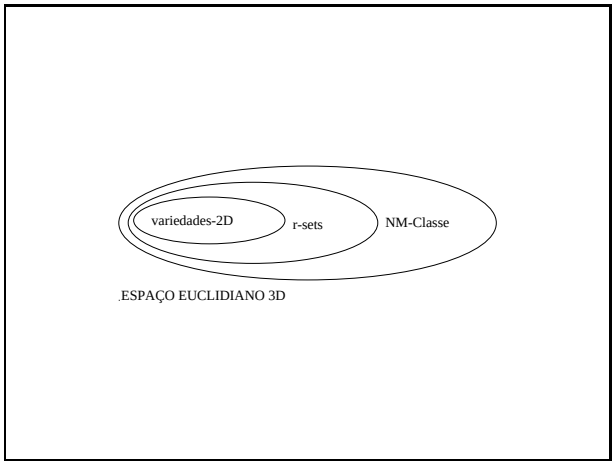

Figura 1.3: Espaços de modelagem: Comparação da capacidade de modelagem

Quando falamos em criar, modificar e armazenar objetos utilizando um computador, é necessário que tenhamos uma representação computacional para estes objetos, pois algoritmos geométricos não tratam diretamente objetos físicos, e sim, dados que representam estes objetos. Este procedimento refere-se a construção de uma estrutura de dados, baseada em um alfabeto de símbolos sintaticamente organizados. A coleção de todas as possíveis representações denomina-se espaço de representação [23], o qual denotamos por $\mathcal{R}$. A correspondência entre a classe dos objetos representáveis (espaço de modelagem $\mathcal{M}$) e o espaço de representação denomina-se *esquema de representação*, denotado por s,

$$\mathcal{M} \xrightarrow{s} \mathcal{R}$$

O esquema de representação estabelece uma semântica ao trinômio, ou seja, cria uma ponte entre o problema e sua representação computacional, formando uma base para o desenvolvimento de algoritmos para a manipulação de instância do problema real. O Capítulo 2 detalha todo o processo de modelagem dos objetos da *NM-Classe* e apresenta uma estrutura de dados funcional para a manipulação dos objetos desta classe.

1.2 Operações booleanas

Nossa proposta tem o intuito de prover um conjunto de operadores booleanos que possa operar sobre o domínio dos complexos celulares e preservar a propriedade de fechamento, ou seja, que os resultados das operações de interseção, união e diferença sejam sempre descritos por complexos celulares, e conseqüentemente, possam ser representados através de uma estrutura de dados, utilizada para representá-los. A Figura 1.4 exibe o resultado de uma operacão booleana ordinária de diferença entre um cubo (sólido) e uma face. O objeto resultante não pertence ao domínimo da *NM-Classe*.

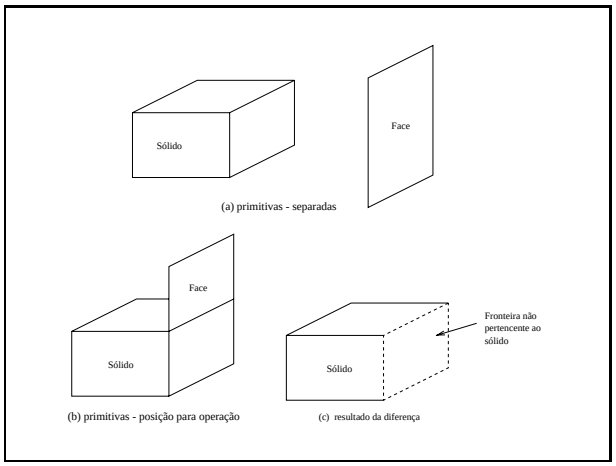

Figura 1.4: Operação booleana ordinária de diferença para mostrar que o resultado não pertence a *NM-Classe*

Mostraremos que podemos definir um conjunto operadores booleanos fechados como função dos operadores booleanos ordinários para o domínio da *NM-Classe* e propomos um algoritmo baseado na classificação de pertinência de conjuntos para viabilizar esta abordagem. Dados dois objetos A e B, a função de classificação de pertinência identifica subconjuntos de A situados no interior, exterior e na fronteira de B, e subconjuntos de B situados no interior,

exterior e na fronteira de A.

A estratégia da classificação de pertinência para os pontos de dois objetos da *NM-Classe* baseia-se na noção de espaço de imersão mínimo introduzida. Este espaço é obtido pela análise da vizinhança dos pontos dos objetos e garante classificações coerentes que levam a resultados corretos.

Implementamos este conjunto de operadores booleanos para os objetos da *NM-Classe* nos quais as entidades topológicas fundamentais, isto é, as faces, arestas e vértices são geometricamente representadas por polígonos planares simples e orientados, segmentos de reta orientados e triplas no espaço euclidiano $\Re^3$, respectivamente. Os sólidos são entidades limitadas por um conjunto de faces conexas. Uma estrutura de dados com uma interface funcional simples servirá de base para manipular consistentemente as informações topológicas dos modelos. Este conjunto de operadores é parte integrante do ProSIm [2].

1.3 Diretrizes do projeto

Esta dissertação oferece um estudo da técnica de operação booleana, ao mesmo tempo que lança uma proposta de um conjunto de operadores booleanos para uma classe de objetos modelados por complexos celulares. A apresentação deste trabalho está distribuida da seguinte forma:

Capítulo 1 - colocação do problema, exaltando algumas perspectivas sobre o projeto no sentido de introduzir e motivar o leitor sobre a necessidade da técnica de operação booleana dentro da modelagem geométrica.

Capítulo 2 - revisão da literatura sobre a técnica de operação booleana. Descrevemos alguns algoritmos já consagrados que implementam esta técnica.

Capítulo 3 - formulação dos operadores booleanos fechados sobre os objetos da *NM-Classe*. Este conjunto de operadores garante a propriedade de fechamento sobre esta classe de objetos.

Capítulo 4 - descrição de um algoritmo de operação booleana fechada sobre a *NM-Classe*. Descrevemos sucintamente a modelagem dos objetos da *NM-Classe* através de complexos celulares e um esquema de representação para a manipulação dos modelos

[2] *ProSIm* é um sistema para prototipação e síntese de imagensem desenvolvimento no LCA/FEEC/UNICAMP

computacionalmente. Descrevemos um algoritmo para os operadores booleanos fechados formulados no Capítulo 3, baseando-se na noção de classificação de pertinência e espaço de imersão.

Capítulo 5 - implementação dos operadores booleanos fechados para um subconjunto de objetos da *NM-Classe*. Nos modelos implementados, as faces, arestas e vértices são geometricamente representados por polígonos planares simples, segmentos de reta orientados, e pontos do $\Re^3$, respectivamente. Alguns resultados desta implementação são mostrados no final do Capítulo.

Capítulo 6 - conclusões sobre o trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Para auxiliar a leitura do texto o Apêndice A contém algumas propriedades de conjuntos e alguns conceitos sobre topologia geral, apesar de julgarmos necessário somente para leitores não familiarizados com a temática do trabalho.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Discutimos no Capítulo introdutório, a estreita relação entre os esquemas de representação e a concepção de algoritmos para as técnicas de modelagem geométrica, em particular a operação booleana. Neste Capítulo vamos relacionar alguns dos esquemas de representação mais populares presentes na literatura, e também alguns algoritmos de operações booleanas desenvolvidos sobre estes esquemas, frisando a relevância e limitações de cada abordagem. Apresentamos ainda um esquema de representação funcional para a manipulação de entidades da *NM-Classe*. Uma análise da aplicabilidade dos operadores booleanos convencionais para esta nova classe de objetos será realizada, no intuito de mostrar a ineficiência dos operadores convencionais em atender algumas condições impostas ao processo, motivando a concepção de um novo conjunto de operadores booleanos para manipular a *NM-Classe*.

Os esquemas de representação para objetos geométricos podem ser agrupados em três grandes categorias: representação por decomposição, representação construtiva e representação por fronteiras. Na representação construtiva, os modelos são representados implicitamente por operações nas primitivas sólidas, o mais popular integrante desta família é a representação *CSG* (*Constructive Solid Geometry*); na representação por fronteiras, popularmente conhecida como *B-REP*, os objetos são modelados através de suas fronteiras; e na decomposição, os modelos são representados por subdivisão do espaço no qual estão imersa, sendo a *octree* uma estrutura de dados bastante popular nesta abordagem.

Com a necessidade de se conceber modelos mais amplos para a representação de objetos mais complexos do que sólidos, surgiram as extensões aos esquemas de representação convencionais citados. Muitos dos esquemas de representação *B-REP* tem sido propostos para estender o domínio dos sólidos representados por suas fronteiras, sendo alguns baseados na decomposição de células e regiões [21, 38] e a dimensionalidade não-homogênea dos obje-

tos [34, 7]. Representações construtivas baseadas em grafos construídos a partir de operações não-regularizadas em regiões das primitivas foram propostas como extensão do esquema *CSG*, como por exemplo o esquema CNRG, no qual as primitivas não precisam ser sólidos. Como extensões para *octree*, foi proposta a árvore BSP (*Binary Space Partition*) para subdivisão não-regular do espaço [28] e esquema *B-REPIndex* para a descrição de objetos poliédricos de forma robusta como uma generalização de árvores BSP [12].

Independentemente do esquema de representação, dados dois objetos (conjuntos) A e B, as operações booleanas ordinárias de união, interseção e diferença determinam um terceiro objeto C , e são dadas por:

- União: $C = A \cup B$
- Interseção: $C = A \cap B$
- Diferença: $C = A - B$ ou $C = B - A$

Entretanto, duas condições básicas dentro do processo de operação booleana devem ser observadas. A primeira, se os objetos A e B pertencem a uma determinada classe de objetos, é desejável que o objeto resultante de qualquer operação booleana também pertença a mesma classe de objetos das primitivas A e B. Desta forma se produz um resultado válido e representável pela estrutura de dados utilizada para descrever as primitivas.

A segunda condição, a concepção dos algoritmos de operações booleanas depende diretamente de cada esquema de representação. Por exemplo, a representação construtiva (*CSG*) de um sólido é uma estrutura em árvore, na qual os nós representam operações booleanas regularizadas ou transformações rígidas, nas folhas da árvore estão as primitivas sólidas e na raiz tem-se a descrição do objeto. Como a concepção da representação implicitamente contém operadores booleanos, a realização de uma operação booleana entre dois objetos representados construtivamente é conseguida através da instanciação de um novo nó, no qual os nós adjacentes são as raízes das árvores que representam as primitivas.

As operações de interseção, união e diferença nas estruturas hierárquicas como *octree* são implementadas comparando-se as árvores [12] que representam ambos os objetos; enquanto, as representações por fronteira, *B-REP* e/ou extensões, requerem a computação explícita das interseções das entidades de fronteiras, juntamente com um processo de classificação para determinar a pertinência das entidades de um objeto em relação ao outro, e incorporar informações de "volumes". Em operações booleanas para representações *B-REP*

de sólidos, o processo resume-se aos seguintes passos: composição [1] das fronteiras, classificação das fronteiras, construção do objeto resultante. Neste caso, a classificação de fronteira carrega implicitamente a informação sobre o volume, enquanto, em *B-REP* estendidos esta informação nem sempre está disponível, já que faces, arestas ou vértices, não necessariamente são adjacentes à entidades sólidas, podendo inclusive não haver entidades sólidas.

Neste Captítulo vamos relacionar algumas abordagens de operadores booleanos para representações CSG, *B-REP* e extensões. Operadores booleanos para a representação decomposição espacial podem ser buscados na proposta de Naylor, Amanatides e Thibault [28] e Hoffmann e Vanecek [12].

2.1 Operações booleanas em representações *CSG*

A representação construtiva de objetos geométricos é uma árvore na qual os nós internos são operações booleanas ou transformações rígidas, as folhas representam as primitivas e na raiz tem-se a representação do objeto. Desta forma, como está implícito na representação, a realização de uma operação booleana entre dois objetos (duas árvores) *CSG* é conseguida instanciando-se uma nova árvore com a operação booleana desejada em sua raiz e com as duas árvores destes objetos como filhos. Um exemplo deste procedimento é mostrado a partir de dois objetos A e B construtivamente representados (Figura 2.1), um terceiro objeto C é determinado pela operação booleana empreendida pela construção de um nó na árvore CSG(Figura 2.2).

A representação CSG foi proposta originalmente para o domínio dos *r-sets* (também denominados sólidos abstratos) por Requicha [23] e colaboradores [32, 29]. Eles mostraram que as operações booleanas ordinárias não são fechadas sobre os *r-sets*, isto é, o resultado de uma operação booleana ordinária sobre dois *r-sets* pode resultar em um objeto não pertencente a este domínio. A Figura 2.3 mostra as primitivas (dois *r-sets*) A e B.

A Figura 2.3.(b) ilustra o resultado da operação booleana de intersecão ordinária entre A e B, que consiste de um objeto composto por um sólido e uma face não-adjacente ao sólido, e portanto, não representa um *r-set*, já que o objeto resultante não é regular.

Para contornar este problema Requicha e colaboradores sugeriram um esquema CSG, cujos nós internos da árvore sejam operadores booleanos regularizados no lugar dos operadores booleanos ordinários. Estes operadores garantem a validade do esquema, ou seja, os *r-sets*

[1] As palavras composição ou agrupamento, neste texto, referem-se a uma tradução de *Merging* do inglês

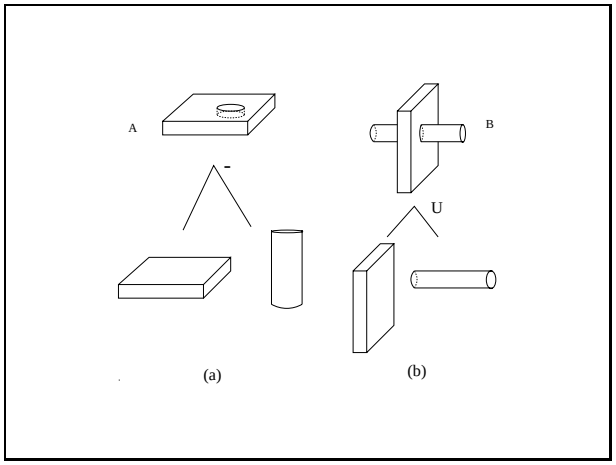

Figura 2.1: Dois sólidos A e B representados construtivamente

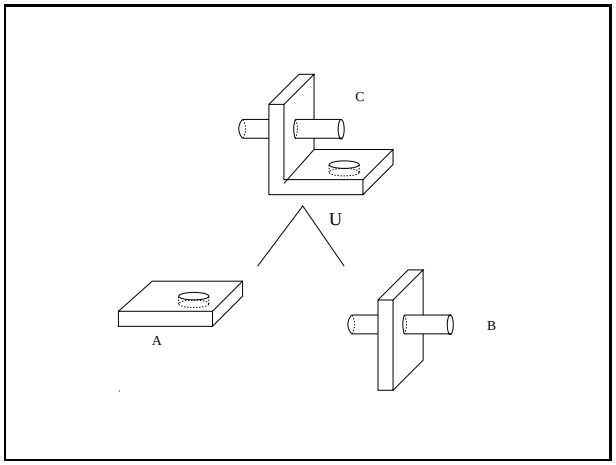

Figura 2.2: Operação booleana entre dois sólidos A e B determinando um sólido C

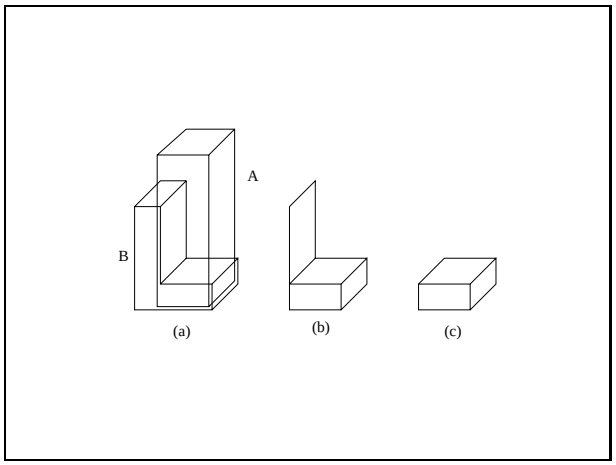

Figura 2.3: Operação booleana de interseção entre os sólidos A e B: (a) primitivas, (b) operação ordinária e (c) operação regularizada

são fechados sobre os operadores booleanos regularizados.

Os operadores regularizados são definidos pelo fecho dos pontos interiores das operações ordinárias equivalentes. Matematicamente, podemos expressar os operadores booleanos regularizados entre dois conjuntos da seguinte forma:

- Interseção: $A \cap^* B = ki(A \cap B)$
- União: $A \cup^* B = ki(A \cup B)$
- Diferença: $A -^* B = ki(A - B)$

sendo i e k representam as operações interior e fecho dos conjuntos argumentos. A Figura 2.3.(c) mostra a regularização da operação ordinária da Figura 2.3.(b), validando o resultado. A Figura 2.4 mostra uma árvore CSG, na qual os nós internos da árvores são operadores booleanos regularizados, e transformações rígidas.

Requicha e Voelcker [32] mostraram que as operações regularizadas podem ser definidas como a combinação de "conjuntos de classificação". Estes conjuntos de classificação são computados através da função de classificação de pertinência de conjuntos, desenvolvida por Tilove [30].

Mais tarde, Requicha e Voelcker [33] utilizaram a função de classificação de pertinência para a conversão da representação da árvore *CSG* de um sólido para uma representação B-Rep, através de algoritmos de *boundary evalution* e *boundary merging*. Desta forma,

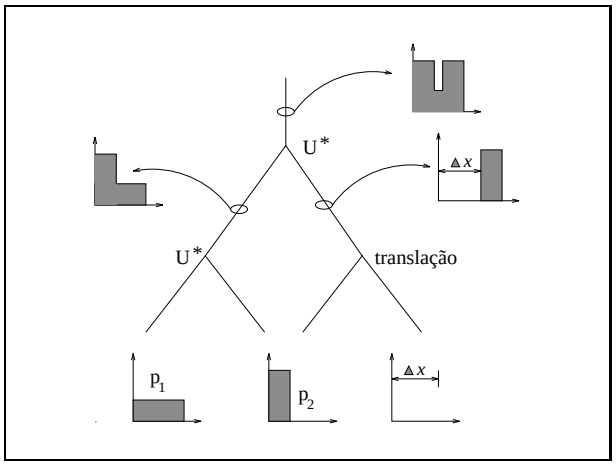

Figura 2.4: Árvore CSG com sólidos mostrados em projeção ortográfica

operação booleanas realizadas através de uma representação construtiva, conseguem mapear modelos CSG para uma descrição por fronteiras.

2.2 Operações booleanas em representações *B-REP*

As operações booleanas entre dois sólidos A e B, representados através de um esquema *B-REP* podem ser efetivadas através dos passos seguintes:

1. **Interseção das fronteiras**: determinação das entidades de A que cortam as fronteiras de B, e vice-versa, entidades de B que cortam as fronteiras de A.
2. **Classificação das fronteiras**: classificação das fronteiras (faces) de ambos os objetos para a obtenção da classificação em oito subconjuntos, a partir das relações entre fronteira, interior e complemento de cada objeto em relação ao outro.
3. **Construção do objeto resultante**: de acordo com a operação, partes dos dois *B-REP* são selecionadas e agrupadas para formar o objeto resultante, eliminando-se as entidades redundantes.

O objeto formado pode ainda passar por um processo de filtragem topológica, para minimizar o número de entidades na estrutura de dados. Neste caso, faces adjacentes e

coplanares, e arestas adjacentes e colineares são agrupadas, através da eliminação de entidades de fronteiras que as separam.

Mäntylä [15], em meados dos anos 80, propôs a modelagem de sólidos fisicamente realizáveis através de variedades bidimensionais fechadas (*2D-manifolds*) descritos com o auxílio dos operadores de Euler. Mais tarde, o próprio Mäntylä [17] implementou uma estrutura de dados denominada *half-edge*, para representar computacionalmente as variedades bidimensionais fechadas. Esta estrutura caracteriza-se pelo fato de que cada par de faces sempre compartilha uma única aresta, com orientações opostas em cada uma das faces, daí cada *half-edge* ("meia-aresta") sempre possui outra complementar. Neste esquema de representação os sólidos são sempre referenciados como "cascas" fechadas, e como tal, a superfície é localmente homeomorfa a um disco aberto.

A implementação de operadores booleanos com os operadores de Euler proposto por Mäntylä [17], garante que os resultados sejam sempre representáveis pela estrutura*half-edge*, e portanto, são variedades bidimensionais fechadas. Quanto ao domínio do objetos representáveis, a relação entre os *r-sets* e variedades bidimensionais fechadas, pode ser melhor compreendida através da Figura 2.5.

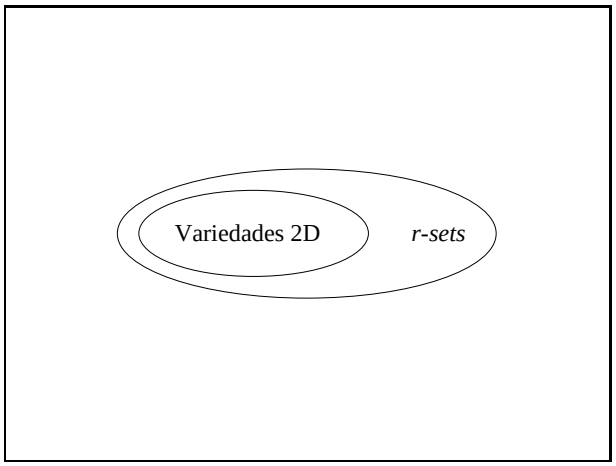

Figura 2.5: Relação em variedades bidimensionais e *r-sets*, quanto ao domínio de representacão

A representação de sólidos fisicamente realizáveis utilizando variedades-2D fechadas não é fechada sobre os operadores booleanos regularizados propostos por Requicha e Voelcker e Requicha [32]. A Figura 2.6 mostra uma operação booleana de união entre dois objetos geométricos modelados por variedades-2D fechadas cujo resultado não é uma variedade-2D

fechada.

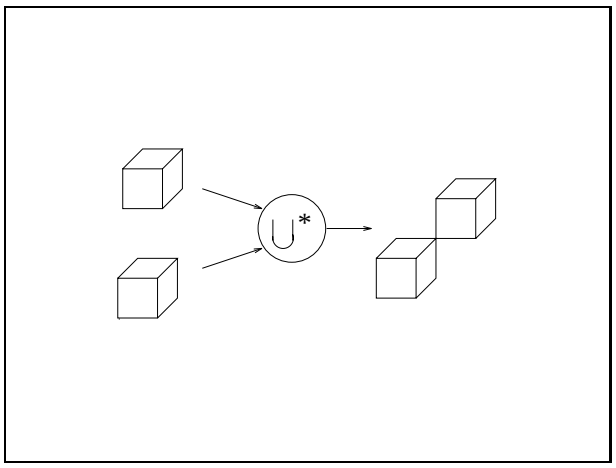

Figura 2.6: Operação booleana de união entre variedades-2D fechadas, cujo resultado não é variedade-2D fechada

A estrutura *half-edge* não consegue representar o objeto resultante da operação de união ilustrada, pois a vizinhança do vértice (V) não é localmente homeomorfa a um disco aberto, e portanto, o objeto não pode ser modelado como uma variedade-2D fechada.

Mäntylä [17] sugeriu um algoritmo de operação booleana fechada sobre o domínio dos objetos modelados por variedades-2D fechadas. Este algoritmo é baseado na classificação de vizinhança de vértices e apoia-se sobre um conjunto de operadores de Euler, que garantem a validade do modelo resultante, e por conseguinte, sua representação através da estrutura de dados *half-edge* é consistente.

2.3 Representações *CSG* estendidas

As representações CSG e *B-REP* para sólidos cobrem um domínio de representação considerável e são bastante utilizadas em projetos de peças mecânicas, etc; no entanto, algumas aplicações práticas como representação de carrocerias de carros, regiões de contatos entre sólidos, etc, não podem ser representados por esquemas CSG (com operadores booleanos regularizados) e *B-REP* limitados ao domínio de variedades bidimensionais fechadas.

Requicha e Rossignac [13] propuseram uma reprsentação para um domínio mais geral do que sólidos denominada estrutura CNRG (*Constructive Nonregularized Geometry*). As

CNRG são árvores que dispõem de operações booleanas não-regularizadas e operações topológicas em regiões das primitivas. Cada região é um conjunto de pontos do R^n, conexa ou não, não-regular e dimensionalmente não-homogênea.

As folhas da árvore CNRG representam primitivas parametrizadas como volumes, superfícies, curvas ou pontos; os nós internos representam objetos CNRG intermediários, e suportam a aplicação de operadores booleanos ordinários. Portanto, a representação CNRG apresenta a mesma estrutura de suporte às operações booleanas que a representação CSG, possibilitando, entretanto, operadores não-regularizados e suporte a novos operadores para a manipulação da estrutura interna dos modelos.

Podemos, desta forma, imaginar a estrutura CNRG como uma generalização da representação CSG que suporta operadores booleanos não-regularizados e operadores topológicos para a manipulação de regiões das primitivas. As primitivas não necessariamente são sólidos e por isto, são de grande utilidadde na manipulação de objetos de dimensão não-homogênea.

2.4 Representações *B-REP* estendidas

Como ocorreu com extensões do esquema de representação CSG para CNRG, nasceram algumas propostas no sentido de viabilizar extensões para o esquema *B-REP*, bem como a implementação de várias, e algumas boas, estruturas de dados para dar suporte a estas inovações. As duas principais razões que determinaram estas iniciativas foram:

- A limitação das representações convencionais em representar sólidos, enquanto, algumas aplicações atuais necessitam de esquemas de representação capazes de incorporar modelos de sólidos, *wireframes* e superfícies, em uma única arquitetura.
- Os próprios modeladores de sólidos podem produzir como resultados intermediários de suas operações objetos não-sólidos, fazendo com que o resultado final, mesmo sendo um sólido, seja diferente do esperado.

Desta forma, iniciaram-se estudos no sentido de formalizar a descrição de classes de objetos geométricos mais amplas, bem como a concepção de representações adequadas para a manipulação dos modelos. Com isto, surgiram alguns trabalhos tanto no intuito de fornecer um arcabouço teórico para descrição de modelos, como dando ênfase as implementações de estrutura de dados para o suporte computacional destes modelos.

Weiler [34] apresenta um vasto estudo sobre o uso da informação topológica em representações por fronteiras para a modelagem geométrica, enfatizando a implementação destas representações. Com o propósito de unificar as representações de *wireframes*, superfícies e formas sólidas em uma mesma arquitetura é introduzida uma estrutura de dados para a representação dos modelos denominada *Radial Edge*. Esta estrutura vem acompanhada de um conjunto de operadores para a "manipulação topológica" das entidades de "fronteiras", tais quais: faces, arestas e vértices.

De forma semelhante às estruturas de dados utilizadas para variedades bidimensionais, a estrutura *Radial Edge* é fundamentalmente baseada em aresta. Gursoz e Prinz [6] apontam algumas limitações nesta estrutura por não haver uma preocupação no tratamento das adjacências em torno dos vértices, como acontece para com as arestas, gerando perdas de informação. Isto motivou a proposta de uma representação baseada em vértice, em contraste com as representações baseadas em arestas. Segundo os autores, uma estrutura é mais versátil, pois o vértice é a entidade topológica fundamental, e nenhuma outra entidade poderá existir sem que pelo menos um vértice esteja associado. Esta estrutura de dados chama-se *Tri-cyclic Cusp*.

Gursoz, Choi e Prinz [8] lançaram uma interessante idéia acerca de operadores booleanos para os objetos representados pela estrutura *Tri-cyclic Cusp*. O algoritmo proposto calcula as interseções entre as entidades fundamentais ordenadamente, iniciando pelas interseções entre vértices indo até as interseções entre faces. Uma região de tolerância é sempre considerada para determinar se uma entidade pertence a um objeto.

Após a determinação das interseções entre as entidades fundamentais, os dois objetos são agrupados em uma única estrutura. Os pares de entidades identificadas como coincidentes são unificadas como uma única entidade. Em seguida, qualquer operação booleana pode ser completada através da seleção de entidades do objeto formado pela fusão das primitivas.

Esta abordagens traz algumas qualidades do ponto vista conceitual, no sentido de indicar um caminho para efetivação do processo de operação booleana para extensões de modelos *B-REP*, dentre as quais podemos destacar:

- Realiza operações booleanas entre objetos de diferentes dimensões, incluindo sólidos.
- Apresenta uma estratégia de interseção geométrica baseada em um algoritmo *bottom-up*, pelo qual as interseções são realizadas primeiro entre as entidades de menores dimensões, por exemplo, vértice-vértice. Em seguida as informações são utilizadas para determinar as interseções entre entidades de maiores dimensões.

Entretanto, vemos algumas restrições e falhas no processo em si, que são:

- Sistematiza o processo de interseção geométrica, no entanto, adota uma implementação que não garante a rosbutez dos resultados, pois, utiliza aritmética de ponto flutuante, mas menciona qualquer análise de consistência dos resultados das entidades geradas durante a interseção por parte da estrutura topológica.
- Conserva dados redundantes, pois a entidades criadas na interseção são mantidas em ambos os objetos, e mesmo quando "unifica" as entidades em uma única estrutura não utiliza nenhum critério para análise da consistência destes dados.
- Não analisa o processo de operação booleana no sentido de garantir que os objetos gerados nas operações disponíveis sejam válidos, e portanto, representáveis pela estrutura. Isto é, não há menção sobre o processo ser fechado para o modelo adotado.
- Não menciona claramente como são efetivados os passos de unificação das relações de fronteiras, interior e complemento dos objetos primitivos, nem tampouco a classificação de pertinência das entidades fundamentais criadas na interseção em relação aos objetos primitivos, e portanto, fica comprometida o passo de seleção para a conclusão de qualquer operação booleana.

Alguns esquemas de representação *B-REP* estendidos são baseados na decomposição celular, como é o caso do SGC (*Selective Geometric Complexes*) proposto por Rossignac e O'-Connor [21] e a proposta de Paoluzzi e outros [9]. O esquema SGC possibilita a representação de coleções de subconjuntos abertos de variedades n-dimensionais, disjuntos e conexos, denominados células. As células "generalizam o conceito de vértices, arestas e faces" usualmente utilizados pelos modeladores de sólidos; ao passo que nos SGCs, as relações de conectividades são capturadas por grafos, que indicam as relações de adjacências e incidências entre as células.

Os SGCs são utilizados para a representação de extensões de descrições de fronteiras, como por exemplo objetos heterogêneos quanto a dimensionalidade, abertos e conjuntos determinados pela composição de regiões. Nesta representação, cada célula é representada por sua fronteira e mais uma informação acerca da orientação.

Sobre o esquema SGC, foram propostos algoritmos para operações topológicas, tais quais fecho, interior, e fronteira, e também para operações booleanas: união, interseção e diferença. Estes algoritmos são utilizados para a criação e manipulação de modelos em processos auxiliados por computador. Os autores garantem a propriedade dos modelos representados sobre os operadores construidos nas três etapas seguintes:

1. **subdivisão**: as células de dois complexos SGCs são subdivididas pela interseção de ambas representações, gerando versões refinadas dos complexos primitivos.
2. **seleção**: cada célula dos complexos refinado, pode ser ativada de acordo com algum critério de seleção.
3. **simplificação**: algumas células são apagadas e outras fundidas para formar um SGC mais simples, mantendo uma estrutura interna similar aos seus primitivos.

Os modelos representados por esta estrutura são utilizados como base para operações não-regularizadas nas árvores CNRG [13], principalmente por suportarem a manipulação das estruturas internas dos modelos.

Uma proposta para a modelagem dos objetos da *NM-Classe* baseada em complexos celulares é apresentada por Wu [35]. Os modelos são descritos como uma coleção de células n-dimensionais, abertas, disjuntas, bem comportadas e multiplamente conexas. Os modelos determinados pelo agrupamento de células, segundo a autora, pressupõe sempre, a formação de um complexo celular. Neste ponto, existe uma diferença entre esta proposta e a apresentada por Rossignac e O'Connor. A proposta de Rossignac e O'Connor [35] permite a existência de objetos fechados, abertos e nem fechados, nem abertos, pela "ativação e desativação" das células da fronteira. A proposta de Wu [35] permite apenas a existência de objetos que contenha as suas fronteiras, ou seja, apenas de objetos modelados complexo celulares.

Esta descrição apresenta uma concepção unificada para a manipulação de objetos de quaisquer dimensões dentro de uma mesma arquitetura. A manipulação destes objetos fica a cargo de um conjunto mínimo de operadores de Euler [36], implementado sobre uma interface funcional criada para o manuseio de uma estrutura de dados, denominada TDM (*Topological Data Module*).

Esta abordagem considera a possibilidade de manipulação uniforme tanto de variedades sólidas quanto de superfícies, curvas e pontos, dentro de um sistema de modelagem baseado em representação por fronteira estendido. Como complemento para a representação e manipulação dos modelos baseado em complexos de células, Wu [37] apresenta um vasto estudo sobre as propriedades algébricas da topologia dos objetos da *NM-Classe* [2], com o intuito de garantir a validade dos modelos e a suficiência do conjunto de operadores de Euler em manipulá-los.

Uma descrição completa dos modelos dos objetos da *NM-Classe* através de complexos celulares, e de uma interface para manipulação "da informação topológica" da representação

[2] Subconjuntos da *NM-Classe* são denomindos objetos híbridos por Wu [37].

destes modelos, serão apresentados em Capítulo 4. Sobre esta representação serão implementados os operadores booleanos.

2.5 Comparação entre representações

Requicha e Rossignac[13] mostram uma comparação entre domínios topológicos de modeladores geométricos, no sentido de mostrar as restrições impostas aos modelos para serem suportados por estes modeladores. Jugamos procedente reproduzir a (Figura 3) da citada referência, para levantar elementos para as devidas comparações. A Figura 2.7, mostra modelos de objetos para vários domínios topológicos.

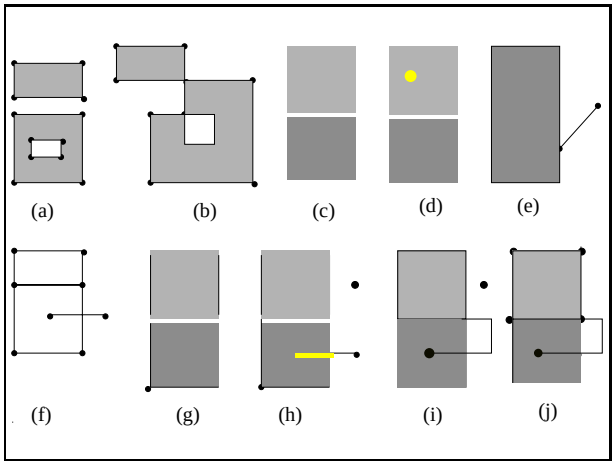

Figura 2.7: Domínio topológico: (objeto 2D). (a) variedade-2D, (b) *r-set*, (c) *s-set*, (d) generalização de *s-set*, (e) *NM-Classe*, (f) *NM-Classe*, (g) união de subconjuntos abertos, (h) união de subconjuntos abertos não-regularizados, (i) *NM-Classe* e (j) *Selective Geometric Complex*

Neste exemplo, vemos que a *NM-Classe* cobre um grande domínio topológico, e que diferencia-se da representação SGC, quanto a condição de organização das células, mesmo que ambas representações utilizem estas entidades como sendo os elementos estruturais básicos. O TDM pressupõe sempre a condição de formação de complexos celulares, ou seja, células de dimensão n são sempre limitadas por células de dimensões inferiores. Desta forma os objetos modelados são sempre fechados.

2.5.1 Considerações sobre operadores booleanos em modelagem geométrica

Do ponto de vista das condições impostas para a concepção de operadores booleanos eficientes é necessário: a condição de fechamento e a representabilidade dos esquemas. Uma análise da aplicação dos algoritmos de operação booleana aos objetos da *NM-Classe* pode ser feita da seguinte forma:

- Os esquemas de representação para sólidos não conseguem representar objetos da *NM-Classe* corretamente, desta forma, os algoritmos projetados para este domínio, não conseguem tratar objetos mais complexos.
- Por outro lado, estes mesmos algoritmos (projetados para o domínio dos sólidos) não podem ser adaptados facilmente para um domínio de representação mais genérico, pois foram criados levando-se em consideração características do domínio e do esquema de representação sobre o qual estão implementados.
- Alguns esquemas de representação estendidos conseguem representar os objetos da *NM-Classe*. Os esquemas SGC e CNRG são exemplos deste grupo. Entretanto, os algoritmos de operações booleanas propostos não podem ser aplicados sobre o TDM, pois os resultados das operações podem ser objetos não-fechados, e portanto não representáveis através do TDM.

Diante destas colocações, procuramos estudar a possibilidade de conceber um conjunto de operadores booleanos fechados sobre a classe dos objetos modelados por complexos celulares e representáveis pela estrutura TDM. Os próximos capítulos são dedicados a esta temática.

Além disso, uma descrição mais detalhada do TDM será apresentada no Capítulo 4, já que esta estrutura fora utilizada como base para a representação dos objetos da *NM-Classe* para a implementação dos operadores booleanos fechados.

Capítulo 3

Formulação dos Operadores Booleanos Fechados

Vamos esquecer, por enquanto, como representar os objetos que desejamos processar e nos concentrar nas condições necessárias para a concepção de operadores booleanos que forneçam resultados válidos e consistentes a partir do processamento de primitivas válidas no domínio da *NM-Classe*. Os objetos da *NM-Classe* tem como característica comum o fato de serem representações de conjuntos fechados. A nossa meta prioritária é desenvolver um conjunto de operadores booleanos, que forneça como resultados objetos (conjuntos) também fechados. Partindo, deste raciocínio, propomos um conjunto de operadores booleanos fechados, ou seja, definidos pelo fecho das operações booleanas ordinárias correspondentes sobre conjuntos primitivos fechados.

Introduzimos aqui algumas notações que utilizaremos ao longo do texto. Dado um conjunto A, Figura 3.1.(a), os subconjuntos dos pontos interiores, complemento e fronteira de A, são denotados por:

- iA - conjunto dos pontos interiores a A, Figura 3.1.(b).
- $\bar{A}$ - complemento A em relação ao universo W, sendo A e $\bar{A}$ subconjuntos de W, Figura 3.1.(e).
- bA - conjunto dos pontos da fronteira de A, Figura 3.1.(d).

O fecho do conjunto A, denotado por kA, é definido pela união dos pontos de A com os pontos da sua fronteira[1]., ou seja, $kA = iA \cup bA = A \cup bA$, Figura 3.1.(c).

[1] Alguns conceitos sobre topologia de conjuntos fechados e propriedades de conjuntos utilizados neste Capítulo podem ser encontrados no Apêndice A

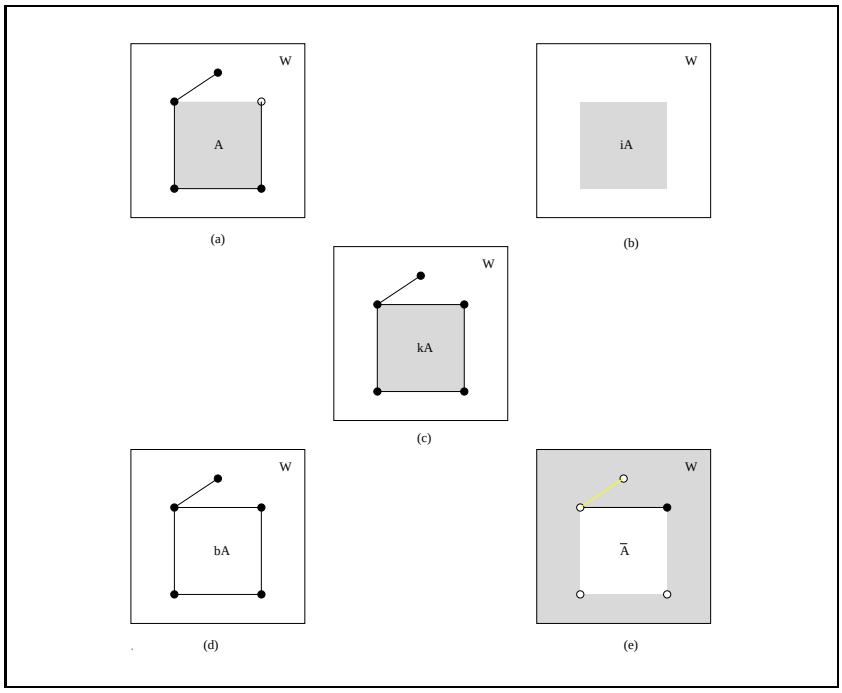

Figura 3.1: Conjunto A - destaque para sua fronteira, interior, complemento e fecho

É fácil mostrar que operadores booleanos ordinários sobre conjuntos fechados, pode produzir como resultado conjuntos não fechados. Por exemplo, considere os intervalos fechados $X = [0, 1]$ e $Y = [1, 2]$ subconjuntos da reta real ($\Re$); o conjunto resultante da diferença entre os conjuntos X e Y é $X - Y = [0, 1)$. Este conjunto não é um conjunto fechado, portanto, os operadores booleanos ordinários não preservam a propriedade de fechamento para conjuntos fechados.

Como o fecho de um conjunto qualquer é um conjunto fechado, lançaremos mão deste resultado para empreender aos operadores ordinários de interseção, união e diferença a operação fecho. A idéia desta abordagem, baseada na proposta de Requicha e Voelcker [32, 23] é "recuperar" as fronteiras dos conjuntos resultantes de um processo de operação booleana. Denominamos este conjunto de operadores de **operadores booleanos fechados**.

O primeiro passo desta proposta é equacionar a operação fecho para um par de conjuntos A e B fechados submetidos as operações ordinárias de união, interseção e diferença para determinar um conjunto de operadores booleanos fechados sobre conjuntos fechados. Veremos neste Capítulo que a partir das expressões de operação de união, interseção e diferença fechadas podemos conceber procedimentos para particionar os pontos do conjunto A em relação a B, e vice-versa, de tal forma que o problema de combinações booleanas seja reduzido ao problema de seleção de subconjuntos de pontos de A e B. A este procedimento, que particiona cada conjunto em subconjuntos de fronteira e interior e os relaciona com a fronteira, interior e complemento do outro conjunto, denominamos classificação de pertinência de pontos.

Devido as diferentes dimensões dos objetos, a classificação de pertinência dos não é trivial, pois as relações entre fronteira, interior e complemento de dois objetos estão intimamente relacionadas as dimensões do espaço "universo" (ou ambiente) no qual estão ambos os objetos e dos próprios objetos. Por exemplo, o intervalo $X = [0, 1] \subset \Re$, pode ser decomposto em subconjuntos de fronteira e interior, $bX = \{0, 1\}$ e $iX = (0, 1)$, respectivamente. Para este mesmo conjunto no plano ($\Re^2$), os subconjuntos seriam dados por $bX = [0, 1]$ e $iX = \emptyset$.

Para uniformizar as relações entre interior, fronteira e complemento de dois conjuntos propomos, ainda neste Capítulo, uma função classificação de pertinência de conjuntos baseada em um espaço com dimensão sensível à variação das dimensões das primitivas e que assegura a consistência dos resultados dos operadores booleanos fechados.

3.1 Operadores booleanos fechados

Os operadores booleanos fechados são determinados pela aplicação do fecho ao conjunto resultante das respectivas operações ordinárias. As operações booleanas fechadas entre dois conjuntos A e B podem ser expressas por:

- Interseção fechada: $A \otimes B = k(A \cap B)$
- União fechada: $A \oplus B = k(A \cup B)$
- Diferença fechada: $A \ominus B = k(A - B)$

É mais conveniente incorporar diretamente a operação fecho a computação da função de classificação de pertinência, e não determinar as operações booleanas ordinárias e somente depois empreeender o fecho no conjunto resultante; desta forma, consegue-se estabelecer qualquer combinação booleana fechada através da seleção de entidades dos conjuntos A e B diretamente. Vejamos agora, como equacionar cada um dos operadores booleanos fechados.

3.1.1 Interseção fechada

Dados dois conjuntos A e B no espaço W, definimos a operação booleana de interseção fechada entre estes dois conjuntos como:

$$A \otimes B = k(A \cap B) \tag{3.1}$$

Proposição 1 *A interseção fechada entre dois conjuntos A e B, ambos da NM-Classe, em relação ao universo W pode ser expressa em função dos operadores booleanos ordinários como segue:*

$$A \otimes B \quad = \quad [(iA \cap iB) \cup (bA \cap iB)] \cup [(bB \cap iA) \cup (bB \cap bA)] \tag{3.2}$$

Prova 1 *Dado que A e B são fechados, então:*

$$\begin{aligned} k(A \cap B) &= k(A) \cap k(B) \\ &= A \cap B \end{aligned} \tag{3.3}$$

Particionando o conjunto B em função dos pontos e interiores e de fronteira, tem-se:

$$k(A \cap B) \quad = \quad A \cap (iB \cup bB) \tag{3.4}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva, obtém-se:

$$\begin{aligned} k(A \cap B) &= (A \cap iB) \cup (A \cap bB) \\ &= (iB \cap A) \cup (bB \cap A) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Explicitando o conjunto A em função de sua fronteira e do seu interior, como fora feito em relação a B, temos:

$$k(A \cap B) \quad = \quad [iB \cap (iA \cup bA)] \cup [bB \cap (iA \cup bA)] \tag{3.6}$$

Novamente, pela propriedade distributiva determinamos a expressão do fecho da interseção:

$$k(A \cap B) \quad = \quad [(iB \cap iA) \cup (iB \cap bA)] \cup [(bB \cap iA) \cup (bB \cap bA)] \tag{3.7}$$

Rearrumando os termos da equação (3.7) chegamos a expressão (3.2) e completamos a prova.

A equação (3.2), portanto, representa a operação booleana de interseção fechada entre dois conjuntos fechados A e B, em função dos operadores ordinários e relações entre fronteira, interior e complemento destes conjuntos.

3.1.2 União fechada

Dados dois objetos A e B da *NM-Classe*, definimos a operação booleana de união fechada entre estes dois conjuntos por:

$$A \oplus B = k(A \cup B) \tag{3.8}$$

Proposição 2 *A união fechada entre dois conjuntos A e B, ambos da NM-Classe, em relação ao universo W pode ser expressa em função dos operadores booleanos ordinários como segue:*

$$\begin{aligned} A \oplus B = &[(iA - B) \cup (iB - A) \cup (iA \cap iB) \cup (bA - B)] \cup \\ &[(bB - A) \cup (bA \cap iB) \cup (iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Prova 2 *Considerando que A e B são fechados e a definição de fecho temos:*

$$k(A \cup B) = i(A \cup B) \cup b(A \cup B) \tag{3.10}$$

Da propriedade de conjuntos que reza que um ponto a de um conjunto A é um ponto de fronteira de A, em relação ao universo, se cada vizinhança de a intercepta ambos A e $\bar{A}$, pode-se expandir a expressão $b(A \cup B)$ como:

$$b(A \cup B) = (bA \cap i\bar{B}) \cup (i\bar{A} \cap bB) \cup [bA \cap bB \cap k(\bar{A} \cap \bar{B})] \tag{3.11}$$

Sendo os conjuntos A e B fechados ($A = kA$ e $B = kB$), deduz-se que $\bar{A} = i\bar{A}$ e $\bar{B} = i\bar{B}$. Neste caso, as relações $bA \cap i\bar{B}$ e $i\bar{A} \cap bB$ tornam-se equivalentes a:

$$bA \cap i\bar{B} \quad = \quad bA \cap \bar{B} = bA - B \tag{3.12}$$

$$bB \cap i\bar{A} \quad = \quad bB \cap \bar{A} = bB - A \tag{3.13}$$

Dado que $bA \cap bB \cap k(\bar{A} \cap \bar{B}) = bA \cap bB$, pelo mesmo fato dos conjuntos serem fechados, a equação (3.11) poderá ser manipulada e reescrita como segue:

$$b(A \cup B) = (bA - B) \cup (bB - A) \cup (bA \cap bB) \tag{3.14}$$

considerando a fronteira, interior e complemento de um conjunto A em relação ao universo W, dado que ($A \subset W$), podemos expandir a expressão $i(A \cup B)$ como segue:

$$i(A \cup B) = (iA \cap i\bar{B}) \cup (i\bar{A} \cap iB) \cup [iA \cap iB \cap k(\bar{A} \cap \bar{B})] \tag{3.15}$$

A partir das propriedades utilizadas na explicitação da equação (3.14), deduzimos as relações $iA \cap i\bar{B}$ e $i\bar{A} \cap iB$ como:

$$iA \cap i\bar{B} \quad = \quad iA \cap \bar{B} = iA - B \tag{3.16}$$

$$iB \cap i\bar{A} \quad = \quad iB \cap \bar{A} = iB - A \tag{3.17}$$

Pelo fato dos conjuntos A e B serem fechados, deduzimos facilmente a relação $iA \cap iB \cap k(\bar{A} \cap \bar{B}) = (iA \cap bB) \cup (bA \cap iB) \cup (iA \cap bB)$. Assim, a equação (3.15) pode ser reformulada para:

$$i(A \cup B) = (iA - B) \cup (iB - A) \cup (iA \cap iB) \cup (bA \cap iB) \cup (iA \cap bB) \tag{3.18}$$

Agrupando-se as expressões (3.14) e (3.18) temos a expressão para a operação booleana de união fechada entre dois conjuntos da NM-Classeé:

$$\begin{aligned} k(A \cup B) = [(iA - B) \cup (iB - A) \cup (iA \cap iB) \cup (bA - B)] \cup \\ [(bB - A) \cup (bA \cap iB) \cup (iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Rearrumando os termos da equação (3.19) chegamos a expressão (3.9) e completamos a prova.

A equação (3.9) representa a operação booleana de união fechada entre os conjuntos fechados A e B da *NM-Classe* em termos das relações de fronteira, interior e complemento dos conjuntos A e B e das operações booleanas ordinárias.

3.1.3 A diferença fechada entre dois conjuntos

Vale ressaltar que a operação de diferença fechada entre dois conjuntos A e B, assim como a operação booleana de diferença ordinária, não é comutativa; desta forma, ela pode ser definida por:

- A diferença fechada $(A \ominus B)$ - representa o conjunto dos elementos de A, mas que não pertencem a B.
- A diferença fechada $(B \ominus A)$ - representa o conjunto dos elementos de B e que não pertencem a A.

A dedução deste operador será feita para $(A \ominus B)$, pois, $(B \ominus A)$ pode ser determinada pela simples alternância na ordem dos conjuntos A e B na expressão $(A \ominus B)$.

3.1.3.1 A diferença fechada $A \ominus B$

Dados dois conjuntos A e B, ambos fechados, a operação booleana de diferença fechada entre ambos, denotada por $A \ominus B$, é definida por:

$$A \ominus B = k(A - B) \tag{3.20}$$

Proposição 3 *A diferença fechada entre dois conjuntos A e B, ambos da NM-Classe, em relação ao universo W pode ser expressa em função dos operadores booleanos ordinários como segue:*

$$A \ominus B = (iA - B) \cup (bA - B) \cup (iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)^* \tag{3.21}$$

sendo $(bA \cap bB)^* = bA \cap bB \cap k(A \cap \bar{B}) \subseteq (bA \cap bB)$.

Prova 3 *Utilizando a expressão que relaciona fecho, interior e fronteira de um conjunto, pode-se expandir a equação (3.20) para:*

$$k(A - B) = i(A - B) \cup b(A - B) \tag{3.22}$$

Novamente, temos a expressão de fecho de um conjunto em termos de seu interior e fronteira. Primeiro vamos desenvolver o termo $i(A - B)$, tomando as propriedades relativas ao interior e ao fecho de um conjunto $i(A \cap \bar{B}) = iA \cap i\bar{B}$, e $\overline{kB} = i\bar{B}$, e $i(A \cap \bar{B}) = iA \cap \overline{kB}$, e por conseguinte esta última equação pode ser reescrita $i(A - B) = iA - kB$. Como B é fechado, então $kB = B$, chegamos a expressão conclusiva:

$$i(A - B) = iA - B \tag{3.23}$$

Considerando a relação $b(A \cap B) = (bA \cap iB) \cup (iA \cap bB) \cup [bA \cap bB \cap k(A \cap B)]$ que estabelece a relação entre fronteira de dois conjuntos quais, e as relaç oes $i\bar{B} = \bar{B}$ e $A - B = A \cap \bar{B}$, considerando A e B fechados, deduzimos que:

$$b(A - B) = (bA - B) \cup (iA \cap bB) \cup [bA \cap bB \cap k(A \cap \bar{B})] \tag{3.24}$$

O termo $[bA \cap bB \cap k(A \cap \bar{B})]$*, subconjunto de* $bA \cap bB$*, será denotado por* $(bA \cap bB)^*$*. Este conjunto expressa os pontos da fronteira do conjunto formado pela composição das parcelas que o antecedem na equação (3.24), isto é,* $(bA - B)$ *e* $(iA \cap bB)$ *e o subconjunto* $(iA - B)$ *da equação (3.23). Portanto, o grupo* $(bA \cap bB)^*$ *representa os pontos que "faltam" para compor a fronteira de* $(A - B)$*, garantindo que o conjunto resultante da operação diferença seja fechado. Daí podemos reescrever a equação (3.24) como:*

$$b(A - B) = (bA - B) \cup (iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)^* \tag{3.25}$$

Das equações (3.22), (3.23) e (3.25), chegamos a relação final da diferença fechada entre dois conjuntos:

$$k(A - B) = (iA - B) \cup (bA - B) \cup (iA \cap bB) \cup (bA \cap bB)^* \tag{3.26}$$

Rearrumando-se a equação (3.26) chegamos a expressão da diferenaça fechada entre os conjuntos A *e* B *expressa pela equação (3.20), concluindo a prova.*

A equação (3.20) representa a operação booleana fechada $A \ominus B$, expressa em função das operações booleanas ordinárias e as relações de fronteira, interior e complemento dos conjuntos A e B pertencentes a *NM-Classe*.

3.1.3.2 A diferença fechada para $B \ominus A$

Dados os mesmos dois conjuntos A e B, ambos fechados, a operação booleana de diferença fechada entre ambos pode ser definida por:

$$B \ominus A = k(B - A) \tag{3.27}$$

A expansão da equação (3.27), pode ser realizada à semelhança do procedimento feito para a expansão da equação (3.20), permutando-se os conjuntos A e B. Assim, temos que $i(B - A)$ pode ser expressa por:

$$i(B - A) = iB - A \tag{3.28}$$

e a relação $b(B-A)$ por:

$$b(B-A) = (bB - A) \cup (iB \cap bA) \cup (bB \cap bA)^* \tag{3.29}$$

O termo $(bB \cap bA)^*$ representa as fronteiras comuns de ambos os conjuntos, mas que são adjacentes aos termos $iB - A$, $(bB - A)$ e $(iB \cap bA)$. Desta forma a expressão $B \ominus A$ pode ser organizada como:

$$B \ominus A = (iB - A) \cup (bB - A) \cup (iB \cap bA) \cup (bA \cap bB)^* \tag{3.30}$$

Pelos motivos já mencionados na seção anterior, a parcela $(bB \cap bA)^*$ recupera a fronteira do conjunto formado pela aplicação da operação diferença em dois conjuntos primitivos, garantindo que o resultado seja um conjunto fechado.

3.1.4 Resumo da formulação dos operadores booleanos

As equações (3.2), (3.9),(3.21) e (3.30) nos permitem identificar oito subconjuntos de pontos básicos para determinar qualquer combinação booleana fechada. Esses oito subconjuntos são agrupados na Tabela 3.1. Atribuímos a cada grupo um identificador (ID) para facilitar referências posteriores.

Grupo			*ID*
iA	$\cap$	iB	1
iA	–	B	2
iB	–	A	3
bA	$\cap$	iB	4
bB	$\cap$	iA	5
bA	–	B	6
bB	–	A	7
bA	$\cap$	bB	8
(bA	$\cap$	bB)*	8*

Tabela 3.1: Subconjuntos básicos para combinações booleanas fechadas

O grupo $(bA \cap bB)^*$ é um subconjunto do grupo $(bA \cap bB)$. Este grupo representa somente as entidades de fronteira comuns a A e a B e adjacentes às entidades identificadas pelas equações (3.21) e (3.30). O resultado mais importante desta nossa abordagem é que

as operações booleanas fechadas entre dois objetos A e B fechados podem ser expressas como combinações das operações booleanas ordinárias e relações entre interior, fronteira e complemento de A e B.

Note-se que esta formulação dos operadores booleanos fechados leva em consideração somente as características dos objetos processados, e não suas representações. Isto torna a descrição dos operadores relativamente independente da sua implementação, com isto, o algoritmo pode ser implementado para diferentes esquemas de representação.

A aplicação dos operadores fechados sobre uma classe de objetos fechados requer a concepção de um algoritmo que seja capaz basicamente de processar as seguintes informações:

1. identificação os subconjuntos que formam a fronteira, o interior e o complemento de cada objeto,
2. estabelecimento das relações entre os subconjuntos de ambos os objetos, afim de identificar os grupos da Tabela 3.1, e
3. o agrupamento destes subconjuntos de entidades para a composição do resultado de qulaquer operação booleana fechada.

A identificação dos pontos de fronteira, interior e complemento de um conjunto é viabilizada através da classificação da vizinhança dos pontos do conjunto. A vizinhança é um conceito relativo, pois, leva em consideração o espaço ambiente (ou espaço de imersão[2]) do conjunto. Por exemplo, um ponto sobre uma reta tem como vizinhança um intervalo aberto nesta reta; enquanto se o considerarmos sobre um plano a vizinhança será um disco aberto de raio positivo centrado no ponto.

A correlação das informações sobre as vizinhanças dos pontos de dois conjuntos permite a identificação dos grupos da Tabela 3.1 e, por conseqüência, a determinação das operações de interseção, união e diferença fechadas entre ambos os conjuntos fica condicionada apenas a seleção conveniente dos grupos que as compõem. Este processo é denominado classificação de pertinência de pontos. A classificação de pertinência de pontos de um conjunto em relação a outro conjunto, quando as dimensões destes conjuntos são diferentes, exige uma uniformização na dimensão do espaço, já que as relações de fronteira, interior e complemento de um conjunto mudam com a dimensão do espaço de imersão.

Diante destes argumentos, lançamos a proposta de uma função de classificação de pertinência de pontos apoiada sobre um espaço de imersão mínimo. O espaço de imersão mínimo

[2]tradução de *embedding space*

tem como finalidade propiciar consistência nos resultados da classificação de pertinência de pontos para objetos com diferentes dimensões.

3.2 Espaço de imersão mínimo

A noção de espaço de imersão é tomada pela relação do espaço topológico e o conceito de bola topológica aberta, os quais vamos introduzir a seguir. Um espaço topológico é um par (W, τ), sendo W um conjunto, τ uma classe de subconjuntos abertos de W denominada topologia de (W, τ), que satisfazem as seguintes condições:

1. A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é aberto.
2. A interseção de quaisquer dois, ou de qualquer número finito de conjuntos, abertos resultante em um cojunto aberto.
3. O conjunto vazio $\emptyset$ é aberto.
4. O conjunto universo W é aberto.

Entendemos como uma bola topológica aberta $\mathcal{B}^n(p)$ "centrada" em um ponto p de um conjunto qualquer como um conjunto de pontos no espaço n-dimensional topologicamente equivalente a uma bola aberta $B^n(p; R)$. Uma bola aberta centrada em p e com raio R positivo, no espaço (W, τ) é definida por:

$$\mathcal{B}^n(p; R) = \{x| \ \ |x| < R, \ \ x \in W\} \tag{3.31}$$

x representa o conjunto dos pontos de $\mathcal{B}(p; R)$ e n a dimensão do espaço considerado, no caso a dminesão de W. Considerando que nosso interesse recai sobre o espaço euclidiano n-dimensional, com n limitado à dimensão três, vamos considerar daqui para frente que $W = \Re^n$, com $n = 1, 2,$ ou 3.

A vizinhança de um ponto p em relação a um conjunto C do espaço topológico (W, τ), denotada por $N(p, C)$, é definida por [30]:

$$N(p, C) = \mathcal{B}^n(p) \cap C \tag{3.32}$$

O termo $\mathcal{B}(p) \cap C$ representa os pontos de C cuja distância para p é menor do R. Da definição de vizinhança podemos escrever as seguintes propriedades para fronteira, interior e complemento de um conjunto em relação a um espaço W:

- **completa**, se $N(p, C) = \mathcal{B}^n(p)$, ou seja, se p pertence ao interior de C.
- **nula**, se $N(p, C) = \emptyset$, ou seja, se p pertence ao complemento de C.
- **parcial**, se $N(p, C) \neq \mathcal{B}^n(p)$ e $N(p, C) \neq \emptyset$, ou seja, se p pertence à fronteira de C.

A Figura 3.2 ilustra as vizinhanças de alguns pontos de um conjunto C_f. No caso, C_f representa uma superfície com bordas, e a análise da vizinhança dos pontos em relação ao espaço $W = \Re^2$ determina os subconjuntos de fronteira, interior e complemento de C_f.

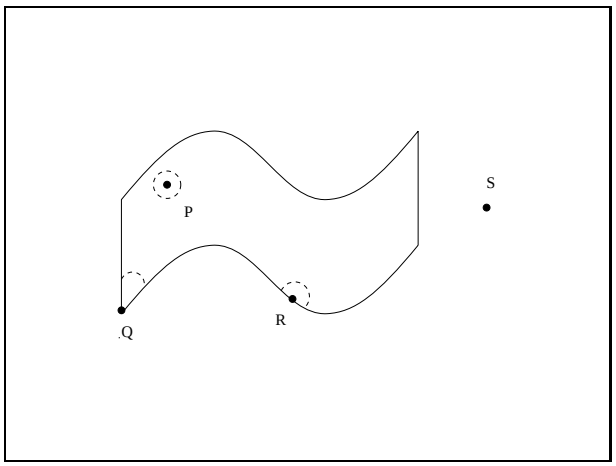

Figura 3.2: Vizinhança completa (P), parcial (Q e R) e nula (S) em relação a uma superfície

Dado um conjunto A no espaço W, $A \subset W$, chamamos W de espaço de imersão de A. Dado um subespaço W' de W, para o qual existe uma bola aberta $\mathcal{B}^m(p)$, se em W':

$$\exists N(p, A) = \mathcal{B}^m(p)$$

e m é o menor valor inteiro que satisfaz a relação acima. Denominamos W' de **espaço de imersão mínimo** do conjunto A.

A Figura 3.3 mostra vários objetos e seus respectivos espaços de imersão mínimos. Os objetos mais escuros representam sólidos, enquanto os pontilhados representam faces.De

maneira geral, os pontos interiores a uma curva, a uma superfície e a um sólido são topologicamente equivalentes a um intervalo aberto, um disco aberto ou a uma esfera aberta, respectivamente. Como a vizinhança completa é tomada em relação aos pontos interiores, os espaços de imersão mínimos para curvas, superfícies, e sólidos são a reta real, o plano $\Re^2$, e o espaço tridimensional $\Re^3$, respectivamente.

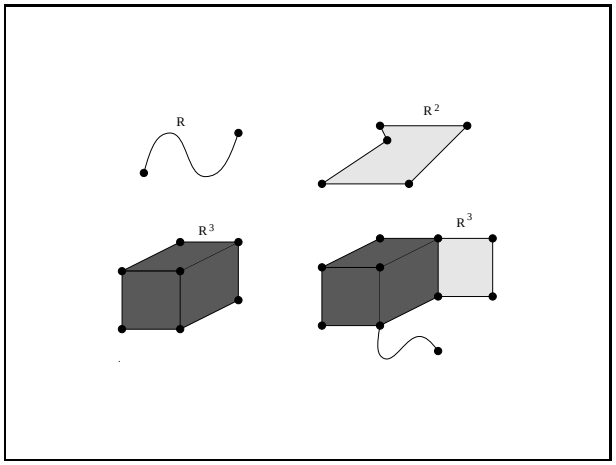

Figura 3.3: Espaços de imersão mínimos para objetos compostos por arestas, faces e sólidos

As noções de fronteira, interior e complemento de um conjunto qualquer dependem da dimensão do espaço de imersão, e isto é muito relevante na nossa proposta, pois as classificações de pertinências serão tomadas localmente em relação a cada objeto. O processamento local em representações *B-REP*é essencial, pois, pode-se fazer uso do paradigma dividir-e-conquistar e com isso, operações como interseções geométricas são realizadas apenas entre vértices, arestas e faces diretamente, e os resultados utilizados para inferir interseções para entidades sólidas.

Como a identificação do espaço mínimo viabiliza explorar propriedades locais dos conjuntos, o processo de filtragem topológica utilizado para a eliminação de entidades redundantes dos objetos resultantes das operações booleanas é bastante facilitado quando identificamos o espaço mínimo do objeto. O espaço mínimo pode ser considerado para subconjuntos de entidades de um objeto A qualquer, e guarda as propriedades relacionadas acima.

Para dois conjuntos A e B e os espaços W_A, W_B, com $A \subset W_A$, $B \subset W_B$, os grupos da Tabela 3.1 são determináveis a partir da classificação da vizinhança dos pontos de cada conjunto e a correlação destas informações. No entanto, como os componentes dos conjun-

tos A e B são heterogêneos quanto a dimensão é necessário determinar o espaço de imersão mínimo comum a A e B. Sobre este "novo" espaço serão determinados os subconjuntos que compõem a fronteira, interior e complemento de ambos os conjuntos e então, proceder a classificação de pertinência dos pontos de cada conjunto em relação ao outro conjunto, tomando como referência o espaço de imersão mínimo de ambos os conjuntos. Esta classificação de pertinência determina os grupos indicados na Tabela 3.1.

3.2.1 Espaço de imersão mínimo comum

Ao considerarmos dois ou mais conjunto podemos determinar consistentemente a vizinhança dos pontos em relação a estes conjuntos desde que sejam atribuídos aos pontos destes o mesmo espaço de imersão. A Figura 3.4 ilustra a classificação de vizinhança dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 em relação a dois conjuntos C_1 e C_2, considerando que o espaço de imersão comum aos dois seja $\mathcal{B}^2(p)$, $\forall p \in C_1, C_2$.

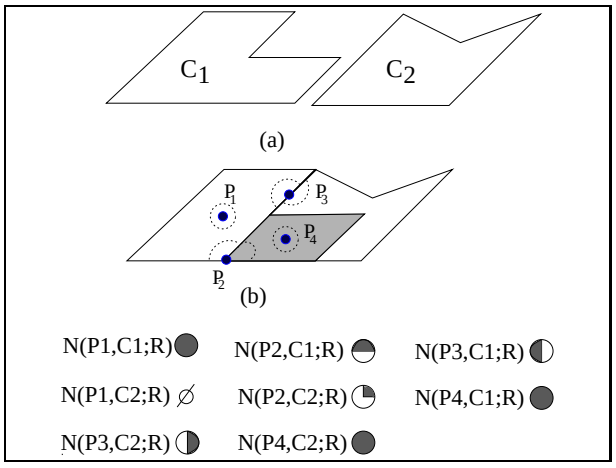

Figura 3.4: Classificação de vizinhança dos pontos em relação a dois complexos celulares.

Quando as vizinhanças de um ponto p em relação a dois complexos celulares tiverem espaços de imersão (locais) distintos, precisa-se "normalizar" esses espaços de tal forma que as classificações de vizinhança de p em relação a ambos os complexos sejam consistentes. Normalizamos esses espaços com a menor bola topológica $\mathcal{B}^\mu(p)$ que cubra a união das vizinhanças de p. Esta bola é denominada **espaço de imersão mínimo comum**. Veremos a seguir que essa normalização pode ser feita com base na classificação de vizinhança dos pontos em relação a cada complexo ao qual eles fazem parte individualmente.

Consideremos duas células A e B de dimensão até dois (vértices, arestas ou faces), cujos pontos foram devidamente classificados em relação a dois complexos celulares, C_A e C_B, aos quais elas fazem parte. Se essas duas células se interceptam em um ponto p, distinguem-se basicamente três situações quanto à relação de pertinência entre as vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ classificadas, respectivamente, conforme os espaços de imersão $\mathcal{B}^k(p)$ e $\mathcal{B}^l(p)$:

1. A vizinhança $N(p, C_A)$ está contida em $N(p, C_B)$, ou vice-versa: Considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum $\max\{k, l\}$. As Figuras 3.5.(a,b) mostram duas células que se sobrepõem. Na Figura 3.5.(a) são apresentadas duas curvas cujos pontos p são classificados na base de $\mathcal{B}^1(p)$; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 1. Enquanto na Figura 3.5.(b) os pontos p das células são classificadas com base em $\mathcal{B}^1(p)$; porisso, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2. Na Fig 3.5.(c) um segmento (cujos pontos p tem como o espaço de imersão mínimo $\mathcal{B}^1(p)$) intercepta com o bordo de um polígono (cujos pontos p classificados de acordo com o espaço de imersão $\mathcal{B}^2(p)$); então, o espaço de imersão mínimo comum a duas células é 2. Finalmente, na Figura 3.5.(d) uma curva intercepta com o interior de um polígono; segue-se que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2.

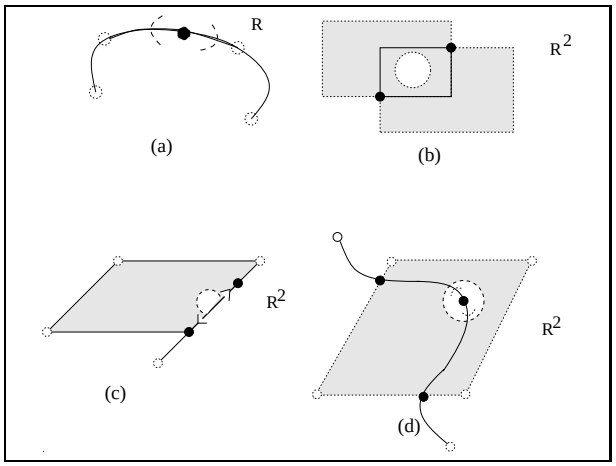

Figura 3.5: Espaços de imersão mínimo para vizinhanças sobrepostas.

2. As vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ são parciais e disjuntas: Considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum a dimensão da menor bola topológica $\mathcal{B}^j(p)$ que inclui tanto os pontos de $N(p, C_A)$ quanto os pontos de $N(p, C_B)$. Em

modelagens restritas a $\Re^3$, pode-se mostrar que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é sempre $\max\{k, l\}$. A Figura 3.6(a) ilustra a interseção de uma curva e um polígono num ponto p. Em relação ao polígono, este ponto tem como espaço de imersão mínimo $\mathcal{B}^2(p)$; e em relação à curva, o espaço $\mathcal{B}^1(p)$; então, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2. Caso dois polígonos se interceptam num segmento (Figura 3.6.(b)), este segmento tem vizinhanças homeomorfas a "semi-discos"; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo é também 2. Na Figura 3.6.(c) é apresentado o caso de interseção de duas curvas num ponto extremo p, cujo espaç de imersão mínimo é $\mathcal{B}^1(p)$; segue-se que o espaço de imersão mínimo comum é 1.

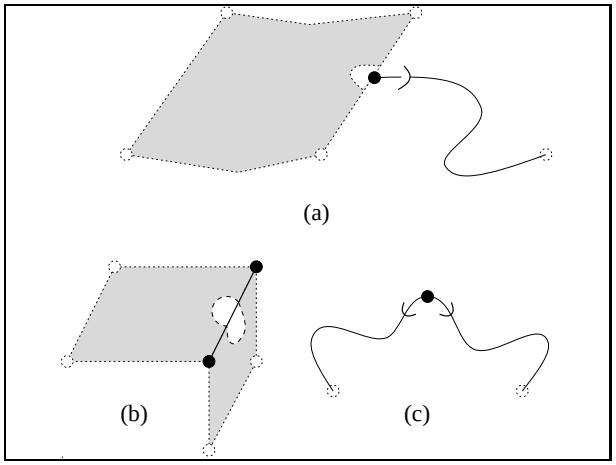

Figura 3.6: Espaços de imersão mínimo para pontos com vizinhanças parciais.

3. As vizinhanças $N(p, C_A)$ e $N(p, C_B)$ são disjuntas e uma delas é completa: Como no caso anterior, considera-se como a dimensão do espaço de imersão mínimo comum a dimensão da menor bola topológica $\mathcal{B}^j(p)$ que inclui tanto os pontos de $N(p, C_A)$ quanto os pontos de $N(p, C_B)$. Em modelagens restritas a $\Re^3$, pode-se mostrar que a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é sempre $(\max\{k, l\} + 1)$. A Figura 3.7(a) apresenta a interseção de uma curva e um polígono num ponto p. Em relação ao polígono este ponto é classificado com base em $\mathcal{B}^2(p)$ e em relação à curva, $\mathcal{B}^1(p)$; então, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 3. Caso dois polígonos se interceptam num segmento (Figura 3.7.(b)), os pontos deste segmento são ambos classificados em relação a uma bola topológica bidimensional; assim, a dimensão do espaço de imersão mínimo é também 3. Na Figura 3.7.(c) temos a interseção de duas curvas num ponto, cujas vizinhanças são classificadas de acordo com a bola topológica

unidimensional; portanto, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é 2.

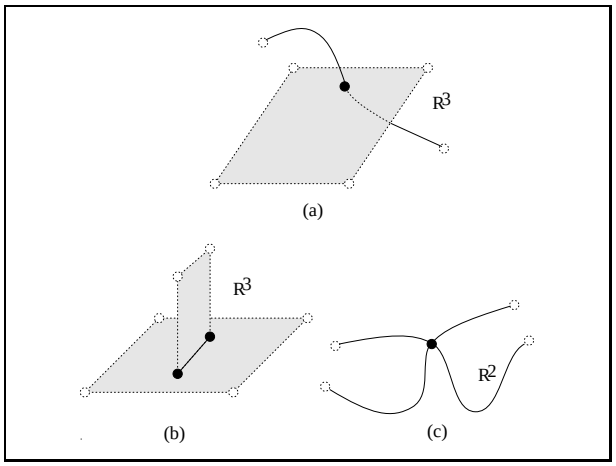

Figura 3.7: Espaços de imersão mínimo para vizinhanças disjuntas, sendo uma delas completa.

Ressaltamos aqui que, por questão de consistência, ao alterarmos o espaço de imersão dos pontos de uma célula, precisamos reclassificar todas as células vizinhas recursivamente até que não haja ambiguidade na distinção entre os pontos de fronteira e os pontos do interior para o operador fecho.

Ressaltamos aqui que, por questão de consistência, ao alterarmos o espaço de imersão de um conjunto, precisamos reclassificar todos os seus subconjuntos recursivamente até que não exista ambigüidade na distinção entre os pontos de fronteira e os pontos do interior para o operador fecho. Por exemplo, dado um conjunto composto por uma face e um conjunto de aresta, seu espaço de imersão mínimo é o $\Re^2$. A classificação de vizinhança identifica que a face é o interior do conjunto, pois possui vizinhança completa, e as arestas e vértice compõem a sua fronteira, Figura 3.8.(a).

Caso o conjunto seja imerso no espaço $\Re^3$ é necessário que faça-se uma reclassificação das vizinhanças, pois estes resultados influenciam diretamente na classificação de pertinência.

3.3 Função de classificação de pertinência

Sejam dois conjuntos A e B. A função de classificação de pertinência, denotada por $\mathcal{FCPC}$, tem como finalidade identificar as relações entre os pontos de fronteira, interior e

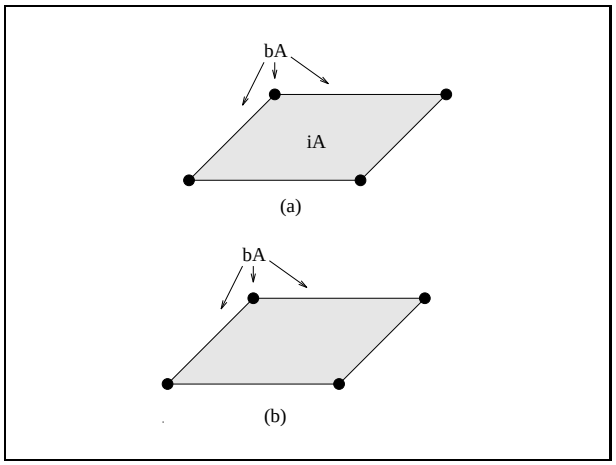

Figura 3.8: Relações de fronteira e interior para um conjunto em relação aos espaços de imersão $\Re^2$ e $\Re^3$

complemento destes conjuntos. Este processo engloba duas etapas definidas como:

1. a classificação das vizinhanças dos pontos de A e B: as vizinhanças dos pontos dos conjuntos A e B são analisados em relação a um espaço de imersão comum, e como resultado são identificados os subconjuntos iA, bA, $\bar{A}$, iB, bB e $\bar{B}$. As Figuras 3.9.(b-c) ilustram a classificação de vizinhanças para uma face e uma aresta em relação ao espaço mínimo comum $\Re^2$. A dimensão 2 é devido a vizinhança completa em relação aos pontos comuns.
2. a correlação das informações das vizinhanças dos pontos: as vizinhanças de cada ponto são comparadas para a extração da informação sobre a pertinência dos pontos de um conjunto em relação ao outro. Desta forma, os conjuntos A e B devem ser particionados de acordo com a Tabela 3.1. A Figuras 3.9.(d) ilustra a classificação de pertinência para uma face e uma aresta em relação ao espaço mínimo comum $\Re^2$, através da análise das vizinhanças obtidas no item anterior.

Uma análise rápida dos tipos de pontos existentes em cada grupo de subconjuntos listados na Tabela 3.1 nos leva a concluir que a partição, em termos do tipo de vizinhança, deve ser feita de acordo com os seguintes critérios:

- grupo 1: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a A e em relação a B, ou seja, interior de A comum ao interior de B. A Figura 3.10.(b) mostra um

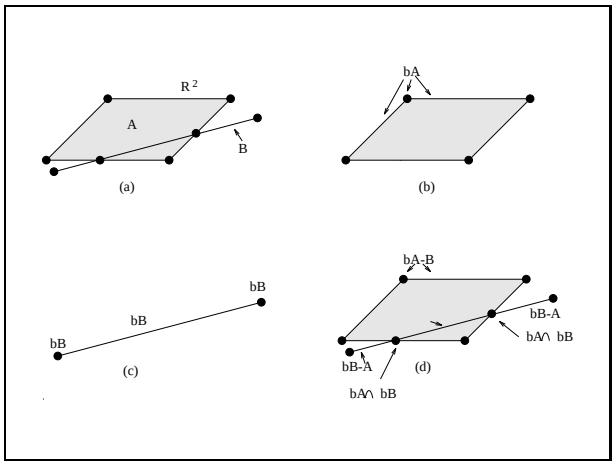

Figura 3.9: Classificação de vizinhanças para conjuntos em relação ao espaço de imersão mínimo comum $\Re^2$

exemplo para a interseção entre duas faces em relação ao espaço de imersão comum $\Re^2$.

- grupo 2: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a A e a vizinhança nula em relação a B. Exemplo na Figura 3.10.(c).
- grupo 3: os pontos que tenham a vizinhança completa em relação a B e a vizinhança nula em relação a A. Exemplo na Figura 3.10.(d).
- grupo 4: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança completa em relação a B. Exemplo na Figura 3.10.(e).
- grupo 5: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a B e a vizinhança completa em relação a A. Exemplo na Figura 3.10.(f).
- grupo 6: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança nula em relação a B. Exemplo na Figura 3.10.(g).
- grupo 7: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a B e a vizinhança nula em relação a A. Exemplo na Figura 3.10.(h).
- grupo 8: os pontos que tenham a vizinhança parcial em relação a A e a vizinhança parcial em relação a B. Exemplo na Figura 3.10.(i).

O grupo $(bA \cap bB)^*$ é definido em função dos grupos 2, 5 e 6 para a operação $(A \ominus B)$, e dos grupos 3, 4 e 7 para a operação $(B \ominus A)$. Desta maneira, podemos considerar que,

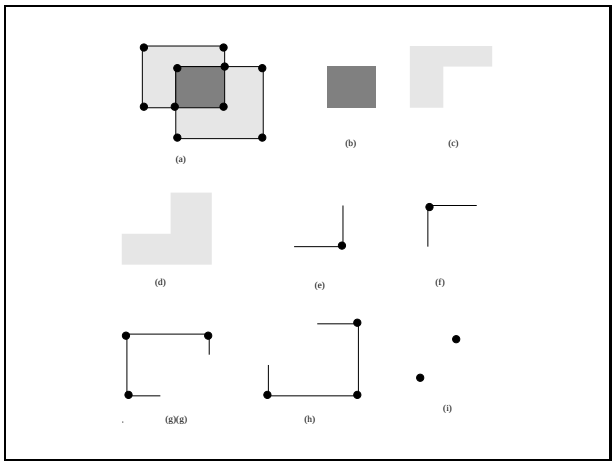

Figura 3.10: Subconjuntos de classificação de pertinência

tendo esses 8 grupos identificados, gera-se qualquer combinação booleana entre A e B. Se a operação for diferença fechada, basta aplicar o operador fecho sobre os grupos 2, 5 e 6 para obter $(bA \cap bB)^*$, ou sobre os grupos 3, 4 e 7 para a operação $(B \ominus A)$, como refinamento de $(bA \cap bB)$. A Figura 3.11 exibe um exemplo que esclarece esta situação.

Exemplo 1 *Dados os objetos A e B em projeção ortográfica, Figura 3.11, destacando o refinamento do grupo 8 de entidades fundamentais, que passa a ser referenciado como grupo 8^* (vértices da Figura 3.11.(e)).*

Exemplo 2 *A Figura 3.12 exemplifica a identificação dos subconjuntos de fronteira, interior, e complemento que resultam da interseção entre uma superfície e uma curva, bem como as relações entre estes subconjuntos que determinam os grupos listados na Tabela 3.1.*

Neste exemplo, os espaços mínimos da curva e da superfície são $\Re$ e $\Re^2$. A relação entre os pontos de vizinhanças completas determina o espaço de imersão mínimo $W = \Re^2$, para a classificação de pertinência dos pontos de classificação, pois, a vizinhança completa para a curva é um intervalo aberto contido em um disco aberto que representa a vizinhança completa da superfície. De acordo com os critérios de classificação apresentados anteriormente são determinados os grupos da Tabela 3.1.

No Capítulo seguinte apresentamos um algoritmo para a classificação de pertinência da objetos da *NM-Classe* modelados através de complexos celulares. Mostraremos como viabilizar um processo para o mapeamento dos conceitos de vizinhança e pertinência para

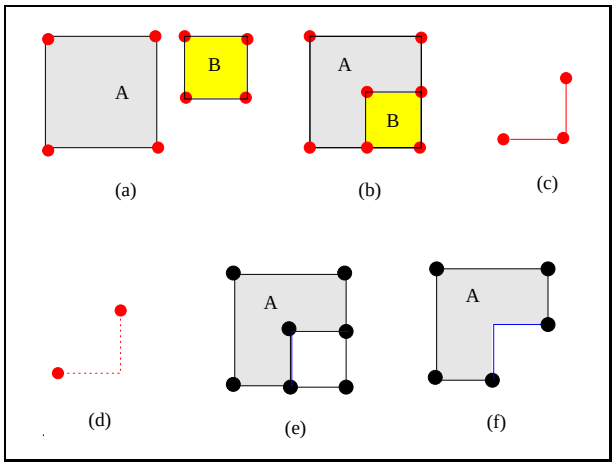

Figura 3.11: Operação booleana de diferença: (a) objeto A (Face A) e objeto B (Face B), (b) posicionamento, (c) entidades do grupo 8, (d) entidades do grupo 8^*, (e) resultado para $A \ominus B$ (errôneo), e (f) resultado para $A \ominus B$ (correto)

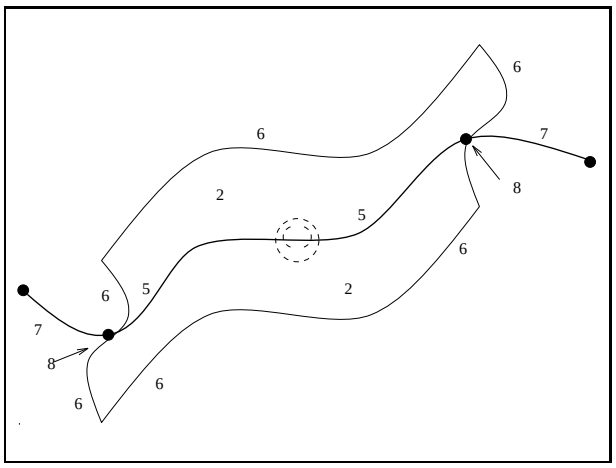

Figura 3.12: Identificação dos grupos gerados pela classificação de pertinência

estes modelos, já que a aplicação destes conceitos para implementações não se dá de forma direta [30].

Capítulo 4

Algoritmo de Operação Booleana Fechada para uma Representação da *NM-Classe*

O inconsciente me assombra e eu nele rolo
com a eólica fúria do harmatã inquieto
("Agonia de um Filósofo" - Augusto dos Anjos)

No Capítulo anterior apresentamos a formulação de um conjunto de operadores booleanos fechados, que garantem a propriedade de fechamento para conjuntos fechados, sem nos preocuparmos com um domínio de representação em particular, nem com detalhes implementacionais. No corrente Capítulo propomos um algoritmo para os operadores booleanos fechados aplicados a uma classe de objetos específica, a *NM-Classe*. Esta classe engloba objetos formados por conjuntos limitados e fechados em relação ao espaço de imersão $W \subseteq \Re^3$.

Os modelos dos objetos da *NM-Classe* são descritos através do conceito de complexos celulares, já que os complexos celulares são conjuntos fechados[21] e atendem a condição dos operadores booleanos fechados que exige que os objetos primitivos sejam fechados. A representação computacional dos modelos fica a cargo de uma estrutura de dados com uma interface funcional para manipulação das entidades topológicas. Wu [37] propôs uma estrutura de dados com uma interface funcional para representar computacionalmente os complexos celulares. Esta estrutura é denominada Modelo de Dados Topológicos (*Topological Data Model*) ou simplesmente TDM. Como esta estrutura de dados foi utilizada para a implementação dos operadores booleanos fechados, faremos uma breve descrição de suas funcionalidades na seção 4.2.

No processo de operação booleana, é necessário que se processe as interseções entre os objetos. Como resultado das interseções entre dois objetos A e B, são identificadas as

partes comuns dos objetos. Na maioria dos algoritmos de operações booleanas para representações *B-REP*, utiliza-se somente algoritmos que processam interseções entre pontos, curvas e superfícies e as interseções de objetos sólidos são determinadas implicitamente a partir da informações daquelas entidades, já que algoritmos para interseções de sólidos diretamente não são viáveis. Nossa proposta, também, baseia-se na divisão do problema em etapas distintas para chegarmos a uma solução do problema como um todo, desta forma, poderemos utilizar algoritmos já desenvolvidos, principalmente na implementação de algoritmos de interseção geométrica que veremos no Capítulo 5 e, também aproveitar as propriedades dos complexos celulares para a classificação de pertinência através do paradigma dividir-e-conquistar.

Já que os complexos celulares são formados por conjuntos mais simples, sugerimos um algoritmo de operação booleana que baseia-se na operacionalização da classificação de pertinência localmente nos modelos. Desta forma, o conceito de espaço de imersão mínimo será vital para esta abordagem, pois, a consistência das informações sobre a classificação de pertinência será conseguida através dele. Este Capítulo será iniciado com uma descrição dos complexos celulares, passando em seguida para uma apresentação do TDM e o restante do espaço será dedicado a apresentação de um algoritmo de operação booleana fechada para os complexos celulares.

4.1 Modelagem da *NM-Classe* através de complexos celulares

Wu [35] lançou uma proposta para a modelagem da *NM-Classe* utilizando o conceito de complexos celulares. Os complexos são formados por coleções de conjuntos n-dimensionais, abertos, disjuntos e conexos denominados células. As células são os elementos básicos sobre os quais está baseado o esquema de representação TDM, mas, cada célula no TDM está estritamente relacionado a um complexo por um conjunto de condições que determinam a existência dos complexos. Restringimos a nossa discussão para complexos celulares que sejam subconjuntos do espaço euclidiano tridimensional, desta forma, o espaço de imersão $\Re^n$ e consequentemente as células-n terão dimensões $n = 0, 1, 2$ e 3.

A modelagem de um objeto através da decomposição celular subdivide o objeto em subconjuntos (células) mais simples e inter-relacionados, facilitando a obtenção de informação acerca da geometria e topologia deste objeto a partir do paradigma dividir-e-conquistar [31]. Nesta seção introduziremos os conceitos acerca dos complexos celulares.

4.1.1 Célula n-dimensional

Uma célula n-dimensional, ou simplesmente uma célula-n, é um subconjunto do espaço $\Re^n$ homeomorfo a uma bola aberta n-dimensional definida como: $\mathcal{B}(p, R) = \{x \mid |x| < R, x \subseteq \Re^n\}$. x representa o conjunto dos pontos de uma bola n-dimensional aberta de raio R centrada em p [11].

Uma célula-n denotada por e, tem dimensão representada por *dim(e)=n* e o seu fecho, denotado por *k(e)*, é um espaço formado pela célula e e suas fronteiras, formadas pela união de células de dimensões menores do que n. A Figura 4.1 ilustra exemplos de células de dimensões $0, 1, 2$ e 3.

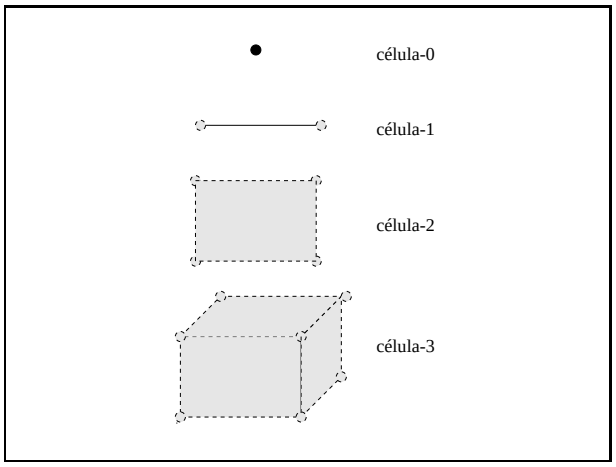

Figura 4.1: Exemplos de células-n: para $n = 0, 1, 2$ e 3

Na literatura de modelagem geométrica, as células-0, células-1, células-2 e células-3 são denominadas vértice, aresta, face e sólido, repectivamente. As células-0, células-1, células-2 e células-3 serão referenciadas neste texto como entidades topológicas fundamentais, ou simplesmente entidades fundamentais. As células-3 juntamente com as entidades fundamentais compõem o que chamamos entidades topológicas de um objeto[1].

A cada célula podemos vincular um espaço no qual esteja imersa. Por exeplo, célula-2 está definida no espaço $\Re^2$ e caso seja considerado um espaço com dimensão maior do que 2 seu interior se torna fronteira. Este argumento influencia fortemente a concepção do nosso algoritmo para operadores booleanos, pois como vimos na seção 3.2, a determinação das relações de interior, fronteira e complemento entre dois objetos leva em consideração o

[1]Outras entidades topológicas serão apresentadas no decorrer deste trabalho

espaço ambiente sobre o qual estão imersos. Pela definição de célula-n, o menor espaço que pode envolvê-la completamente seria o espaço $W = \Re^n$.

4.1.2 Complexos celulares

Um complexo celular [11] C é uma coleção (finita) de células e_λ, com $\lambda \in \Lambda$, tal que sejam satisfeitas as seguintes condições:

(1): $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$

(2): Se $\dim(e_\lambda)$=$n+1$ ($\lambda \in \Lambda$), então $(k(e_\lambda) - e_\lambda) \subset C^n$
sendo $C^n = \bigcup_{\mu \in \Lambda} e_\mu$ e $\dim(e_\mu) \leq n$

(3): $e_i \cap e_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$

A condição (1) expressa que um complexo celular C é formado por uma coleção finita de células e_λ, tal que a união de todas as suas células e_λ representa o todo. Pela condição (2), se em um complexo celular existe uma célula de dimensão $n+1$, as células de suas fronteiras tem dimensões inferiores e/ou iguais a n. Desta forma, um complexo celular pode ser visto como um coleção de células, no qual cada célula é recursivamente limitada por células de dimensões inferiores a sua. De acordo com a condição (3), em um complexo celular as células são mutuamente disjuntas. A Figura 4.2 ilustra alguns complexos celulares.

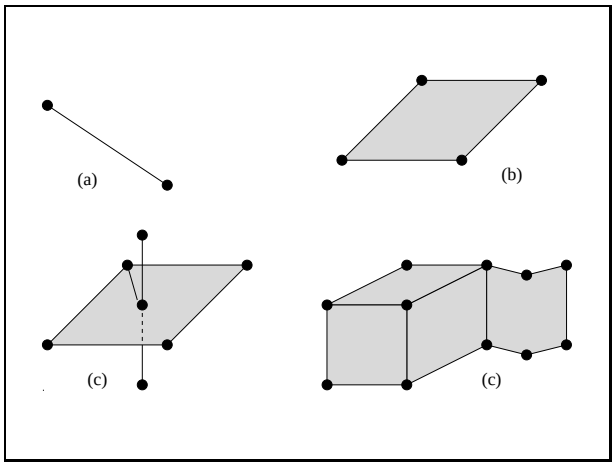

Figura 4.2: Complexos celulares

Nem sempre partições de um espaço indicam a formação de um complexo celular, Figura 4.3.

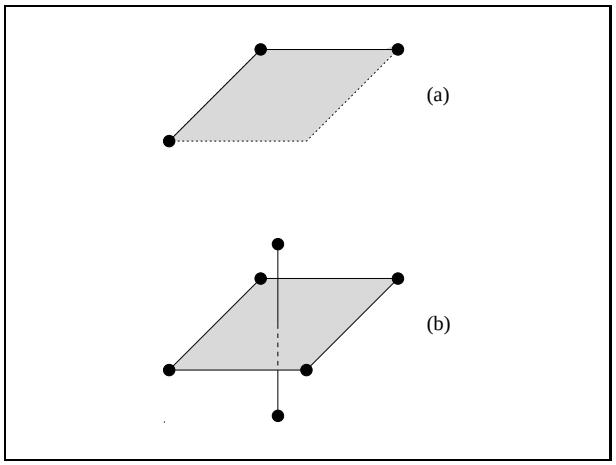

Figura 4.3: Decomposição celular que não formam complexos, pois viola: (a) a condição (2) e (b) a condição (3)

Na Figura 4.3.(a), a decomposição do complexo em célula-2, célula-1 e célula-0 viola a condição (2) dos complexos celulares, pois, a fronteira da célula-2 não é fechada. Já o item (b) a interseção entre as células-1 e célula-2 é um conjunto não vazio, violando a condição (3) para a formação de complexos celulares.

A decomposição de um conjunto em células no complexo celular, de modo que as células sejam hierarquicamente organizadas de acordo com suas dimensões que variam entre 0 e n, captura a noção de dimensão do complexo e identifica os subconjuntos de entidades que compõem o interior, fronteira, e complemento deste conjunto.

A informação acerca do espaço de imersão mínimo pode ser diretamente derivada do conceito de dimensão do conjunto. Como a dimensão de um conjunto decomposto em células é identificada pela partição de máxima dimensão, a determinação do espaço de imersão mínimo para um complexo é trivial. Desta forma, as vizinhanças dos pontos de um complexo C, particionado em células com dimensões entre $0, ..., n$ em relação ao espaço de imersão $\Re^n$, são determinadas como segue:

- células de dimensão n pertencem ao interior de C.
- células de dimensão inferior a n pertencem a fronteira de C.

A classificação de pertinência entre dois complexos celulares é determinada pelo cruzamento das informações das vizinhanças de cada célula de um complexo em relação ao

outro[2]. Desta forma define-se facilmente os grupos da Tabela 3.1.

4.1.2.1 Subcomplexos celulares

Dado um complexo C, um subconjunto de células ε, e $C' = \cap_{e \in \varepsilon} e$. C' é um subcomplexo de C se ele atende as seguintes condições [11]:

- C' é um complexo formado por um conjunto células ε;
- C' é fechado;
- o fecho de qualquer célula pertence ao complexo C'.

A Figura 4.4 mostra um exemplo de subcomplexo formado por uma face extraído de um complexo composto por um conjunto de células-n, com $n = 0, ..., n$.

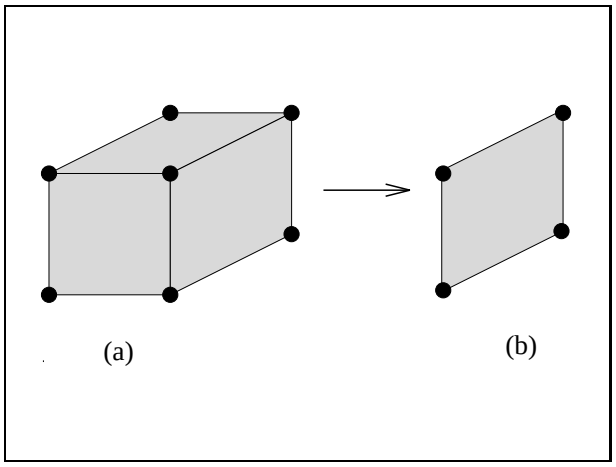

Figura 4.4: Subcomplexo (face e fronteiras) de um complexo (cubo e fronteiras)

O subcomplexo da Figura 4.4 preserva todas as condições impostas a um conjunto de células para a formação de um complexo celular. Para facilitar a nomenclatura e torná-la mais concisa utilizaremos o nome da entidade topológica antecedido pela palavra "subcomplexo" para designar o subcomplexo de menor dimensão relacionado a ela, a este conjunto denominamos subcomplexo minimal. Desta forma, uma face é uma célula-2, e um subcomplexo-face representa uma célula-2 e o conjunto de arestas e vértices que compõe sua

[2]Nas seções subsequentes será exposto um levantamento completo sobre classificação de vizinhança

fronteira, um subcomplexo-aresta representa um subcomplexo formado pela célula-1 (aresta) e limitada por duas células-0 e o subcomplexo-vértice é o caso trivial, pois é formado por uma célula-0 (vértice).

4.1.2.2 Propriedades dos complexos celulares

Os complexos celulares guardam algumas propriedades importantes para a modelagem geométrica e especificamente para a viabilização dos operadores booleanos fechados, das quais destacamos:

1. A dimensão de um complexo celular C é dada pela célula de maior dimensão do complexo [1];
2. Todo complexo celular C de dimensão n é fechado no $\Re^n$ [11];
3. Todas células de subcomplexo $C' \subseteq C$ pertencem ao complexo C. [11];
4. Ambos complexos e subcomplexos são fechados [11].

4.2 Um esquema de representação para complexos celulares

No intuito de preencher uma lacuna entre os resultados teóricos e soluções direcionadas em utilizar uma estrutura de dados que consiga mapear os modelos conceituais de objetos da *NM-Classe*, foi proposta por Wu [36] [37] uma estrutura de dados denominada Modelo de Dados Topológicos (**T***opological* **D***ata* **M***odule*) ou simplesmente TDM.

A principal característica desta estrutura de dados, que a difere das estruturas *radial edge* [34] e da *tri-cyclic cusp* [6], é a não adoção de entidades topológicas predominantes, ou seja, cada entidade topológica (ex. vértice, arestas, etc) tem a mesma importância dentro da estrutura. A estrutura *Selective Geometric Complex* [21], também baseada em complexos celulares, permite o processamento de conjuntos de células não-fechados através do mecanismo de ativação/desativação de atributos na lista de atributos de cada célula. Já no TDM, todos os modelos armazenados representam conjuntos fechados, pois pressupõe-se a garantia das condições para a formação de complexos celulares. Esta exigência do TDM está em acordo com a condição dos operadores booleanos fechados que garantem a propriedade de fechamento para objetos fechados.

4.2.1 Modelo de Dados Topológicos (TDM)

A grande vantagem do TDM em termos de funcionalidade é a incorporação em uma mesma arquitetura de uma estrutura de dados (*Double Winged Data Structure*) capaz de representar objetos da *NM-Classe* e um conjunto de operadores de Euler para manipular as entidades topológicas desta representação, de maneira a preservar a integridade do modelo através da preservação da consistência dos dados topológicos. Cada operador checa a validade da operação antes de realizá-la, afim de manter a consistência da informação topológica. Se uma ação de um operador viola esta consistência, nenhuma modificação ocorrerá e a operação não será concretizada.

Um esquema de representação para a *NM-Classe* pode ser considerado como um *B-REP* estendido, tendo como primitivas os vértices, as arestas, as faces e os sólidos. Além disso, é interessante sob o ponto de vista da manutenção da consistência topológica distinguir os seguintes subconjuntos de primitivas [38]:

- **componente**: conjunto de entidades topológicas com conectividade maximal.
- **cadeia**: sequência ordenada de arestas. Pode ser fechada.
- **laço** (*loop*): fronteira de uma face. Um laço pode consistir apenas de um vértice ou um conjunto de cadeias e está associado a uma única face.
- **casca** (*shell*): conjunto de faces conexas e orientadas coerentemente. Pode ser fechado.
- **cavidade**: contorno de um sólido. Uma cavidade consiste de um vértice, um conjunto de cadeias, um conjunto de shells ou a combinação dos dois últimos. Cada cavidade está associada a apenas um sólido.
- **ciclo topológico**: "orifício unidimensional". Um toro tem dois ciclos topológicos.
- **shell topológico**: "orifício bidimensional". Uma esfera com o interior vazio tem um shell topológico.

Estas primitivas se inter-relacionam formando uma estrutura hierarquicamente organizada como mostra a Figura 4.5. Nesta organização cada entidade possui um identificador. Os objetos são formados pela combinação destas entidades. Os vértices, arestas, faces e sólidos representam as entidades mais elementares. Os sólidos são delimitados por cavidades, as faces por sequências de arestas (laços) orientadas e finalmente os vértices são os extremos das arestas.

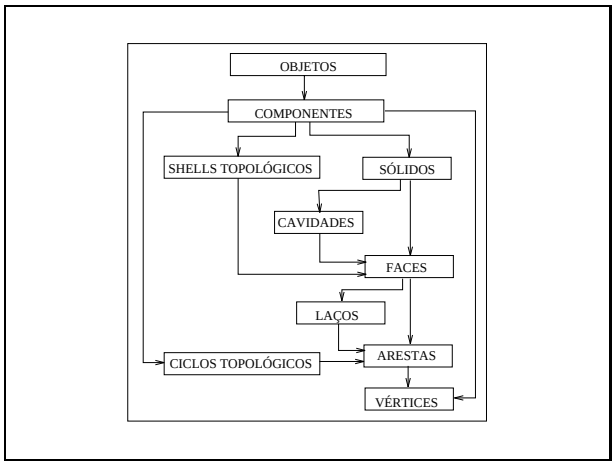

Figura 4.5: Modelo de Dados Topológicos (TDM)

As entidades básicas que compõem um objeto são as células, desta forma, as faces, arestas e os vértices de um objeto são células-2, células-1 e células-0, respectivamente. O módulo TDM funciona como uma espécie de estrutura de dados "ativa", pois além de armazenar as entidades topológicas e suas relações de adjacências, provê um conjunto de mecanismos para verificar e manter a consistência dos dados. A manipulação dos dados da estrutura é realizada de forma transparente ao usuário através de funções organizadas em três grupos: funções de construção, funções de destruição e funções de consulta. Para cada função de construção existe uma função dual de destruição que realiza a operação inversa. Estes grupos de operadores são chamados operadores topológicos.

4.2.2 Uma interface funcional para o TDM

Os operadores topológicos estão classificados em 03 (três) grandes grupos:

1. *Operadores de Construção*: Tem a função de inserção de entidades topológicas na estrutura de dados.
2. *Operadores de Destruição*: é a forma dual dos operadores de construção, ou seja, para cada operador de construção existe o operador de destruição equivalente com a finalidade de realizar a operação inversa.
3. *Operadores de Consulta*: Realiza consultas na estrutura de dados devolvendo informações acerca das entidades topológicas e suas relações dentro da estrutura.

operador	*funcionalidade*
TdVMakeVertexComponent	Adiciona uma nova componente a um objeto existente através da adição de um novo vértice.
TdVMakeVertexCavity	constrói uma nova cavidade a um objeto existente através da adição de um novo vértice.
TdEMakeEdgeVertex	Constrói uma nova aresta e um novo vértice a partir de um vértice já existente.
TdVMakeVertexLoop	Constrói um novo laço em uma face inserindo um novo vértice.
TdEMakeEdgeKillVertex	Constrói uma aresta fechada matando um dos vértices extremos
TdEMakeEdgeCycle	Constrói uma nova aresta e um novo ciclo topológico formado por uma seqüência de arestas.
TdFMakeFaceKillCycle	Constrói uma nova face destruindo um ciclo topológico existente.
TdFMakeFaceKillChain	Constrói uma nova face eliminando uma cadeia fechada que pertence à cavidade de um sólido.
TdFMakeFaceShell	Constrói um *shell* através da construção de uma nova face.
TdMakeSolidKillShell	Adiciona um sólido à estrutura eliminando um *shell* topológico existente.

Tabela 4.1: Operadores topológicos básicos de construção do módulo TDM

Cada um dos grupos possui um conjunto de operadores básicos e um conjunto de operadores complementares. Os operadores básicos formam um conjunto minimal que assegura a geração de qualquer estrutura topológica no espaço dentro de um domínio dos objetos da *NM-Classe* [36]. Apesar da suficiência destes operadores para a criação e manipulação de quaisquer entidades no domínio dos objetos da *NM-Classe*, eles não são eficientes para a manipulação de modelos, já que determinadas construções podem envolver longas seqüências de operadores básicos. A adição de operadores complementares procura suprir esta deficiência [37].

A Tabela 4.1 exibe a relação de operadores básicos de construção e no decorrer do texto alguns operadores básicos de destruição e complementares serão mostrados. A sintaxe destes operadores está sendo atualizada com a intenção de oferecer uma interface mais amigável ao programador e usuário [5].

A criação de uma entidade objeto no módulo TDM é estabelecida através do comando *TdOMakeObject(name, region)*, sendo *name* o identificador (ID) do objeto. O identificador servirá de base para qualquer operação neste objeto , e *região* indica onde o objeto será criado.

Apresentaremos na seqüencia exemplos do procedimento de construção de objetos da *NM-Classe*, previamente criado através da interface do TDM.

Exemplo 3 *Procedimento para a construção de uma aresta em um objeto híbrido, Figura 4.6, formando uma componente no objeto.*

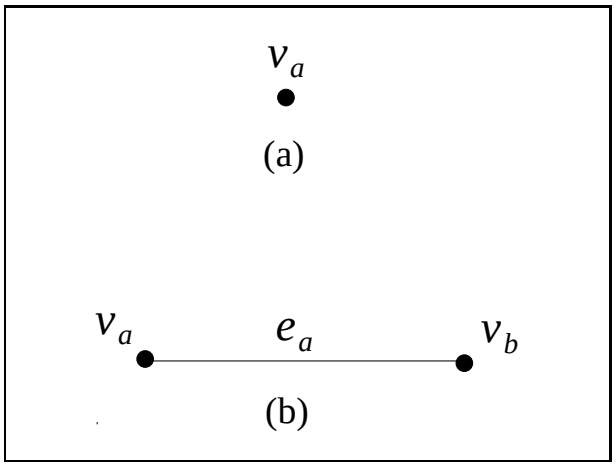

Figura 4.6: Aresta construída através da seqüência de operadores:
(a) TdVMakeVertexComponent, (b) TdEMakeVertexEdge

Exemplo 4 *Procedimento para a construção de uma face no mesmo objeto, Figura 4.7. Esta face é construída a partir de uma nova componente do objeto, ou seja, a aresta da Figura 4.6 não é adjacente a esta face.*

O objeto resultante destas operações pode ser visto na Figura 4.8.(a). Uma operação topológica complementar pode fundir as duas componentes (vértice v_a e aresta e_a) em uma nova componente construindo entre elas, por exemplo, uma nova aresta, Figura 4.8.(b).

Esta operação é realizada pelo operador *TdEMakeEdgeKillComponente(vert1, vert2, region, edge, chain)*, sendo que *vert1* e *vert2* são os vértices entre os vértices v_0 e v_b, respectivamente.

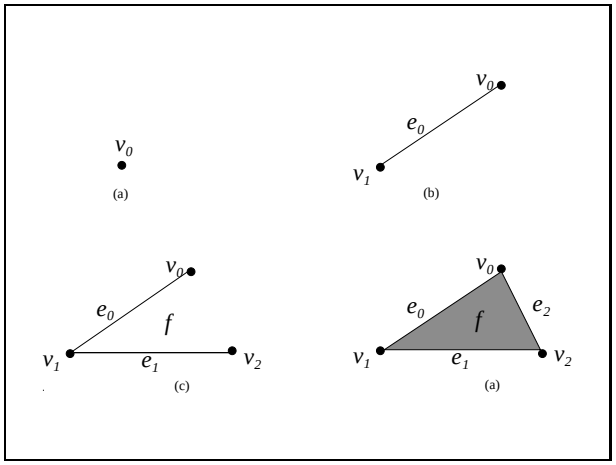

Figura 4.7: Face construída através da seqüência de operadores: (a) TdVMakeVertexComponent, (b) TdEMakeVertexEdge, (c) TdEMakeVertexEdge, e (d) TdEMakeEdgeFace

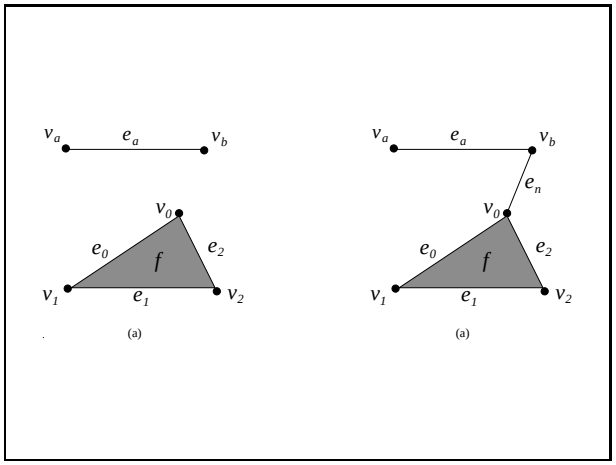

Figura 4.8: Objeto composto pela fusão de uma aresta-arame e uma face,utilizando o operador TdEMakeEdgeKillComponente

4.3 Funções básicas do algoritmo de operação booleana

Dados dois objetos A e B da *NM-Classe* modelados através de complexos celulares e representados através da estrutura TDM, o processo de operação booleana fechada entre eles compreende:

- a identificação dos grupos da Tabela 3.1 e
- a composição dos conjuntos identificados para a determinação das operações de interseção, união e diferença de acordo com as equações (3.2), (3.9), (3.21) e (3.30).

A identificação dos grupos de entidades é realizada com o auxílio da classificação de pertinência que identifica as relações entre partes (células) do conjunto A em relação ao conjunto B e vice-versa, ou seja, a interseção geométrica entre estas partes fornece os elementos comuns de ambos os conjuntos. Na prática, alguns algoritmos de interseção geométrica para esquemas *B-REP* trabalham com a informação sobre entidades sólida de forma implícita, considerando apenas a interseção das fronteiras e inferindo os resultados para a interseção de componentes volumétricas em uma abordagem dividir-e-conquistar.

A possibilidade de utilizar espaços de imersão com dimensões diferentes para processar operação booleana entre complexos é o ponto forte desta abordagem. Como os complexos podem ser subdivididos hierarquicamente em células e/ou subcomplexos, abre-se espaço para explorar o paradigma dividir-e-conquistar como a utilização de algoritmos para a interseção apenas das entidades fundamentais e a inferência dos resultados para a interseção de entidades sólidas e a divisão do processo de classificação de pertinência de dois complexos A e B em três etapas:

- **pré-classificação**: as entidades fundamentais são pré-classificadas em relação ao seu espaço de imersão mínimo, considerando A e B disjuntos. Após esta etapa as entidades fundamentais são submetidas a um processo de interseção geométrica para a identificação de células comuns.
- **classificação local**: esta etapa funciona em paralelo com a interseção das entidades fundamentais. As entidades fundamentais de cada par de subcomplexo minimal com interseção não-vazia são reclassificadas em relação ao espaço de imersão mínimo comum.
- **classificação global**: as entidades topológicas dos subcomplexos minimais formados por células-3 são classificadas para o espaço de imersão $\Re^3$.

O fluxograma apresentado na Figura 4.9 ilustra a organização das etapas de classificação, com a incorporação da etapa de interseção geométrica. Cada etapa deste processo é referenciada neste texto como módulo.

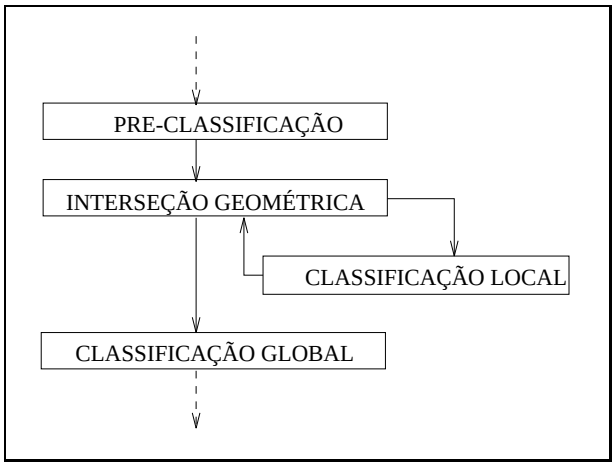

Figura 4.9: Interseção geométrica e classificação de pertinência: módulos básicos do algoritmo de operação booleana

As linhas pontilhadas indicam que o processo de interseção e classificação fazem parte de um sistema maior composto ainda pelos seguintes módulos: pré-processamento, seleção, edição de operadores e composição de resultados. Estes módulos serão introduzidos no final deste Capítulo, pois, eles fazem parte da implementação deste algoritmo dentro do sistema *ProSIm* .

4.3.1 A pré-classificação de pertinência

A pré-classificação visa atribuir uma classificação a todas as entidades fundamentais de ambos os complexos de acordo com os grupos da Tabela 3.1. Desta forma, a classificação local fica responsável por processar apenas as novas entidades que resultaram da interseção e as entidades fundamentais primitivas que que se interceptaram. A pré-classificação leva em conta apenas as células de dimensão 0, 1 e 2, isto é, vértices, arestas e faces, respectivamente; pois as células-3 são processadas na classificação e portanto não há necessidade de classificá-las antes disso.

Dados dois complexos A e B. A pré-classificação de pertinência determina as vizinhanças das células de cada complexo. Para se ter uma abordagem mais concisa, os grupos da

Tabela 3.1 são utilizados no processo de classificação de vizinhança de complexos são disjuntos. Desta forma as células do complexo A são classificadas pelos grupos $(iA-B)$ e $(bA-B)$, que representam o interior e a fronteira de A que não interceptam B, respectivamente. Pela condição de disjunção os grupos $(iA-B)$ e $(bA-B)$ reduzem-se a: iA (interior de A) e bA (fronteira de A). Da mesma forma, para o complexo B são identificados os subconjuntos iB (interior de B) e bB (fronteira de B). Esta abordagem auxilia no processo de consistência dos resultados, uniformiza a notação para classificação de vizinhanças e pertinência e facilita a implementação destas funçoes, pois a classificação de pertinência é resultante da relação entre as vizinhanças da célula de ambos os complexos.

O procedimento de classificação leva em consideração a hierarquia dos subcomplexos em cada complexo. A pré-classificação de um dado complexo é dividida em três etapas:

1. é selecionado o subcomplexo-k minimal para uma célula-k, $k = 0, 1, 2$, de maior dimensão ainda não classificado, ou seja, são selecionados subcomplexos-face, subcomplexos-aresta e subcomplexos-vértice, nesta ordem.
2. classifica-se recursivamente este subcomplexo em relação ao espaço de imersão k, isto é, todas as células que compõem seu interior e fronteira são classificadas em relação a $\Re^k$.
3. repete-se os passos 1 e 2 até que todas as células de dimensões entre 0 e 2 tenham sido classificadas.

A pré-classificação deve ser feita em ambos os complexos, já que os reusultados irão ser utilizados nas etapas seguintes do processo.

Exemplo 5 *A Figura 4.10 mostra um exemplo do processo de -ré-classificação para dois complexos; o complexo A é formado por um subcomplexo-sólido e um subcomplexo-face conectada por uma aresta, enquanto o complexo B é formado por um subcomplexo-face e um subcomplexo-aresta.*

O complexo A é composto por uma cavidade limitada por um shell, desta forma a pré-classificação é efetivada somente para as faces que compõem o shell. Então, cada face de A é interior ao subcomplexo formado pela própria face e suas fronteiras, que são as arestas e vértices adjacentes a cada uma.

O complexo B é composto por células de dimensões 0, 1 e 2, e é duplamente conexo. Considerando o procedimento de pré-classificação o subcomplexo-face é considerado a priori,

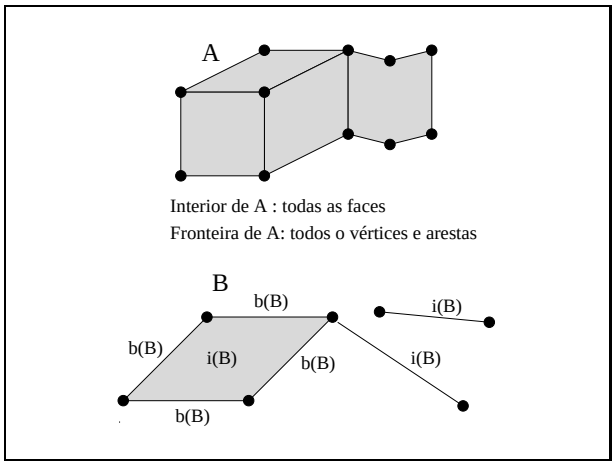

Figura 4.10: Pré-classificação - o complexo A contém célula-3 e o complexo B é multiplamente conexo e não contém célula-3

sendo a face a célula que forma seu interior e as arestas e vértices adjacentes compõem a fronteira do subcomplexo-face. Os subcomplexos-aresta não-adjacentes à face são classificados em relação ao espaço de dimensão um, assim, as arestas formam o interior de cada subcomplexo-aresta, enquanto os vértices representam os elementos da fronteira.

Vemos que o processo de pré-classificação pode ser empreendido concomitantemente a construção de cada complexo na estrutura de dados, já que considera-se apenas a dimensão dos subcomplexos dentro do complexo para a pré-classificação, sem gasto computacional excessivo. No entanto, como a implementação da estrutura de dados precedeu a concepção do algoritmo de operação fechada este procedimento é realizado somente quando necessário, ou seja, como parte integrante do processo de operação booleana.

4.3.2 Classificação local

A classificação local e a interseção geométrica inter-relacionam-se fortemente no que diz respeito a funcionalidade e a natureza geométrica dos objetos primitivos, pois a classificação local analisa a pertinência das entidades fundamentais de cada objeto primitivo criadas durante o processo de interseção geométrica, levando-se em consideração o espaço no qual estão imersas. Dependendo da natureza geométrica das primitivas, a determinação das interseções exige métodos elaborados para serem processadas, bem como influencia na determinação das vizinhanças de seus pontos. As superfícies de formas livres são exemplos

deste rol de entidades, cujo processamento da interseção requer algoritmos sofisticados.

O tratamento das operaçoes booleanas através da pré-classificação, classificação local e classificação global torna a classificação de pertinência relativamente independente dos algoritmos de interseção geométrica, inclusive uma grande virtude desta independência é a possibilidade de se incorporar algoritmos de interseção de superfícies no módulo de classificação e desta forma conseguir resultados de operações booleanas para formas geométricas cada vez mais complexas. Como a interseção geométrica não faz parte diretamente do escopo deste trabalho, nos reservamos a considerar que seja possível e factível o processamento das interseções entre pontos, curvas e superfíces; deixemos a dicussão sobre algoritmos de interseção geométrica para o Capítulo 5, que trata da implementação dos operadores booleanos fechados para uma classe de objetos com características geométricas específicas.

A classificação local é utilizada para identificar, de acordo com a Tabela 3.1, as relações entre entidades fundamentais determinadas pela interseção de dois subcomplexos primitivos, tomando como referência o espaço mínimo comum aos dois. A Figura 4.11 exibe algumas das situações de interseção entre dois subcomplexos A e B, indicando os respectivos espaços de imersão.

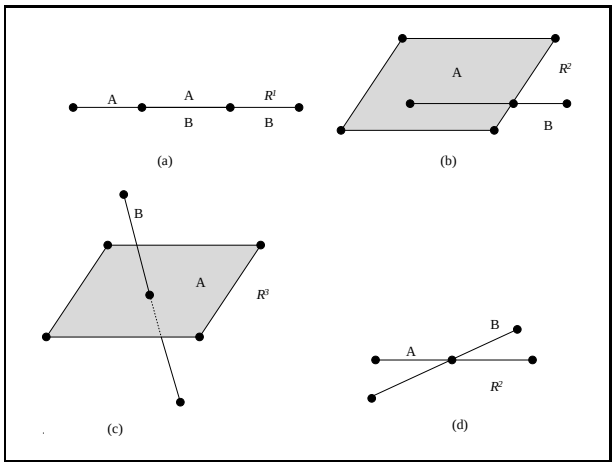

Figura 4.11: Exemplos de interseção entre complexos mostrando os espaços de imersão mínimos

A classificação de pertinência entre dois complexos depende diretamente do espaço de imersão mínimo comum para que sejam corretamente classificados, nos casos da Figura 4.11.(a) e os subcomplexos-aresta são classificadas em relação ao espaço mínimo $\Re$, enquanto que as mesmas entidades são classificadas em relação ao espaço mínimo comum $\Re^2$,

como mostra a Figura 4.11.(d), ou seja, as relações de pertinência depedem da correta determinição do espaço de imersão mínimo comum. As Figura 4.11.(b) e Figura 4.11.(c) ilustram a mesma situação para a interseção entre subcomplexo-aresta e subcomplexo-face.

Por questão de simplificação não vamos relatar a classificação para objetos que se auto interceptam e para subcomplexos que interceptam-se mais de uma vez, apesar desta extensão ser perfeitamente possível dentro desta proposta. O procedimento geral para a classificação local de dois subcomplexos minimais compreende os seguintes passos:

1. determinação do espaço de imersão mínimo comum a ambos subcomplexos, através da análise da vizinhança das células determinadas na interseção e
2. reclassificação da vizinhança das células de ambos subcomplexos, levando-se em consideração o espaço de imersão mínimo comum determinado no passo anterior.
3. obtenção da classificação de pertinência dos subcomplexos a partir das informações de vizinhança das células de cada subcomplexo.

Este procedimento deve ser realizado para todas interseções entre subcomplexos, tomados dois a dois. A classificação de pertinência para dois complexos A e B é determinada pelo que chamamos função de classificação de pertinência, denotada por $\mathcal{FCPC}(A, B)$.

O espaço de imersão mínimo para dois subcomplexos pode ser determinado através dos procedimentos explorados na seção 3.2.1, identificando as relações entre as vizinhanças de pontos comuns. O procedimento de identificação de espaço de imersão mínimo para dois subcomplexos minimais X e Y, com dimensões $dim(X) \leq dim(Y)$, resume-se a identificar a vizinhança das células comuns em cada um dos subcomplexos. Se o conjunto de todas as células comuns a X e Y é $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum para X e Y é tomado em relação a célula $e \in E$ de maior dimensão, segundo os critérios:

1. se houver alguma célula e comum a ambos subcomplexos, tal que a vizinhança em relação ao subcomplexo Y é completa, o espaço de imersão comum W terá dimensão:
   (a) $dim(W) = dim(Y)$: se a vizinhança de e em relação a Y contém a vizinhança de e em relação a X. A Figura 4.12.(c) exibe exemplo.
   (b) $dim(W) = dim(Y) + 1$: se a vizinhança de e em relação a Y não contém a vizinhança de e em relação a X. Exemplo mostrado na Figura 4.12.(a-b).

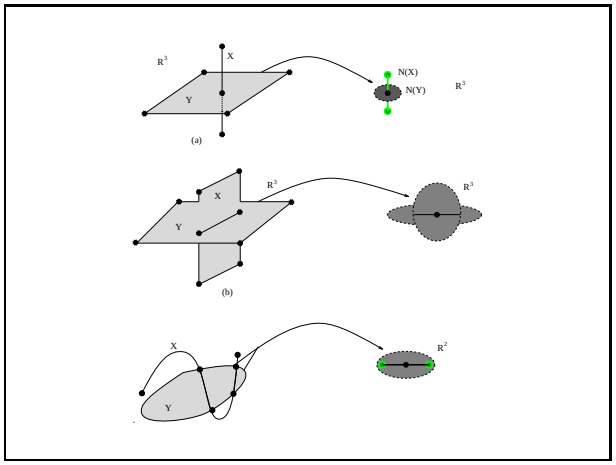

Figura 4.12: Espaços de imersão mínimos para subcomplexos X e Y, com $dim(X) \leq dim(Y)$

2. se houver alguma célula e comum a ambos subcomplexos, tal que a vizinhança em relação ao subcomplexo Y é parcial, a dimensão do espaço de imersão comum W é dada por

   (a) $dim(W) = dim(Y)$: se a vizinhança de e em relação a X é parcial para $dim(X) = dim(Y)$, ou indiferente para $dim(X) < dim(Y)$. A Figura 4.13.(a-b) exibe exemplos.

   (b) $dim(W) = dim(Y) + 1$: se a vizinhança de e em relação a X é completa para $dim(X) = dim(Y)$. Exemplo na Figura 4.13.(c)

Partindo deste conjunto de regras podemos enumerar um estudo de casos para a classificação local entre subcomplexos-face, subcomplexos-aresta e subcomplexos-vértice, esclarecendo a dimensão do espaço de imersão mínimo comum para cada caso.

4.3.2.1 Classificação para subcomplexos-vértice

A classificação local para a coincidência de vértices é o caso trivial, havendo duas possibilididades no processo de interseção: a coincidência ou a distinção espacial entre as duas entidades. Desde que $\Re^0$ contém somente um ponto, as celulas-) são espaços de um ponto [11], desta forma, a classificação local entre dois vértices recebe os grupos $(bA \cap bB)$, $(bA - B)$ e $(bB - A)$ para os espaços $\Re$, $\Re^2$ e $\Re^3$. A classificação para dois subcomplexos-vértice é dada por:

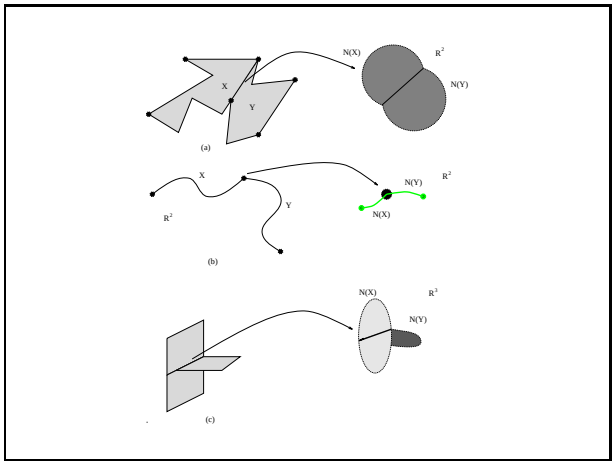

Figura 4.13: Espaços de imersão mínimos para subcomplexos X e Y, com $dim(X) \leq dim(Y)$ e célula de maior dimensão com vizinhança parcial em relação a Y

- Quando a coincidência entre dois vértices, v_A e v_B, é identificada, a função de classificação é dada por: $\mathcal{FCPC}(v_A, v_B) = (bA \cap bB)$, para v_A, e $\mathcal{FCPC}(v_B, v_A) = (bA \cap bB)$, para v_B.
- Se os vértices v_A e v_B são distintos, a função de classificação é para por: $\mathcal{FCPC}(v_A, v_B) = (bA - B)$, para v_A, e $\mathcal{FCPC}(v_B, v_A) = (bB - A)$, para v_B.

A exclusão dos grupos $(iA \cap iB)$, $(iA - B)$ e $(iB - A)$ deve-se ao fato que, para qualquer daqueles espaços de imersão os vértices são considerados fronteira do complexo. A Figura 4.14 exibe ambos os casos de classificação entre subcomplexos-vértices.

4.3.2.2 Classificação subcomplexo-vértice/subcomplexo-aresta

A incidência de um vértice sobre um subcomplexo-aresta, quando ocorre, o faz no interior ou na fronteira deste. Assim, o espaço de imersão para a incidência de um vértice sobre um subcomplexo-aresta acontece no espaço de imersão mínimo comum $\Re$.

A função $\mathcal{FCPC}$ para a incidência de um vértice v_A sobre uma aresta e_B é dada por:

- $\mathcal{FCPC}(v_A, e_B) = bA \cap iB$: incidência do vértice no interior da aresta. A Figura 4.15.(a) mostra um exemplo para este caso com v_A representando um subcomplexo do complexo A e e_B representando o subcomplexo-aresta do complexo B.

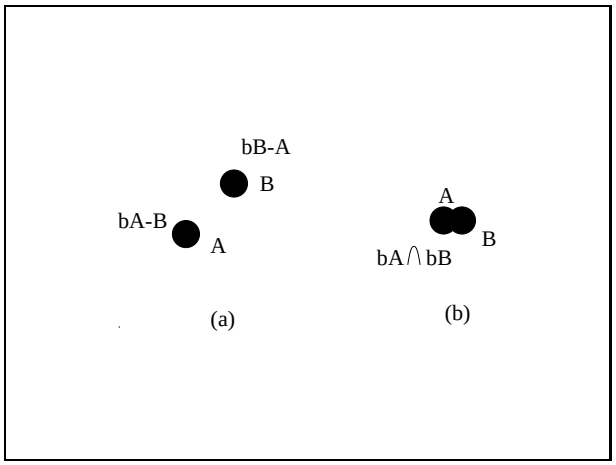

Figura 4.14: Classificação de pertinência entres subcomplexos-vértice

- $\mathcal{FCPC}(v_A, e_B) = bA \cap bB$: incidência do vértice na fronteira da aresta. A Figura 4.15.(b) exemplifica o caso.

As classificações para as partes complementares do subcomplexo-aresta em relação ao vértice são classificadas através do grupo $(iB - A)$ e $(bB - A)$ para o interior e a fronteira de e_B que não interceptam v_A, respectivamente. As Figuras 4.15.(a-b) exemplificam estas classificiações.

4.3.2.3 Classificação para subcomplexo-vértice/subcomplexo-face

A incidência de vértice sobre uma face dá-se no espaço da face, ou seja, no $\Re^2$, de acordo com as condições de determinação de espaço de imersão mínimo comum.

Desta forma, a função $\mathcal{FCPC}$ para a incidência de um vértice v_A sobre uma face f_B, é dada por:

- $\mathcal{FCPC}(v_A, f_B) = bA \cap iB$: incidência do vértice no interior da face. Exemplo mostrado na Figura 4.16.(a)
- $\mathcal{FCPC}(v_A, f_B) = bA \cap bB$: incidência do vértice na fronteira da face.Exemplo mostrado na Figura 4.16.(b)
- $\mathcal{FCPC}(v_A, f_B) = bA - B$: se o vértice v_A não incide sobre o subcomplexo face.

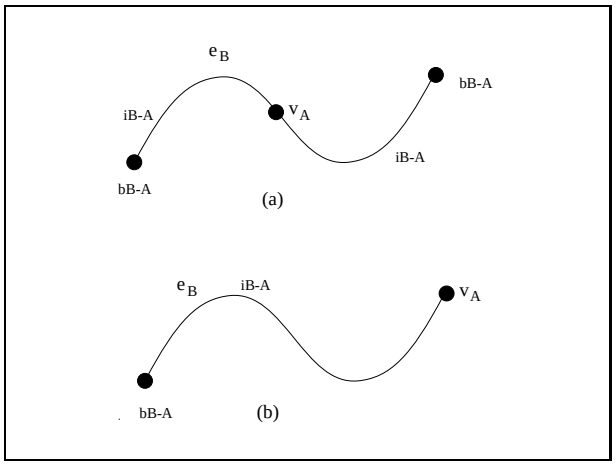

Figura 4.15: Incidência de um vértice v_A sobre um subcomplexo-aresta e_B

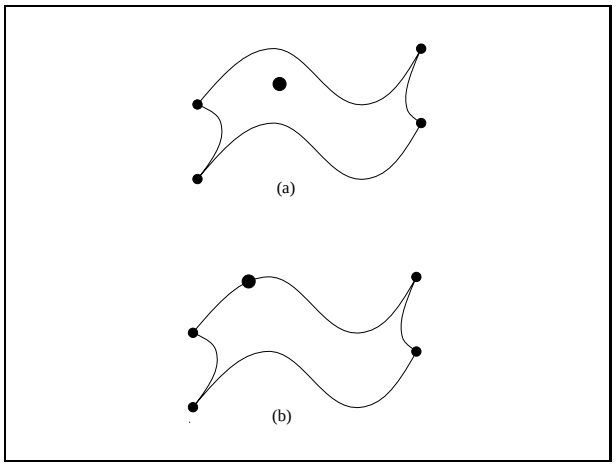

Figura 4.16: Incidência de um subcomplexo-vértice v_A sobre um subcomplexo-face f_B

O fato da incidência do vértice ser na face ou na fronteira da face não determina qualquer mudança de espaço, já que a dimensão da face é que é responsável pela indicação do espaço mínimo comum por ser a maior entre os dois subcomplexos. As partes complementares do subcomplexo-face são classificadas pelo grupo $(iB - A)$ para a face f_B e $(bB - A)$ para a fronteira do subcomplexo-face f_B.

4.3.2.4 Classificação para subcomplexos-aresta

Na interseção entre subcomplexos-aresta o espaço de imersão pode ser reta real $\Re$, ou no plano $\Re^2$, dependendo do tipo de células resultantes do processo de interseção e das relações delas com os subcomplexos. O espaço de imersão mínimo comum W para dois subcomplexos-aresta e_A e e_B é determinado levando-se em consideração as seguintes etapas:

- $W = \Re$ se existe alguma célula-1 resultante do processo de interseção, assim, as vizinhanças completas coincidem e o espaço de imersão tem a mesma dimensão do subcomplexo-aresta.
- $W = \Re$ se somente as fronteiras dos subcomplexos coincidem, pois, as vizinhanças da célula comum são parciais em relação a ambos os subcomplexos.
- $W = \Re^2$ se houver coincidência de pontos interiores e a vizinhança destes pontos em relação a cada complexo não-coincidem, ou se pelo menos em uma das arestas a vizinhança dos elementos comuns é completa e não contém a vizinhança em relação a outra aresta.

A função $\mathcal{FCPC}$ determina a classificação de pertinência entre dois subcomplexos-aresta e_A e e_B para cada espaço de imersão da seguinte forma:

- Para $W = \Re$: a arestas são tratadas como interior de cada subcomplexo, desta forma as partes da aresta de e_A que interceptam a aresta e_B recebem a classificação $iA \cap iB$ e as partes que interceptam o complemento do subcomplexo-aresta e_B recebem a classificação $iA - B$. Os vértices de e_A que interceptam o interior, complemento e fronteira de e_B recebem as classificações $bA \cap iB$, $bA - B$ e $bA \cap bB$, respectivamente. Os vértices de e_B que interceptam o interior, complemento, e fronteira de e_A recebem as classificações $bB \cap iA$, $bB - A$ e $bA \cap bB$, respectivamente. A Figura 4.17.(a) ilustra um exemplo de classificação entre dois subcomplexos-aresta e registra o espaço de imersão.

- Para $W = \Re^2$: tanto as células-0, quanto as células-1 são referenciadas como fronteira de ambas entidades, pois, a vizinhanças é um disco aberto. A classificação de pertinência é tomada da mesma forma do item anterior, agora em relação a um espaço de maior dimensão. As classificações para as partes de e_A que interceptam a fronteira e o complemento de e_B são $bA - B$ e $bA \cap bB$, respectivamente. As classificações para partes de e_B que interceptam a fronteira e o complemento de e_A são $bB - A$ e $bA \cap bB$, respectivamente. A Figura 4.17.(b) ilustra um exemplo de classificação entre dois subcomplexos-aresta e registra o espaço de imersão.

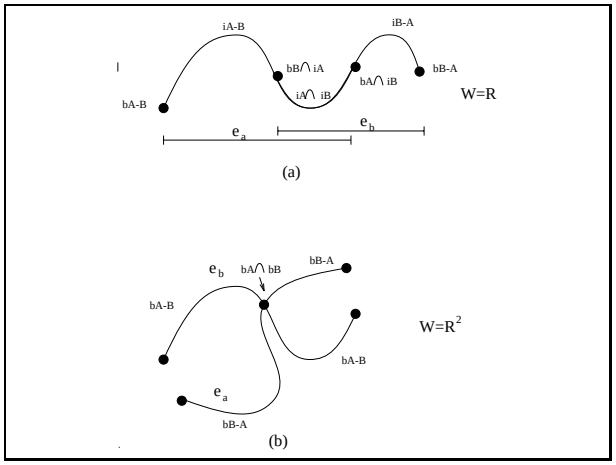

Figura 4.17: Identificação de espaço de imersão e classificação local para dois subcomplexos-aresta

As classificações de pertinências são coerentemente determinadas para ambos os espaços de imersão. No item (a) a aresta comum é classificada como $iA \cap iB$, enquanto os vértices são fronteiras do subcomplexo que incide sobre o interior do outro subcomplexo. No item (b) todas as entidades são referenciadas como fronteiras já que o espaço de imersão tem dimensão 2 e as entidades limitam-se as dimensões 0 e 1.

4.3.2.5 Classificação para subcomplexo-aresta/subcomplexo-face

O espaço de imersão mínimo comum para a interseção entre um subcomplexo-aresta e um pode ser $\Re^2$ ou $\Re^3$. O espaço de imersão mínimo para os subcomplexos e_A e f_B é determinado pelas seguintes situações:

- se existir alguma célula-1 comum a ambos os complexos, então o espaço de imersão é

$\Re^2$. Neste caso, a aresta do subcomplexo e_A intercepta o subcomplexo f_B produzindo uma vizinhança completa em e_A.

- se existir somente células-0 resultante da interseção, pode-se destinguir as seguintes situações:
  - $W = \Re^2$: se a vizinhança da célula em relação a f_B for parcial, ou seja, a interseção dá-se na fronteira de f_B.
  - $W = \Re^3$: se a vizinhança da célula em relação a f_B for completa e não contenha a vizinhança da célula em relação e_A, ou seja, a interseção ocorre no interior de f_B.

A Figura 4.18 ilustra a determinação do espaço de imersão mínimo comum para um subcomplexo-aresta e um subcomplexo-face de acordo com os critérios estabelecidos anteriormente.

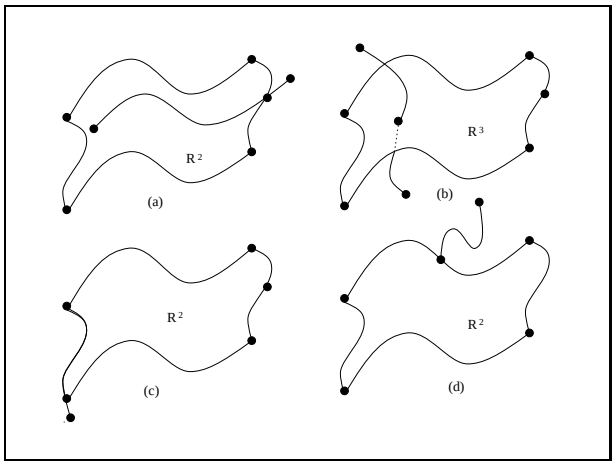

Figura 4.18: Espaço de imersão mínimo comum para subcomplexo-aresta e subcomplexo-face

Para o espaço de imersão $\Re^2$, as células-0 e células-1 são classificadas como fronteira e as célula-2 como interior para o subcomplexo-face. Daí, as arestas e vértices que formam a fronteira da face f_B são classificadas em relação a aresta e_A como $bB \cap bA$ ou $bB - A$, caso coicidam com a aresta ou com seu complemento, respectivamente. O mesmo acontece com a aresta e_A, os grupos $bA \cap bB$ ou $bA - B$, representam as partes da aresta comuns a face ou ao seu complemento. A célula-2, fará parte dos grupos $iA \cap bB$ ou $iA - B$, nas porções que coincidem com a aresta e nas partes que interceptam o complemento da aresta.

A Figura 4.19.(a) ilustra a classificação de pertinência entre e_A e f_B em relação ao espaço de imersão $W = \Re^2$.

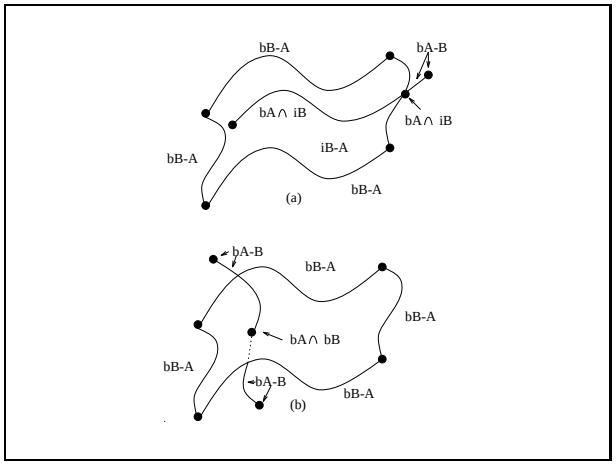

Figura 4.19: Classificação de subcomplexo-aresta/subcomplexo-face para diferentes espaços de imersão

Para o espaço de imersão $\Re^3$, todas as células que compõem a face são fronteiras, daí todas as relações de pertinências são tomadas como relações de fronteira. Com isto, as células da face são classificadas pelos grupos $bA \cap bB$ e $bA - B$, e as da aresta como $bB \cap bA$ ou $bB - A$. A Figura 4.19.(b) ilustra a classificação de pertinência entre e_A e f_B em relação ao espaço de imersão $W = \Re^3$.

4.3.2.6 Classificação subcomplexo-face/subcomplexo-face

A classificação de pertinência para subcomplexos-face pode ocorrer em relação aos espaços de imersão $\Re^2$, e $\Re^3$. A determinação do espaço de imersão é uma generalização do caso de pertinência entre subcomplexo-aresta e subcomplexo-face. Dados dois subcomplexos-face f_A e f_B o espaço de imersão mínimo é dado por:

- $W = \Re^2$: Se houver célula-2 resultante da interseção, ou seja, existem faces a ambos subcomplexos, senão se a interseção ocorrer na fronteira de ambos os subcomplexos.
- $W = \Re^3$: Se não houver célula-2 resultante da interseção, mas a vizinhança de alguma célula resultante da interseção for completa em relação a pelo menos um dos complexos e não coincida com a vizinhança em relação ao outro complexo.

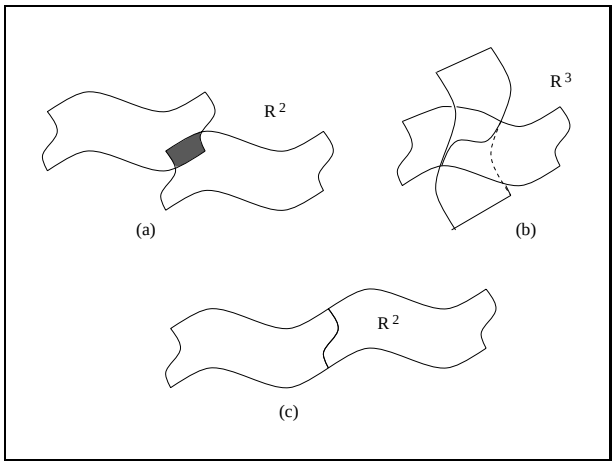

Figura 4.20: Espaço de imersão mínimo comum para subcomplexos-face

A Figura 4.21 ilustra um exemplo de subcomplexos-face que interceptam-se para o espaço de imersão $\Re^2$, e destaca a classificação das células dos subcomplexos.

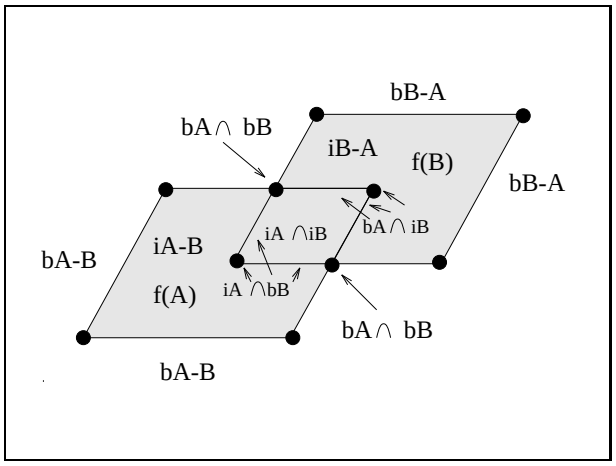

Figura 4.21: Classificação local para subcomplexos-face no $\Re^2$

Quando o espaço de imersão é R^3, as células de dimensão menor ou igual a dois, tornam-se fronteira e todas as relações de pertinência entre estas células passam a ser relações de fronteira. A Figura 4.22 exibe um exemplo de classificação de pertinência para dois subcomplexos-face para o espaço mínimo comum $\Re^3$.

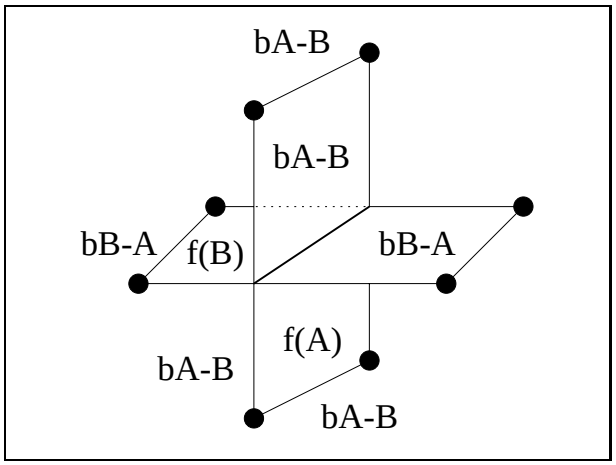

Figura 4.22: Classificação local para subcomplexos-face no $\Re^3$

Realizadas todas as interseções e classifcações locais possíveis entre as entidades fundamentais de dois complexos, o processo passa para a fase de classificação global, sobre a qual falaremos nesta próxima seção.

4.3.3 Classificação global

O módulo de classificação global tem como objetivo principal determinar a classificação de pertinência das entidades sólidas a partir dos resultados das classificações realizadas nas entidades fundamentais adjacentes a elas. A classificação global é realizada tomando-se o espaço de imersão com dimensão 3 (fixo), se houver a presença de entidades sólidas na estrutura. Neste caso, entidades fundamentais determinadas na interseção ou relacionadas diretamente a estas são reclassificadas para o novo espaço de imersão, pois a mudança na dimensão do espaço altera as relações de pertinência entre as entidades dos objetos. Por outro lado, a ausência de entidades de dimensão 3, faz com que preserve-se a classificação local para processamentos em módulos subsequentes.

A classificação global não é complemento direto de um outro processo, como acontece com a classificação local, que é determinada a partir da interseção entre entidades fundamentais. O processo de classificação global segue três passos:

1. identificação de células-3: caso não seja identificada nenhuma célula-3 o processo encerra-se e são mantidas as classifcações locais.

2. reclassificação de pertinência das entidades fundamentais adjacentes à célula-3 pertencentes ao subcomplexo-sólido em relação ao espaço $\Re^3$.
3. identificação e classificação das entidades topológicas interiores ao sólido pertencentes ao outro complexo.

Neste primeiro passo é detectada a presença de célula-3. Em caso positivo, as entidades adjacentes as células-3 são reclassificadas tomando o espaço de imersão $\Re^3$. Este procedimento, na prática altera as relações antes tomadas como "interior de...", em espaços com dimesão inferior a três para "fronteira de ..." no espaço $\Re^3$.

A identificação de entidades interiores às entidades sólidas de um complexo A, é implementada varrendo-se toda a estrutura topológica do complexo B, e testando se alguma entidade fundamental pertence ao interior do sólido. Em caso positivo, se houver uma entidade fundamental x no interior do sóldio s_A, todas as entidades adjacentes x são pesquisadas até se chegar na fronteira de s_A, desta forma as entidades conectadas a x são classificadas levando-se em conta apenas informações topológicas.

Neste momento supomos que os algoritmos de detecção de uma entidade fundamental em relação a uma entidade sólida seja perfeitamente factível, principalmente em se tratando da relação entre um ponto no espaço e um sólido limitado por uma superfície. No Capítulo seguinte, descreveremos a implementação de um algoritmo para uma classe de entidades geométricas particular.

O processo é implementado para entidades sólidas pertencentes ao objeto B. Se existir entidades sólidas em ambos os objetos, a identificação de entidade fundamental adjacente à entidade sólida no interior de outra entidade sólida, indica a interseção entre células-3, classificadas por $iA \cap iB$.

4.4 Módulos complementares

A implementação do módulo completo de operação booleana fechada para um sistema de modelagem geométrica requer a concepcão de módulos complementares, tais quais tranformações rígidas, seleção de entidades através de interface amigável, etc. Para o sistema *ProSIm* suportar os operadores booleanos fechados, implementamos os seguintes módulos complementares: pré-processamento, edição de operadores e seleção e composição de resultados. A Figura 4.23 exibe o fluxograma completo do módulo de operação booleana.

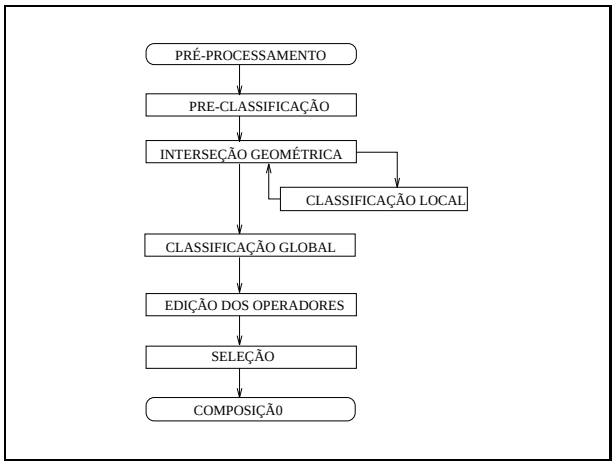

Figura 4.23: Módulo de operação booleana fechada implementado no sistema *ProSIm*

O pré-processamento diz respeito mais ao sistema de modelagem geométrica do que propriamente ao módulo de operação booleana, pois, está vinculado a preparação dos objetos na cena, geralmente implementada através de tranformações geométricas. Destacamos as tranformações afins como as mais requisitadas para realizar esta tarefa de posicionamento. Uma outra tarefa importante atribuída ao *GMS* é a disponibilidade de mecanismos de seleção de objetos, pois o nosso algoritmo processa dois objetos por vez e é necessário que sejam indicados para o processamento das combinações booleanas.

O módulo de edição de operadores é bastante trival no que diz respeito a funcionalidade, pois serve apenas para indicar qual operação deve ser realizada. Assim , o módulo de seleção busca na estrutura de dados as entidades marcadas pelos identificadores assinalados na Tabela 3.1.

A conclusão do processo é feita através do módulo de composição, do qual é exigido algumas tarefas como: verificação da consistência dos dados, eliminação de entidades redundantes criando um novo objeto na estrutura de dados.

Capítulo 5

Implementação e Resultados

Após fundamentar os operadores booleanos fechados e propor um algoritmo para eles sobre uma classe de objetos modelados por complexos celulares, dedicamos este espaço para a descrição de uma implementação dos operadores booleanos fechados. A interseção geométrica das células dos complexos é uma função básica no processo de operação booleana, e a complexidade dos algoritmos de interseção geométrica depende da natureza dos objetos representados. Na implementação dos operadores booleanos para objetos da *NM-Classe*, a geometria das entidades fundamentais ao espaço euclidiano $\Re^3$ restrigiu-se as seguintes especificações:

- Vértice: corresponde a uma tripla (x,y,z) no $\Re^3$.
- Aresta: segmento de reta orientado, limitado por seus pontos extremos.
- Face: Polígono planar, simples, não necessariamente convexo, limitado por um conjunto de arestas e vértices.

Os sólidos são limitados por um conjunto de polígonos planares simples. A Figura 5.1 ilustra alguns moldelos de objetos da *NM-Classe* com as restrições à geometria, de acordo com as considerações acima.

Os objetos das Figuras 5.1.(a-c) são construídos através das entidades fundamentais e representam os subcomplexos minimais para vértices, arestas e faces, respectivamente. A Figura 5.1.(d-f) representa um *shell*, uma cavidade e um complexo celular formado pela combinação dos anteriores. A informação acerca da existência de entidade sólida diferencia o *shell* da cavidade, sendo que toda cavidade é limitada por um *shell* e representa o subcomplexo minimal para um sólido.

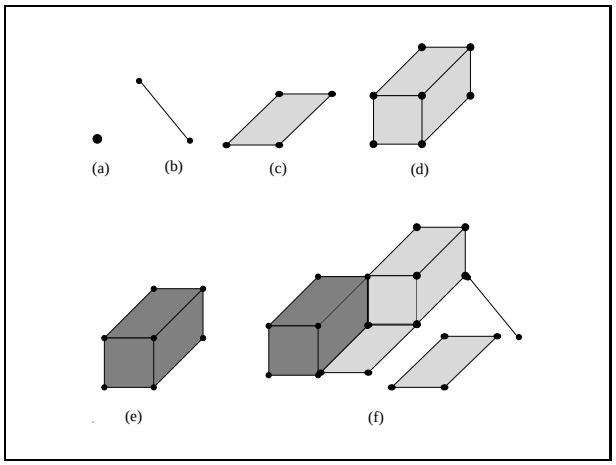

Figura 5.1: Complexos celulares com geometria restrita a polígonos, segmentos e pontos

A estrutura TDM não dispõe da informação sobre a geometria dos objetos explicitamente, mas cada entidade topológica é munida de um apontador genérico para ser utilizado pela aplicação que é utilizado para relacionar informações externas a cada entidade topológica. Este apontador utilizado para referenciar informações geométricas dos modelos, bem como, para o processamento de interseções geométricas e das classificações de pertinência.

Aproveitando-se da restrição imposta a geometria das entidades fundamentais, a classificação local é suprida de informações pelo módulo de interseção geométrica. As interseções entre polígonos planares , segmentos de reta e pontos fornecem diretamente o espaço de imersão mínimo comum entre quaisquer combinações duas-a-duas destas entidades, já que a posição relativa entre estas entidades no $\Re^3$ indica que "tipo" de entidade irá resultar da interseção entre duas entidades fundamentais. Em seguida, a implementação das funções de classificação de pertinência é discutida.

Discutimos ainda a implementação de alguns módulos complementares ao processo, e que visam auxiliar os módulos de classificação e interseção para a completa caracterização da operação booleana. Finalizamos o Capítulo apresentando alguns resultados da implementação do algoritmo de operação booleana fechada, integrado ao sistema *ProSIm* .

5.1 Representação das entidades geométricas

Dois aspectos são relevantes para a implementação dos algoritmos de interseção, quais sejam: as restrições à geometria das entidade fundamentais e do objeto como um todo, como já foi exposto na introdução deste Capítulo. Para um melhor entendimento do trabalho adotamos a seguinte convenção: quando estivermos falando de geometria e operações relacionadas, mencionaremos pontos, segmentos e polígonos para designar entidades geométricas correspondentes a vértices, arestas e faces, respectivamente.

Toda informação geométrica acerca de uma entidade topológica de um objeto ou do próprio objeto pode ser operacionalizada com o auxílio dos operadores de construção, destruição e consulta do TDM. Como toda entidade topológica (incluindo *shell*, cavidade, componente, laços e objetos) dispõe de um apontador genérico (ou apontador de aplicação) que pode ser utilizado para referenciar dados da aplicação, tais quais: as equações das faces (polígonos planares), das arestas (segmentos de reta) e coordenadas dos vértices. Tanto as equações das arestas, quanto quanto as equações das faces podem ser determinadas a partir das cordenadas dos vértices. Isto é utilizado na nossa implementação, pois, o TDM consegue armazenar as coordenadas dos vértices internamente.

Equação da reta. Dada uma aresta e existe sempre dois vértices, v_0 e v_1, que representam seus extremos. A cada vértice podemos relacionar uma tripla que identifica a sua localização no espaço, temos as coordenadas de v_0 e v_1 dadas por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, respectivamente. A equação paramétrica do segmento orientado, $l(t)$ com origem em P_0 e direção $P_1 - P_0$, é dado por:

$$l(t) = P_0 + t * (P_1 - P_0), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{5.1}$$

Para $t = 0$ temos $l(t) = P_0$ e para $t = 1$ temos $l(t) = P_1$, representando os extremos do segmento de reta com origem em P_0 e término em P_1.

Equação do plano. A equação do plano que contém um determinado polígono pode ser determinada através do Método de Newell [27], que leva em consideração que as áreas de projeções de um polígono nos planos cartesianos xy, yz e zx, são proporcionais aos coeficientes do vetor normal do polígono.

Dados n vértices $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ de um polígono p, considerando $V_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. a equação do plano $ax + by + cz + d = 0$ pode ser expressa por:

$$(\vec{X} - \vec{P}) \bullet \vec{N} = 0, \tag{5.2}$$

com $\vec{X} = (x, y, z)$, $\vec{N} = (a, b, c)$ representa o vetor normal ao plano, e P um ponto arbitrário do plano. Os coeficientes a, b e c são dados por:

$$a = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i\oplus 1})(z_i + z_{i\oplus 1})$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i\oplus 1})(x_i + x_{i\oplus 1})$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i\oplus 1})(y_i + y_{i\oplus 1})$$

sendo $\oplus$ a adição módulo n. O coeficiente d é calculado a partir da equação (5.2) como

$$d = -\vec{P_{av}} \bullet \vec{N}, \tag{5.3}$$

com P_{av} dado pela média aritmética de todos os vértices do polígono:

$$P_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i. \tag{5.4}$$

Este método provê uma formulação bastante simples para a determinação da equação de um plano que passa por um conjunto de pontos, lembrando que a condição de coplanaridade dos pontos é garantida pelas restrições impostas à geometria da face. Caso os pontos sejam não-coplanares o método fornece uma equação aproximada.

A Figura 5.2 mostra como a informação relativa a geometria é associada a cada entidade fundamental através do apontador de aplicação, no caso,a estrutura que guarda as informações sobre a aplicação é representada pela caixa (aplicação).

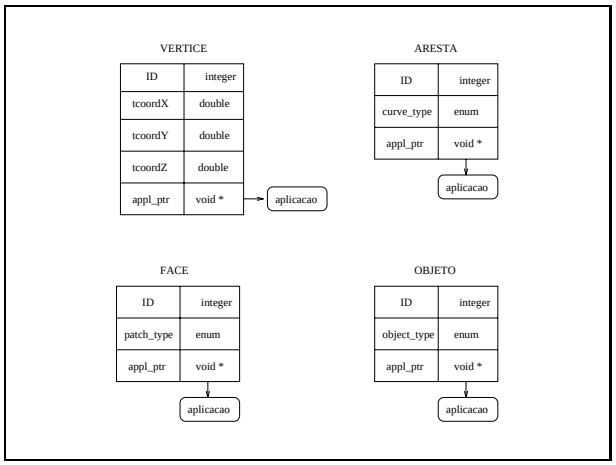

Figura 5.2: Organização do TDM relativa a informações adicionais às entidades topológicas

Podemos sempre recuperar os IDs dos vértices extremos de qualquer arestas no TDM através da função de busca *TdEAGetAdjVertices*. Assim, podemos relacionar a cada um destes vértices suas coordenadas espaciais, bem como, extrair estes valores caso já existam. A Figura 5.3 ilustra o armazenamento de informação relativa a uma aresta e seus vértices extremos pelo TDM.

Vemos que através da função de consulta relacionada acima, chegamos a informação das coordenadas dos vértices v_0 e v_1 e desta forma determinamos a equação (5.1) do segmento relativo a aresta e. Para cada entidade mostrada na Figura 5.3 existe um apontador para uma estrutura externa (*struct_smc*), este é o apontador de aplicação mencionado anteriormente.

O mesmo tipo de consulta pode ser realizada para determinar a equação do plano da face. Através da função *TdFAGetAdjVertices* obtém os IDs dos vértices de uma face, e com isto, recupera-se as suas coordenadas. Utilizando o método de Newell, já mostrado, chega-se a equação do plano.

Vimos como recuperar informações acerca da geometria de qualquer entidade fundamental, desta forma, na seção seguinte vamos fazer algumas considerações sobre a interseção entre as entidades fundamentais.

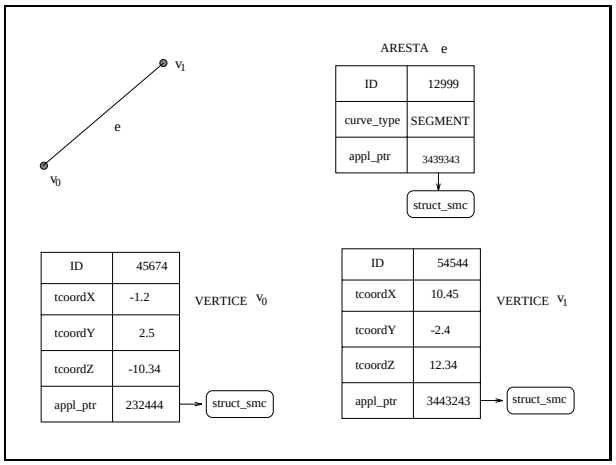

Figura 5.3: A representação da informação geométricas para os vértices extremos de uma aresta

5.2 Considerações sobre a interseção geométrica

A segunda etapa do algoritmo de operação booleana fechada, sugerido pelo fluxograma da Figura 4.9, é a interseção geométrica dos objetos primitivos. Algoritmos de interseção geométrica para modelos *B-Rep* de objetos poliédricos processam os elementos da fronteira (polígonos, segmentos e pontos) dos objetos e inferem os resultados da interseção para as entidades sólidas. Diante das restrições impostas à geometria dos modelos de objetos da *NM-Classe*, as combinações possíveis de interseção geométrica entre pontos, segmentos e polígonos estão listadas na Tabela 5.1.

1	Polígono	Polígono
2	Polígono	Segmento
3	Polígono	Ponto
4	Segmento	Segmento
5	Segmento	Ponto
6	Ponto	Ponto

Tabela 5.1: Interseção entre polígonos, segmentos e pontos

Para cada um destes casos, temos situações diferentes entre si, que serão exploradas ao longo do Capítulo. Por exemplo, um segmento pode interceptar um polígono quando ambos estiverem em um mesmo plano ou quando o segmento não estiver paralelo ao plano

do polígono. A Figura 5.4 relaciona alguns destes casos.

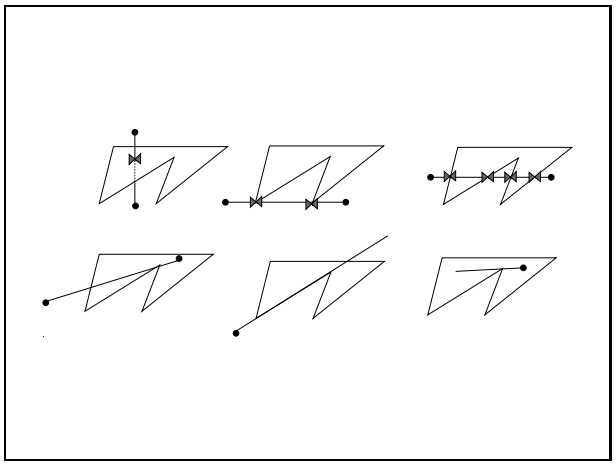

Figura 5.4: Casos de interseção polígono/segmento

Na Figura 5.4 as borboletas representam os pontos de interseção entre polígonos e segmentos. Vemos que a quantidade de situações particulares é bastante elevada e um estudo de casos está fora dos objetivos deste trabalho.

Uma grande problemática do processo de interseção geométrica é a ambiguidade gerada no processo de interseção geométrica [10, 14]. A essência dos algoritmos para a implementação deste processo é a utilização da aritmética em ponto flututante. A aritmética em ponto flutuante é usada para determinar as interseções entre as entidades geométricas, baseando-se em regiões de tolerâncias e na informação topológica para garantir uma certa robustez do processo. A robustez refere-se a eliminação de ambigüidades dos resultados de interseções, já que, utilizamos uma representação de ponto flutante para representar números reais.

Para colocar em prática a idéia de impor robustez a interseção geométrica, ou seja, faz-se necessário definir as regiões de tolerância para cada entidade. Nossa implementação utiliza duas regiões de tolerâncias para cada objeto, chamadas região de tolerância de inclusão, denotada por ϵ, e a região de tolerância de exclusão, denotada por δ. Nossa implementação utiliza os conceitos propostos por Bruderlin [3, 4]. Dadas duas entidades fundamentais A e B, se suas regiões de inclusão se tocam, então garante-se que elas interceptam-se, ou senão, se suas regiões de exclusão não se tocam, então garante-se que elas não se interceptam.

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ no espaço, a sua região de tolerância de inclusão é

definida como:

$$\epsilon_{P_0} = \{P \ | \ | \ P - P_0 \ | < \epsilon\}, \tag{5.5}$$

sendo $\epsilon > 0$.

Enquanto a região de tolerância de exclusão δ_{P_0} é definida como:

$$\delta_{P_0} = \{P \ | \ | \ P - P_0 \ | < \delta\}, \tag{5.6}$$

sendo $\delta > \epsilon$.

Geometricamente, as regiões de tolerâncias de inclusão e exclusão para um ponto P podem ser vistas como esferas de raio δ e ϵ, com centro no ponto P_0, com a restrição de que a região de exclusão é sempre maior do que a região de inclusão, Figura 5.5.

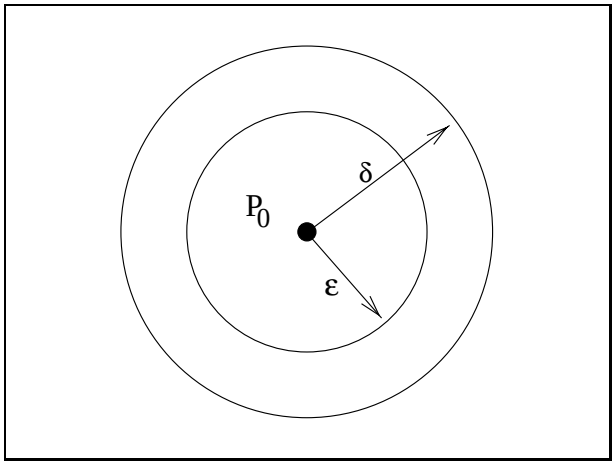

Figura 5.5: Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para um ponto no espaço

Para uma reta, as regiões de tolerâncias de inclusão e exlusão são cilindros com raios ϵ e δ, respectivamente. A Figura 5.6 exibe um corte nos cilindros que representam as regiões de tolerância para uma reta. Já no caso do plano, os elementos de tolerâncias de inclusão e exclusão seriam placas com espessuras ϵ e δ, respectivamente. A Figura 5.7 exemplifica as regiões de tolerância para um plano.

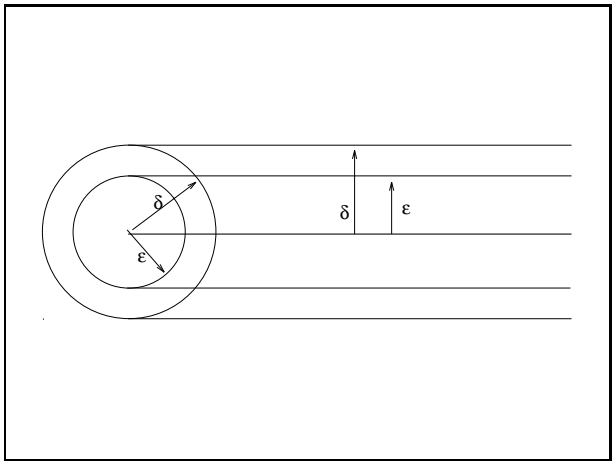

Figura 5.6: Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para uma linha no espaço

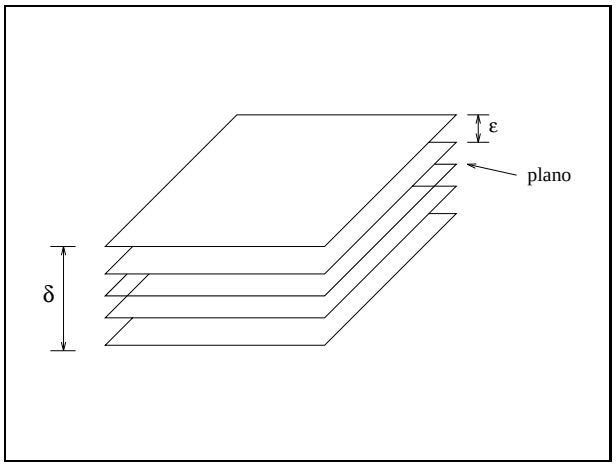

Figura 5.7: Regiões de tolerância de inclusão, ϵ, e exclusão, δ, para um plano no espaço

A composição das regiões de tolerâncias de pontos, juntamente com as regiões de tolerâncias para a linha compõem as regiões para o segmento de reta, já que os segmentos são limitados por pontos nos seus extremos. As regiões ϵ e δ para polígono é conseguida pela composição das regiões para pontos, segmentos e plano, pois um polígono é limitado porr um conjunto de segmentos e estes por pontos.

A determinação de coincidências de pontos no $\Re^3$, a incidência de um ponto sobre um segmento, a identificação da posição de um ponto em relação a um plano e de um ponto em relação a um polígono no plano são as relações geométricas básicas implementadas para o módulo de interseção. A partir destas relações as interseções: segmento/segmento, segemento/plano, segmento/polígono, polígono/plano, polígono/polígono são facilmente determinadas. Vamos mostrar a seguir como implementamos as interseções básicas empregando as regiões de tolerâncias.

5.2.1 Coincidências de pontos no $\Re^3$

A interseção de pontos, ou mais precisamente coincidência de pontos situados no $\Re^n$ (nos restringimos ao $\Re^3$) é a análise da posição relativa dos pontos no espaço no qual se encontra. Portanto, dois pontos no $\Re^3$ coincidem se existe uma igualdade nas suas coordenadas.

Entretanto, tratar "igualdade" quando se trabalha com números em ponto flutuante, para representar números reais, não é uma tarefa tão trivial. Pois, inconsistências podem aparecer, principalmente em alguns casos denominados degenerados; quer seja, pela própria imprecisão na representação em ponto flutuante; quer seja, pelo arredondamento nas operações aritméticas que acumulam-se durante as operações sucessivas. A maneira clássica de manipular decisões sobre dados aproximados é aplicando o paradigma da tolerância.

O paradigma da tolerância reza que, dados dois objetos geométricos, se a distância euclidiana entre ambos for menor do que um certo valor de incerteza ϵ, decide-se que os dois objetos são coincidentes, caso contrário eles são distintos. Contudo, alguns casos podem gerar problemas, como por exemplo a aplicação do paradigma para identificar se os três pontos da Figura 5.8 coincidem.

As regiões de tolerâncias para os pontos P_1 e P_2 se tocam, portanto, conclui-se que P_1 e P_2 coincidem. Por motivo idêntico P_2 e P_3 são coincidentes, portanto, pela relação de transitividade P_1 e P_3 são coincidentes. Entretanto, pelo testes das regiões de tolerências, conclui-se que P_1 e P_3 são distintos, pois suas regiões de tolerância de exclusão nao se tocam, gerando uma decisão inconsistente.

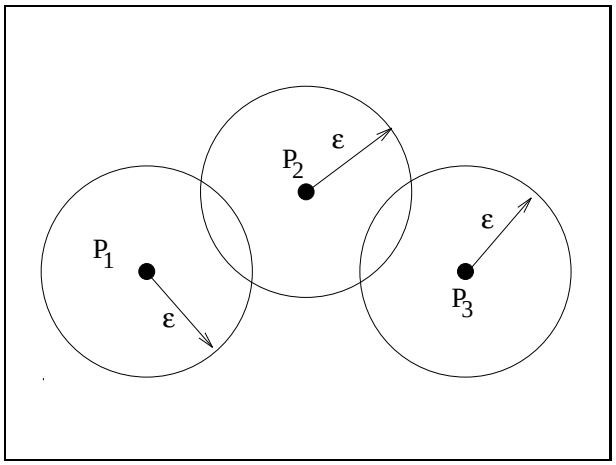

Figura 5.8: Comparação entre três pontos, aplicando o paradigma da tolerância

Além de levantar problemas como os apresentados, Bruderlin [3] sugere um processo, utilizando as regiões de inclusão, exclusão e uma região denominada região de *buffer* entre as duas primeiras, para determinar coincidências entre pontos; juntamente com a sugestões apresentadas por Hoffmann [14] e Segal [25], implementamos um algoritmo relativamente simples para detecção de coincidências de pontos.

Definimos uma região de tolerância de exclusão δ, para auxiliar a região de tolerância ϵ utilizada originalmente pelo paradigma e denominada região de tolerância de inclusão, sendo $\epsilon \subseteq \delta$, Figura 5.5. Geometricamente, as regiões representam esferas concêntricas com raios $\epsilon \subseteq \delta$. No caso, adotaremos inicialmente na comparação entre dois pontos com $\delta = 2\epsilon$, pois o importante não é a amplitude destes valores, mas a coerência dos resultados dos testes para a identificação da relação entre dois pontos.

Estas duas regiões tem atribuições diferenciadas no processo. Se as regiões ϵ de dois pontos se tocam, então, pelo paradigma da tolerância, os pontos são coincidentes. Por outro lado, se as regiões δ de ambos os pontos não se tocam, pode-se definir que os pontos são disjuntos. Assim, se dois pontos coincidem, a nova região ϵ será a união das regiões ϵ originais dos pontos, na prática a nova região será a menor esfera que contém ambas esferas originais. De forma semelhante, teremos a nova região de exclusão determinada pela menor esfera que contém as regiões de exclusão originais. A Figura 5.9 ilustra a inferência das novas regiões de inclusão e exclusão para dois pontos coincidentes.

Mesmo a adoção de regiões de inclusão e exclusão pode ocasionar uma situação de

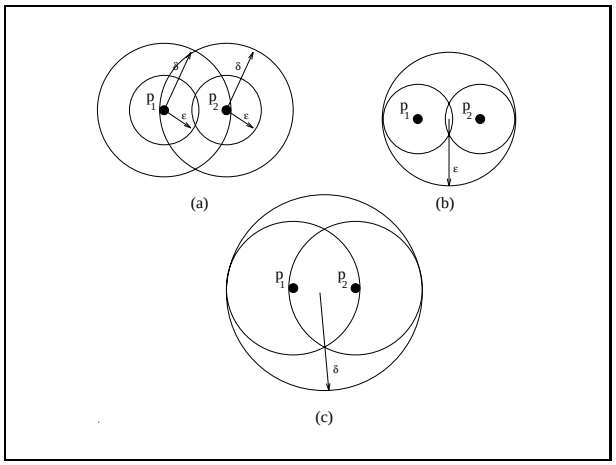

Figura 5.9: Novas regiões de inclusão e exclusão para pontos coincidentes

indecisão quanto a coincidência dos pontos, caso haja interseção entre as regiões de exclusão e as regiões de inclusão sejam disjuntas. O procedimento adotado é variar ambas regiões mantendo a relação $\delta = 2\epsilon$.

Um outro problema que pode aparecer é na relação entre três pontos, por exemplo. Dados três pontos P_1, P_2 e P_3. Digamos que o teste entre P_1 e P_2 indique que são disjuntos e depois o teste entre P_2 e P_3 uma coincidência entre eles. Assim, com as novas regiões de tolerâncias os testes para P_1, P_2 são refeitos, assim como para os demais pontos já processados. Esta sistemática visa reprocessar todos os pontos que tenham suas regiões de tolerâncias alteradas para solucionar possíveis inconsistências.

5.2.2 Incidência de ponto em um segmento de reta

Da formulação básica da equação (5.1) para um segmento de reta, a relação de coincidência entre dois pontos, vista na seção anterior, impõe a condição de que as regiões de exclusão dos pontos extremos devam ser disjuntas, para que se possa traçar um segmento entre os pontos em questão. Caso contrário, se as regiões de inclusão se tocam, os pontos coincidem; com isso teríamos um sistema indeterminado, pois por um ponto passam tantas retas quanto se queira.

Atendida esta exigência, a relação de incidência entre um segmento e ponto no espaço, pode ser deduzida a partir da relação ponto/ponto, sendo as regiões de inclusão e exclusão da

reta, ϵ e δ, apresentadas na Figura 5.10.(a). Geometricamente, estas regiões são dois cilindros com eixo comum e raios ϵ e δ. Lembrando que, qualquer segmento sobre esta reta, possui as mesmas regiões de tolerância, exceto nas extremidades do segmento, nas quais teríamos um caso de tolerância para pontos, Figura 5.10.(b).

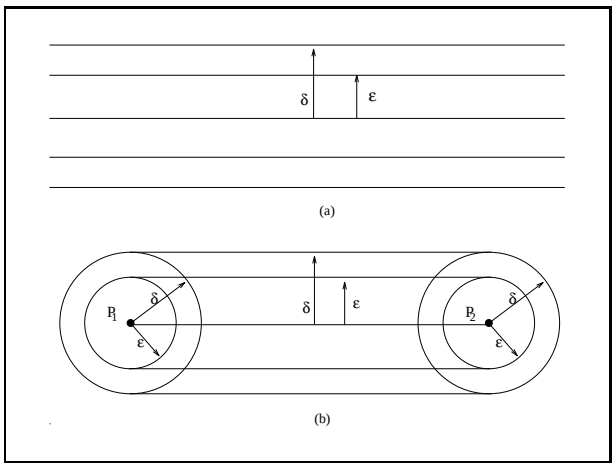

Figura 5.10: Regiões de tolerâncias de inclusão, ϵ, e exclusão, δ , para: (a) uma reta no espaço,(b) para um segmento limitado por P_1 e P_2. (vista lateral)

Um algoritmo para determinar a incidência de um ponto, Pt, sobre um segmento , $l(t)$, limitado pelos pontos P_0 e P_1, pode ser implementado levando-se em consideração os seguintes passos:

- Determina-se a projeção de Pt sobre a reta que passa por P_0 e P_1, determinando o ponto projetado, $Pt*$.
- Utilizando o teste de coincidência de pontos entre $Pt*$ e Pt, verifica-se se ambos são coincidentes, se não o forem, então pode-se concluir que o ponto Pt não incide sobre o segmento, encerrando o algoritmo,
- senão, se o ponto em questão e sua projeção sobre a reta coincidem, então deduz-se que o ponto está sobre a reta!
- Finalmente, se o parâmetro t estiver no intervalo $(0, ..., 1)$ ou se o ponto projetado coincide com os extremos do segmento, pelo teste de coincidência de pontos, conclui-se que o ponto incide sobre o segmento.

Este procedimento fornece o resultado da incidência de um ponto sobre um segmento com a mesma segurança do procedimento de determinação de coincidência de pontos, já que o primeiro é baseado neste último. Entretanto, a detecção de que um ponto pertence a um segmento, pelos testes de incidência realizados, pode gerar um tipo de inconsistência e possíveis falhas em futuras operações, se não for determinado se o ponto está no interior ou na fronteira da aresta. Para evitar este conflito, realiza-se um teste entre o ponto e os pontos extremos do segmento, caso coincida com um dos extremos, conclui-se que o ponto além de incidir sobre o segmento, coincide com um de seus pontos extremos.

5.2.3 Incidência de um ponto sobre um polígono

Dados um ponto $Pt = (x_0, y_0, z_0)$ e a equação (5.2) do plano Pl, se as regiões de inclusão de ambos se tocarem, então o ponto está sobre o plano; caso contrário, o ponto está fora do plano. Substituindo as coordenadas do ponto na equação do plano, tem-se a distância do plano ao ponto, denotada por $d(Pt, Pl)$. Aplicando os testes de incidências utilizando as regiões de tolerâncias distingüe-se as seguintes classificações:

- se $d(Pt, Pl) < \epsilon_{Pt} + \epsilon_{Pl}$, o ponto está no plano. Assim, as regiões de inclusão e exclusão de ambos são ajustadas, para uma esfera com menor raio, que contenha as respectivas regiões, no caso do ponto; e placas com espessuras que contenha as respectivas regiões, para o plano.
- se $d(Pt, Pl) > \delta_{Pt} + \delta_{Pl}$, e sinal positivo, o ponto estará "acima" do plano.
- se $d(Pt, Pl) > \delta_{Pt} + \delta_{Pl}$, e sinal negativo, o ponto estará "abaixo" do plano.

Nos últimos dois casos, conservam-se as regiões originais, tanto do plano quanto do ponto. Em estando o ponto sobre um plano qualquer, nosso maior interesse é poder classificá-lo em relação a um polígono simples, convexo, ou não, e contido no plano.

A localização de um ponto em uma face é imprescindível para a viabilidade do processo de interseção entre faces e as demais entidades fundamentais, considerando que o ponto esteja no plano da face. Dado que existe um compromisso entre generalização e eficiência, a localização de um ponto em uma face côncava, com "buracos" e múltiplos laços pode ser determinada lançando a partir do ponto um segmento de reta, infinitamanente grande, no plano da face, e analisando o número de interseções com os laços da face, Figura 5.11.

No caso da reta interceptar apenas arestas e não interceptar vértices, o ponto estará no interior do polígono se o número de interseções for ímpar; senão, se o número for par, o

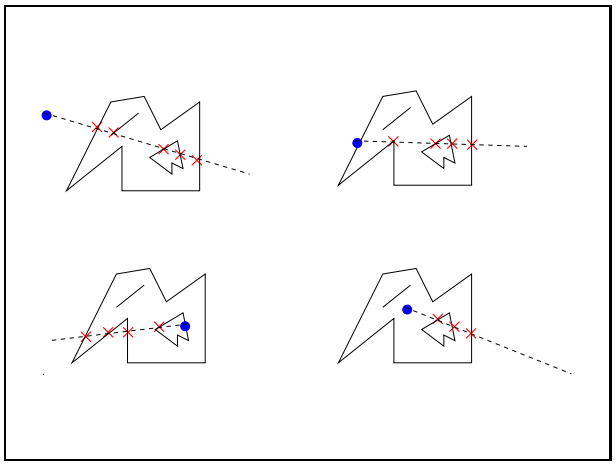

Figura 5.11: Algumas situações que envolvem a localização de um ponto em relação a um polígono no plano

ponto está fora do polígono. Estando o ponto sobre a borda do polígono, a interseção por si só o reconhecerá como tal, eliminando a necessidade de contagem do número de interseções. Afirmativa esta válida para o caso trivial do número de interseções ser nulo, neste caso o ponto estará fora do polígono. Note na Figura 5.11.(a) a presença de um laço degenerado, representado pela aresta (única) interna a uma face. Um outro exemplo de laço degenerado seria um vértice interno a uma face e sem aresta adjacente. Estes laços não são levados em consideração no processo de contagem de interseções.

Quando a reta passa por um vértice $V(k)$, do laço da face, a análise da quantidade de interseções segue os critérios:

- laços degenerados não são levados em consideração neste caso.
- são observados os vértices adjacentes (no laço) ao vértice em análise. Caso estejam em semi-planos opostos em relação a reta proveniente do prolongamento da semi-reta, $r(t)$, gerada, incrementa-se o contador de um; senão se estiverem no mesmo semi-plano o contador não é incrementado.
- se algum dos (ou ambos) vértices adjacentes ao vértice $V(k)$, determinados no passo anterior, estiver(em) sobre a semi-reta é tomado seu sucessor ate' encontrar um caso falso.

Terminado todo o processo de contagem do número de interseções, de acordo com o contador descrito, o resultado da análise é dado por:

- se o contador for um número ímpar, o ponto (Pt) está dentro do polígono F. Ou senão , se o ponto coincide com algum ponto do conjunto de pontos da interseção da semi-reta com os laços do polígono é porque o ponto está sobre a fronteira (algum laço) da face.
- senão, se o resultado for nulo ou par, o ponto (Pt) está fora do polígono F.

5.2.4 Interseção entre dois segmentos de reta no $\Re^3$

Determinar a interseção entre dois segmentos de reta $l_0(t)$ e $l_1(t)$, algebricamente, seria resolver a equação linear $l_0(t) = l_1(t)$, isto é

$$P_0 + t_0(P_1 - P_0) = P_2 + t_1(P_3 - P_2) \tag{5.7}$$

para t_0 e t_1. A análise destes valores irá determinar a interseção dos segmentos. Entretanto, este sistema será indeterminado se os segmentos se interceptarem sobre a mesma reta suporte, pois t terá uma infinidade de valores como solução. Sendo assim, contornamos alguns destes possíveis impasses, dividindo o problema em duas partes:

- Na primeira parte tratamos a colinearidade e coplanaridade das retas suportes dos dois segmentos, identificando as quatro situações: a retas são reversas ou paralelas e, portanto, não se cruzam; senão, se as retas forem coplanares e não-colineares, elas se cruzam em um único ponto, podendo está ou não nos segmentos. E finalmente se são colineares e coincidentes, os segmentos podem se interceptarem ou não.
- Identificadas as possíveis situações de interseção, para os dois casos possíveis são implementados algoritmos específicos para o tratamentos do problema de interseção.

5.2.4.1 Tratamento da colinearidade de dois segmentos coplanares no $\Re^3$

Dados dois segmentos coplanares no espaço euclidiano, nosso objetivo é determinar a interseção entre ambos, a menos que sejam paralelos, e portanto não havendo possibilidades de se cruzarem.

As parcelas $(P_1 - P_0)$ e $(P_3 - P_2)$ representam as direções, D_0 e D_1 dos segmentos orientados $l_0(t)$ e $l_1(t)$, assim o ângulo entre os segmentos é dado por:

$$\theta = cos^{-1}(\frac{\mid D_0 \bullet D_1 \mid}{\mid D_0 \mid\mid D_1 \mid}) \tag{5.8}$$

se $\theta \leq \epsilon$ as retas suporte são paralelas; senão, as retas suporte dos segmentos são congruentes. Para o primeiro caso, verifica-se a distância de um dos pontos extremos de uma das retas em relação a outra, segundo os mesmo critérios adotados para verificação de incidência de um ponto sobre uma reta. Caso não haja distância entre ambos, as duas retas são coincidentes e portanto, os segmentos são passíveis de interseção. Para dar mais segurança ao processo, em caso afirmativo no passo anterior, repete-se o teste para o extremo restante do mesmo segmento em relação a reta suporte do outro segmento, se este ponto incide sobre a reta, tem-se a garantia que as retas são coincidentes; senão, as retas são congruentes

Vê-se claramente, a necessidade de testes de incidência para evitar problemas com inconsistências, esta necessidade nasce para pequenos valores de θ. Digo, para valores bem maiores que zero, a confirmação da congruência é clara e livre destes percausos.

Quando as retas são coincidentes, as regiões de inclusão e exclusão dos pontos extremos e dos segmentos sofrem um ajuste, devido a presença de uma pequena angulação θ, Figura 5.12.

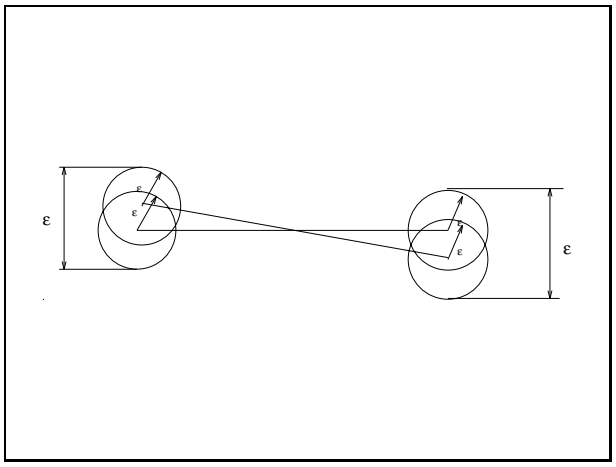

Figura 5.12: Regiões de tolerâncias ajustadas dos extremos dos segmentos

As regiões de tolerâncias atualizadas para os extremos dos segmentos, para retas coincidentes, são calculados pela composição das regiões de cada ponto com a projeção sobre a reta suporte do outro segmento. Esta composição é feita de acordo com as regras de pontos

coincidentes, ou seja, cada ponto terá as regiões de inclusão com sendo a menor esfera que contém as regiões de inclusão sua e do ponto projetado. O mesmo procedimento é feito para as regiões de exclusão dos quatro pontos extremos.

As regiões de inclusão e exclusão dos segmentos são escolhidas entre duas maiores regiões de inclusão e exclusão dos pontos extremos, para que operações futuras sejam tratadas coerentemente, já que a interseção de segmentos pertecentes a restas coincidentes estas regiões não terão grande importância.

Quando $\theta > \delta$ teremos a condição de congruência das retas suportes, assim os dois segmentos podem se interceptarem. Se assim acontecer, o fará em um único ponto. A seguir daremos prosseguimento aos dois algoritmos de interseção mencionados.

5.2.4.2 Interseção de dois segmentos coplanares e congruentes no $\Re^3$

Dados dois segmentos congruentes coplanares, a suas retas suportes sempre se tocam em um único ponto. Portanto, o procedimento para interseção dos dois segmentos identifica o ponto de interseção das duas retas, e também os parâmetros t_0 e t_1, caso estejam no intervalo $[0, 1]$, os segmentos se interceptam. Caso contrário, se pelo menos um dos segmentos estiver fora deste intervalo, é porque na interseção é vazia.

Veja que os testes de incidência dos pontos nos segmentos são realizados segundo os preceitos já mencionados nos testes de incidência de pontos em segmentos, para garantir a validade da operação e consistência dos dados.

5.2.4.3 Interseção entre dois segmentos sobre uma reta

Atestada a coincidência das retas, a determinação da interseção é feita testando a incidência dos pontos extremos de um segmento sobre o outro segmento. A Figura 5.13 ilustra alguns casos possíveis. Na verdade, estes testes são interseções entre intervalos sobre a reta.

Caso haja dois pontos quaisquer com seus respectivos parâmetros no intervalo $[0, 1]$, o segmento resultante estará entre ambos, salvo o caso em que ambos, também, coincidem e, portanto, a interseção será dada por um único ponto. A inexistência de parâmetros no intervalo $[0, 1]$, indica que há interseção.

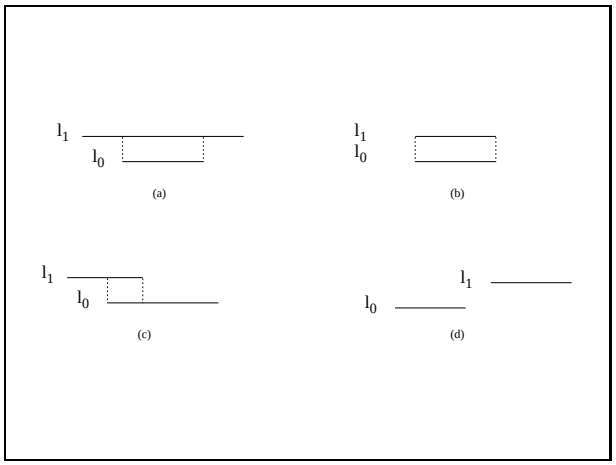

Figura 5.13: Interseção de segmentos sobre uma reta

5.2.5 Relações entre segmentos e polígonos

Os algoritmos apresentados nas seções anteriores serviram de base para as implementações das seguintes interseções:

- polígono/segmento: aproveita-se das relações entre polígonos e pontos, já que o segmento é limitado por dois pontos.
- polígono/polígono: utiliza-se das relações entre segmento e polígono, pois os laços de cada polígono analisados em relação ao outro polígono, juntamente com as relações de perticências de pontos em relação a um polígono podem levar a determinação das interseções entre estas entidades.

Detalharemos algumas destas situações nas seções seguintes sobre classificação de pertinência local e global. Nestas seções apresentaremos as contribuições do módulo de interseções no processo de classificação para a classe de objetos descrita nesta implementação.

Encerramos as considerações sobre interseção geométrica, apresentando os três casos básicos de interseção entre ponto, segmento e polígono e derivações relacionadas, como por exemplo a interseção entre segmentos, etc. Vamos na próxima seção tecer algumas considerações sobre a influência dos resultados da interseção geométrica sobre a classificação de pertinência.

5.3 Implementação dos módulos de classificação

A implementação de classificação de pertinência não é uma tarefa simples e direta para qualquer classe de objetos [30]. Para os complexos celulares com a geometria restrita a pontos no $\Re^3$, segmentos de reta, e polígonos planares, esta tarefa torna-se bem mais factível, pois, o que seria um trabalho local e difícil, a identificação das vizinhanças dos pontos passa a ser global para cada módulo de classificação, senão vejamos como isto se concretiza em cada um dos módulos de classificação.

- pré-classificação: os subcomplexos-vértice e subcomplexos-aresta são classificados em relação aos espaços $\Re$, e os subcomplexos-face em relação ao $\Re^2$.
- classificação local: a dimensão do espaço de imersão mínimo para os pares de subcomplexos é determinada pela posição relativa entre eles. Por exemplo, para dois subcomplexos-aresta colineares no plano, o espaço de imersão mínimo comum é $\Re$.
- classificação global: se houver célula-3 o espaço de imersão mínimo será o $\Re^3$, e a classificação será realizada em todas as células adjacentes a célula-3, inclusive na própria. Para isto contamos com a ajuda de testes geométricos de um ponto em relação a um poliedro.

Mostraremos a seguir alguns detalhes da implementação dos módulos de pré-classificação, classificação local e classificação global.

5.3.1 Implementação da pré-classificação

A pré-classificação para dois complexos A e B atribui uma classificação a todas as entidades fundamentais de cada complexo, considerando *a priori* A e B disjuntos para utilizar os grupos da Tabela 3.1. Os seguintes passos são considerados:

1. Os subcomplexos-face, subcomplexos-aresta e subcomplexo-vértice são processados nesta ordem. Desta forma, existe uma precedência dos subcomplexos de maiores dimensões sobre os de menores dimensões, por exemplo, as arestas da fronteira de uma face são classificadas como fronteira do subcomplexo face e não como subcomplexo-aresta.
2. Todas as células de cada subcomplexo são classificadas utilizando os operadores de consulta da estrutura de dados para fornecer as informações de adjacências. O processo termina quando todos os subcomplexos tenham sido classificados

Exemplo 6 *A Figura 5.14 exibe a classificação de um complexo A, supondo que seja disjunto de qualquer outro complexo, inclusive do complexo B.*

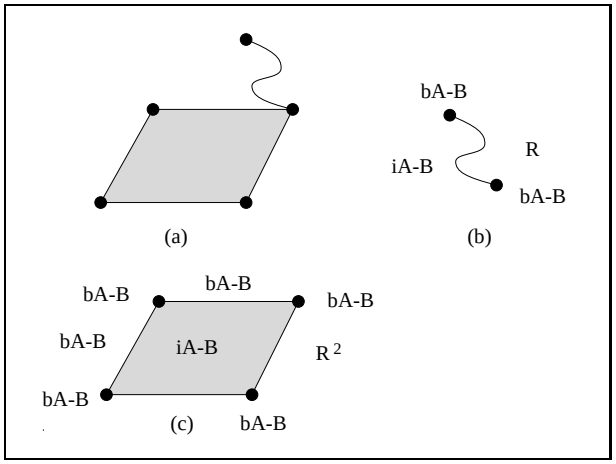

Figura 5.14: Pré-classificação de um complexo em relação: (a) um complexo A (b) subcomplexo-aresta (c) subcomplexo-face

O complexo A da Figura 5.14 pode ser dividido em dois subcomplexos: o subcomplexo-face é classificado em relação ao espaço $\Re^2$, enquanto o subcomplexo-aresta é classificado em relação ao espaço $\Re$.

A título de simplificação qualquer subcomplexo-vértice deve ser classificado em relação a reta $\Re$. A presença de subcomplexo-vértice só é possível quando vértices não são adjacentes a nenhuma outra entidade topológica, isto é, formam uma componente.

5.3.2 Implementação da classificação de pertinência local

A classificação local, explorada no Capítulo anterior, concentra-se na determinação da pertinência de dois subcomplexos com dimensões limitadas em em dois, ou seja, vértices, arestas ou faces. Para esta implementação limitamos, como já frisamos, a geometria destas entidades e tratamos apenas polígonos planares, segmentos de reta e pontos no $\Re^3$. O comportamento geométrico destas entidades viabiliza a implementação de algoritmos para a determinação do espaço de imersão mínimo comum e a função de classificação para as entidades fundamentais, pois a posição relativa no espaço calculada na interseção destas entidades fornece a informação da dimensão do espaço mínimo. Para os subcomplexos minimais de

entidades fundamentais, temos os seguintes casos possíveis, nos quais a posição relativa entre eles fornece a dimensão do espaço:

1. a incidência de um subcomplexo-vértice sobre qualquer outro subcomplexo minimal, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é dado pela dimensão deste último.
2. na interseção entre subcomplexos-aresta, o espaço mínimo é $\Re$ se os segmentos de reta que representam os subcomplexos-aresta são colienares, caso contrário institui-se que o espaço é $\Re^2$ e faz-se uma análise das vizinhanças dos pontos de interseção através de uma função complementar apresentada abaixo.
3. na interseção entre um subcomplexo-aresta e um subcomplexo-face, o espaço mínimo é $\Re^2$ se o segmento de reta que representa o subcomplexo-aresta pertence ao plano do polígono que representa o subcomplexo-face; caso contrário institui-se que o espaço é $\Re^3$ e faz-se uma análise das vizinhanças dos pontos de interseção através de uma função complementar apresentada abaixo.
4. na interseção entre subcomplexos-face, o espaço mínimo é $\Re^2$ se os polígonos pertencem a um mesmo plano; caso contrário institui-se que o espaço é $\Re^3$ e faz-se uma análise das vizinhanças dos pontos de interseção através de uma função complementar apresentada abaixo.

Exemplo 7 *A Figura 5.15 reproduz algumas das possíveis interseções entre subcomplexos formados apenas por entidades fundamentais e destaca o espaço de imersão mínimo comum sobre o qual devem ser classificadas todas as células de cada subcomplexo.*

A Figura5.15.(a), exibe a interseção entre dois subcomplexos-aresta, neste caso, a análise da colinearidade entre os segmentos que representam as arestas indica que o espaço de imersão mínimo comum é a reta $\Re$ (dimensão um). Na Figura 5.15.(b) temos um subcomplexo-face e um subcomplexo-aresta pertencentes ao mesmo plano, e portanto, o espaço de imersão mínimo tem dimensão dois. O espaços de imersão mínimo tem dimensão três para a situações mostrada na Figura 5.15.(c), pois o polígono e o segmento não são coplanares. O último dos casos, Figura5.15.(d), difere do caso (a) no que diz respeito a colinearidade entre os dois segmentos (não são colineares) e desta forma o espaço de imersão mínimo possui dimensão igual a dois.

A determinação do espaço de imersão através das informações de colinearidade de coplanaridade pode entrar em contradição com o que fora estabelecido em Capítulos anteriores, senão vejamos o exemplo da Figura5.16.

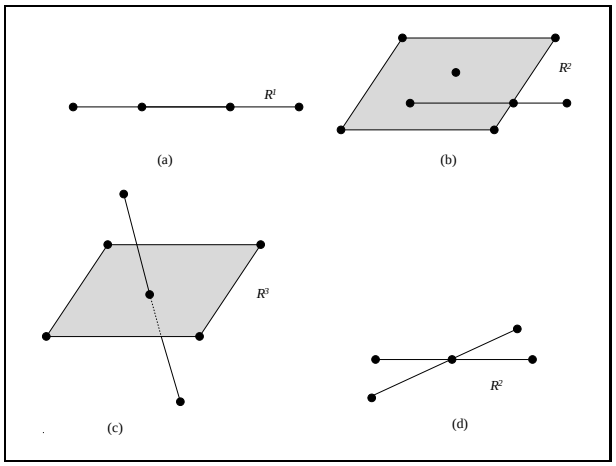

Figura 5.15: Classificação local - destaque para o espaço de imersão mínimo comum

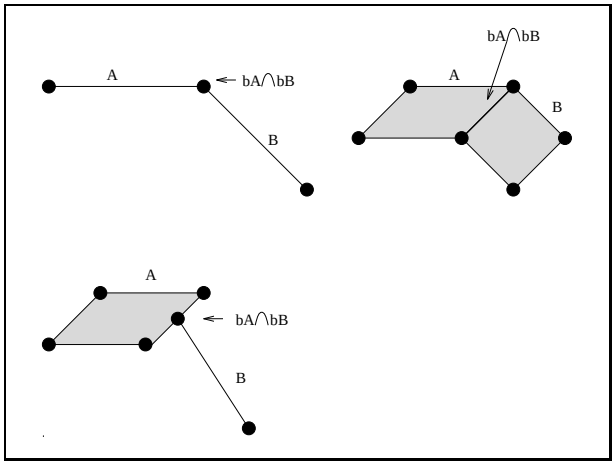

Figura 5.16: Classificação local - destaque para o espaço de imersão comum não-mínimo

As dimensões dos espaços de imersão comuns pela análise dos testes de colinearidade e coplanaridade podem gerar resultados incorretos do ponto de vista do que se deseja buscar que é o espaço de dimensão mínima. Evitamos de relacionar os casos explorados na formulação da função de classificação local mostrados no Capítulo anterior. Para evitar redundância de informação, somente para ilustrar mostramos a implementação da classificação entre dois subcomplexos-vértice e em seguida entre um subcomplexo-vértice e um subcomplexo aresta.

Do ponto de vista de implementação, ressaltamos como solucionar o problema do espaço de imersão mínimo afim de sustentar o argumento sobre a validação da informação geométrica para determinarmos a dimensão correta do espaço através de um função completar para identificação do espaço de imersão mínimo comum.

Função complementar para determiniação de espaço mínimo comum. A Função complementar para identificação do espaço de imersão mínimo entre dois subcomplexos minimais, cuja a dimensão do espaço de imersão mínimo comum é maior do que a dimensão do subcomplexo de maior dimensão, analisa os elementos comuns a ambos subcomplexos como segue:

1. se as entidades comuns a ambos subcomplexos pertencem ao interior de pelo menos um dos subcomplexos tomando como espaço de imersão o espaço original do subcomplexo em análise mantém-se a dimensão do espaço determinada a partir da informação geométrica.
2. senão, se as entidades comuns a ambos subcomplexos pertecem as suas fronteiras originais, a dimensão do espaço de imersão mínimo comum deve ser igual a dimensão do maior subcomplexo.

5.3.3 Implementação da classificação de pertinência global

No processo de operação booleana entre dois complexos A e B, a classificação global é realizada como complemento do processo de classificação de pertinência caso um (ou ambos) complexos contenha célula-3 em sua estrutura. Caso contrário, como já mencionamos a classificação é mantida e o módulo de classificação global não é executado.

A classificação global concentra-se em identificar as relações entre as células-3 e demais entidades topológica, desta maneira. Com isto o módulo possui duas etapas básicas de funcionamento, pressupondo inicialmente que o objeto A contenha um célula-3

- identificação da relação entre células-3 e entidades topológicas fundamentais. Em relação ao objeto A, todas as entidades fundamentais adjacentes a célula-3 são reclassificadas em relação ao espaço de imersão mínimo comum de dimensão três, inclusive as entidades comuns de A e B são processadas. Toda a estrutura topológica do objeto B é percorrida afim de se identificar quais entidades estão no interior do subcomplexo-sólido formado pela célula-3 e demais entidades adjacentes a célula-3.
- identificação da relação entre células-3 dos dois objetos. Este processo é efetivado em função da presença de células-3 em ambos os objetos, além da necessidade de haver entidades fundamentais nos interiores de ambos subcomplexos sólidos

Neste procedimento dois procedimentos são puramente topológicos e portanto, não sofrem do infortúnio de problemas com a robustez que são a identificação das entidade fundamentais que pertencem a fronteira da célula-3 e a relação entre células-3 de dois objetos. No entanto, a pertinência das entidades fundamentais em relação as células-3 requerem algoritmos geométricos para o seu processamento, e com isto novamente fizemos uso das regiões de tolerâncias de inclusão e exclusão para impementar algumas rotinas de pertinência de ponto em relação a um poliedro.

Todas as entidades fundamentais adjacentes a cada célula-3 na estrutura de dados são recuperadas através das funções de consulta, e reclassificadas como fronteira do objeto ao qual pertence. Por exemplo, a Figura 5.17 exibe um sólido do objeto A com uma face F previamente classificada como $(iA \cap iB)$, mas como a face F é adjacente ao sólido sua nova classificação em relação a A é modificada para $(bA \cap iB)$.

Alteramos apenas a classificação em relação ao objeto A, já a relação de pertinência em função de B pode ou não mudar através do mesmo processo caso a face F pertença a fronteira de B. Um segundo procedimento é investigar a relação das entidades fundamentais de um objeto em relação as entidades sólidas do outro. Considerando uma entidade célula-3 pertencente ao objeto A, o processo de investigação da pertinência das entidades topológicas de B em relação a célula-3 toma as seguintes etapas:

1. Todos os vértices de B são testados contra a célula-3, através de um algoritmo geométrico. Identificado um vértice no interior do poliedro formado pela célula-3 e suas fronteiras, todas as entidades topológicas adjacentes ao vértice e que não pertencem a fronteira do sólido são classificadas como pertencentes ao seu interior. Este procedimento identifica arestas e faces no interior do sólido que tenha algum vértice também no interior deste sólido.

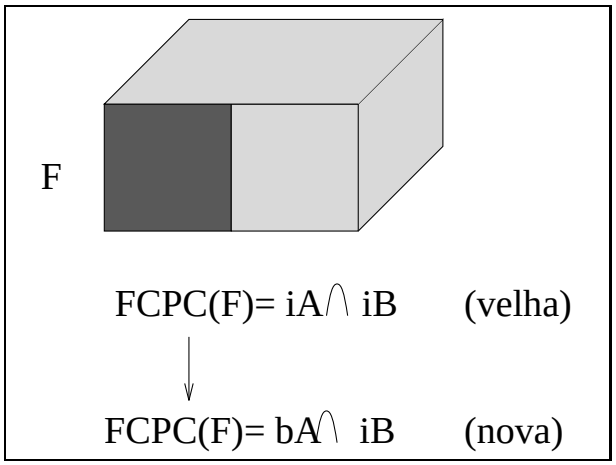

Figura 5.17: Classificação global de uma entidade fundamental de objeto que contém entidade sólida

2. Há mais de um vértice de B comum a fronteira da célula três e que sejam adjacentes a uma face ou uma aresta de B ?

   - Sim: se o conjunto dos vértices formam um ciclo topológico (novo) e são adjacentes a uma face, então a face corta o subcomplexo-sólido formado pela célula-3. Senão, se os vértices formam uma cadeia, as arestas determinadas por estes vértices, podem está no interior do sólido. Caso o seu ponto médio entre cada para de vértices (ordenados) esteja no interior do subcomplexo-sólido
   - Não: nenhuma reclassificação é mais necessária, e não existe elementos de B no interior do subcomplexo de A.

A relação entre subcomplexos sólidos é conseguida através das informações de adjacências das entidades classificadas pelos procedimentos descritos acima.

5.4 Integração dos operadores booleanos no *ProSIm*

O *ProSIm* - sistema de **Pro**totipação e **S**íntese de **Im**agens dispõe de uma interface amígavel, que facilita a incorparação do módulo de operação booleana e lhe provê uma série de facilidades, tais quais: o módulo de pré-processamento sugerido no Capítulo 4 (Figura 4.23), manipulação de objetos na cena, inclusive seleção de objetos. A Figura 5.18 mostra a interface deste sistema de modelagem.

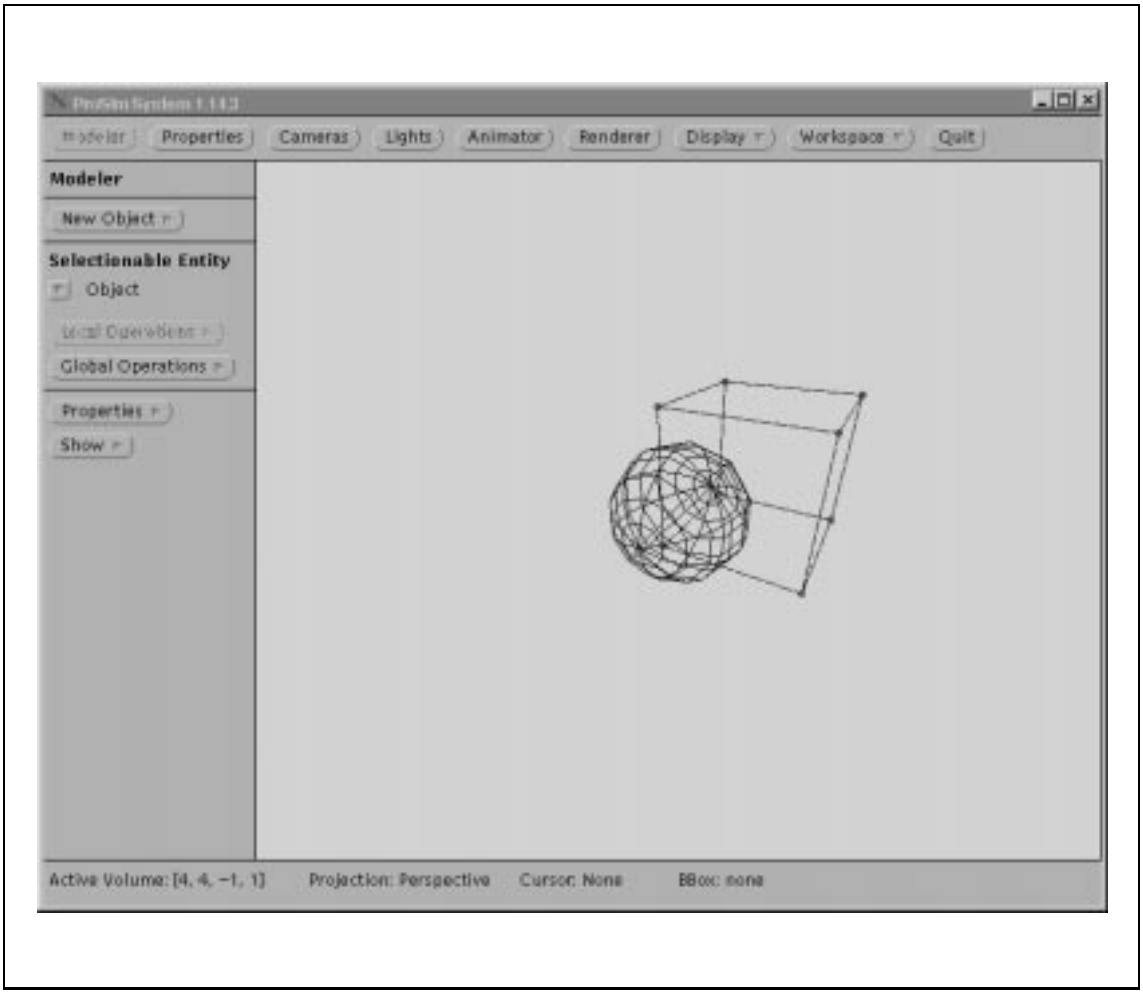

Figura 5.18: Sistema de Prototipação e Síntese de Imagens - *ProSIm*

O módulo de operações booleanas está incorporado ao *menu Global Operations*, mostrado na Figura 5.18. Quanto aos operadores, completadas as fases de interseção e classificações, todas as entidades topológicas que compõem ambos os objetos submetidos ao processo estão coerentemente classificados em oito grupos de entidades. De acordo com a proposta para o processo de classificação de pertinência de conjuntos já descrita, todas as células de ambos os objetos estão relacionadas a algum grupo da Tabela 3.1.

Para a efetivação de uma das operações booleanas fechadas (interseção, união e diferença) depende apenas de três passos complementares:

1. **Edição dos Operadores**: está, também, relacionada com as funcionalidades do *ProSIm* , pois, resume-se a indicação de qual operação booleana deva ser realizada. O sistema *ProSIm* dispõe de uma interface amigável pela sinalizamos que seja empreendida as operações booleanas.
2. **Selecão das entidades**: seleciona dentre os oito grupos de entidades, as entidades de compõem o objeto resultante do processo, de acordo com o operação indicada pelo módulo de edição de operadores. Obervando que na operação de diferença, as entidades de fronteira comuns aos dois objetos são submetidas a um processo de refinamento, resultando em novos agrupamentos de entidades durante a classificação.
3. **Composição dos resultados**: recebe as entidades selecionadas no processo anterior, e compõe o objeto resultante da operação booleana. Para isto, atualiza toda a estrutura de dados TDM, verifica a consistência das informações topológicas e também elimina as entidades redundantes criadas durante todo este processo, fazendo uma espécie de filtragem topológica das entidades resultantes.

5.4.1 Edição dos operadores

Os módulos de interseção e classificações preparam todas as entidades topológicas para servirem à composição de operações booleanas fechadas nos objetos primitivos da *NM-Classe*.

O primeiro passo no sentido de se conseguir compor uma operação booleana é saber qual operação boolena deve ser efetivada pelo processo. Esta tarefa está ligada com as funcionalidades *GMS*, pois, é inerente do sistema de modelagem saber como os resultados devem aparecer! A implementação dos operadores no sistema *ProSIm* prevê a visualização das três operações booleanas, em quatro resultados possíveis devido a não comutatividade da operador diferença fechada.

No sistema *ProSIm* , o módulo de edição serve para indicar a realização de operações booleanas, no caso, todas as operações são realizadas. Pois, a idéia inicial seria a apresentação dos resultados das operações booleanas, e depois a escolha da operação a ser efetivada, isto implica na supressão do módulo edição de operadores, Figura 5.19.(b); pois, todas as possibilidades seriam expostas na tela e o usuário escolheria a operação desejada simplesmente apontando para uma das janelas.

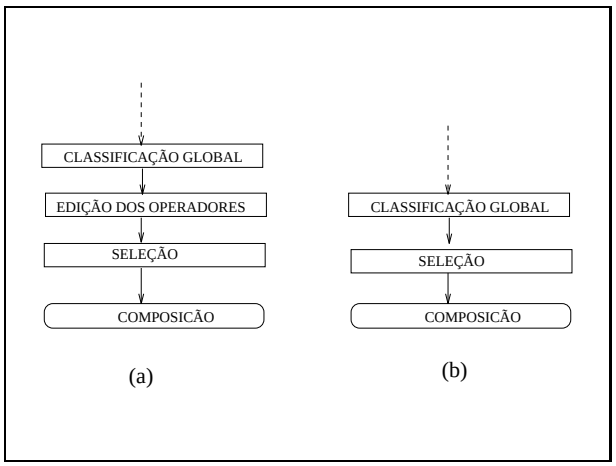

Figura 5.19: Módulo de edição no processo de operação booleana: (a) uma operação é selcecionada, (b)todas as operações são visualizadas e depois uma é selecionada

A abordagem mostrada na Figura 5.19.(a) requer a seleção da operação antes da seleção das entidades. Esta disposição possui uma grande vantagem sobre a outra, pois, a seleção é feita somente para uma operação, e portanto, diminui significativamente o tempo de processamento nos módulos complementares.

Do ponto de vista de interatividade, *a priori*, seria de se esperar que a primeira abordagem, na qual todas os resultados são visualizados antes, daria maior retorno para o usuário do sistema de modelagem. Entretanto, sobre esta forma de ver o problema, pesa o argumento de que, em um processo de contrução de uma cena complexa, dependendo do estágio da sua construção, não necessariamente ambas as primitivas são simples. Com isto, chegamos a conclusão, que na grande maioria das vezes o usuário sabe "o que quer fazer", ou seja, qual operação deve ser escolhida.

O certo é que esta mobilidade na ordem dos módulos, dentro da nossa proposta é importante para a incorporação dos operadores booleanos fechados a um sistema de modela-

gem geométrica, e que isto pode ajudar a compor um processo mais ou menos interativo, a depender das necessidades do usuário e abordagens dos projetistas na construção do *GMS*.

5.4.2 Seleção de entidades

O processo de seleção é responsável por selecionar todas as entidades classificadas, levando-se em consideração a operação booleana a ser efetivada. Para a operação booleana de interseção fechada entre os objetos A e B é determinada pela junção dos seguintes grupos de entidades:

$(iA \cap iB)$
$(bA \cap iB)$
$(bB \cap iA)$
$(bB \cap bA)$

A união fechada dos mesmos dois objetos A e B é determinada pelos seguintes grupos de entidades:

$(iA \cap iB)$
$(iA - B)$
$(iB - A)$
$(bA \cap iB)$
$(bB \cap iA)$
$(bA - B)$
$(bB - A)$
$(bA \cap bB)$

A operação diferença fechada $(A \ominus B)$ é composta pela seleção dos seguintes grupos de entidades:

$(iA - B)$
$(bA - B)$
$(iA \cap bB)$
$(bA \cap bB)^*$

Já a operação $(B \ominus A)$ é dada por:

$(BA - A)$
$(bB - A)$
$(iB \cap bA)$
$(bA \cap bB)^*$

A composição das entidades pertencentes aos grupos acima descrevem o modelo do objeto resultante das operações de interseção, união e diferença fechadas segundo os grupos da Tabela 3.1. O TDM se encarrega da consistência topológicas das entidades de cada resultado do processo.

5.4.3 Composição do resultados das operações booleanas

A composição um modelo resultante de uma operação booleana a ser representado pelo TDM, é empreendida nas entidades seleciondas e busca satisfazer as seguintes condiçòes:

1. filtragem topológica: a eliminação de entidades redundantes criadas durante o processo de interseção geométrica, e
2. verificação da validade do modelo: a filtragem topológica observa o princípio da validade do modelo, ou seja, que os dados armazenados consigam reproduzir um objeto da *NM-Classe*, isto é, um complexo celular

Durante a interseção geométrica, as entidades pertencentes a interseção dos dois objetos são criadas em ambas estruturas, e referenciadas mutuamente. Entretanto, ao término da operação as entidades duplicadas devem ser eliminadas. Outro tipo de entidade a ser eliminada é aquela criada para "recuperar" o interior de outra entidade, a este processo denominamos filtragem topológica. Exemplo, operação de diferença entre um subcomplexo-face e um subcomplexo-aresta, Figura 5.20.

Este módulo sofre ainda alguns problemas de funcionalidade, pois a filtragem novamente uiliza-se de testes geométricos; no entanto, o desligamento momentâneo desta funciolidade não compromete os resultados do processo. Os resultados fornecidos na próxima seção demonstram esta consideração.

5.5 Resultados da operação booleana fechada

Apresentamos neste espaço alguns resultados da implementação dos operadores booleanos fechados. A Figura 5.21 mostra a instanciação de dois objetos da *NM-Classe*.

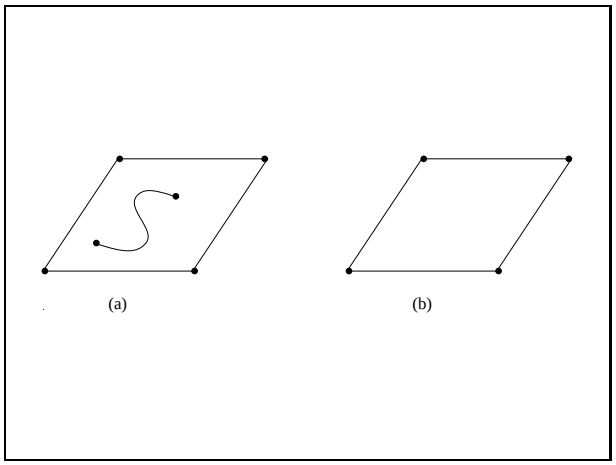

Figura 5.20: Operação booleana de diferença entre um subcomplexo-aresta (e) e um subcomplexo-face (f): (a) diferença $(f - e)$ (seleção), (b) eliminação da aresta redundante

Observa-se na Figura 5.21 que um dos complexos é formado por uma face côncava, mas os resultados das operações booleanas são válidos, isto é, os modelos resultantes pertencem a *NM-Classe*, e são mostrados na Figura 5.22.

Ressaltamos que nestes resultados não foi ativado o módulo de filtragem topológica; criado para a eliminação de entidades redundantes.

A Figura 5.23 mostra a operação booleana entre duas faces perpendiculares a uma superfície composta de duas faces conectadas por uma aresta

A Figura 5.24 mostra a operação booleana entre duas "cascas" que decrevem um cubo e um cilindro

Os resultados gerados e apresentados são válidos para o domínio de objetos da NM-classe; com isto, a representação através do TDM é conseguida e os operadores booleanos tornam-se um dos módulos mais versáteis dentro do sistema *ProSIm* para a manipulação geométrica.

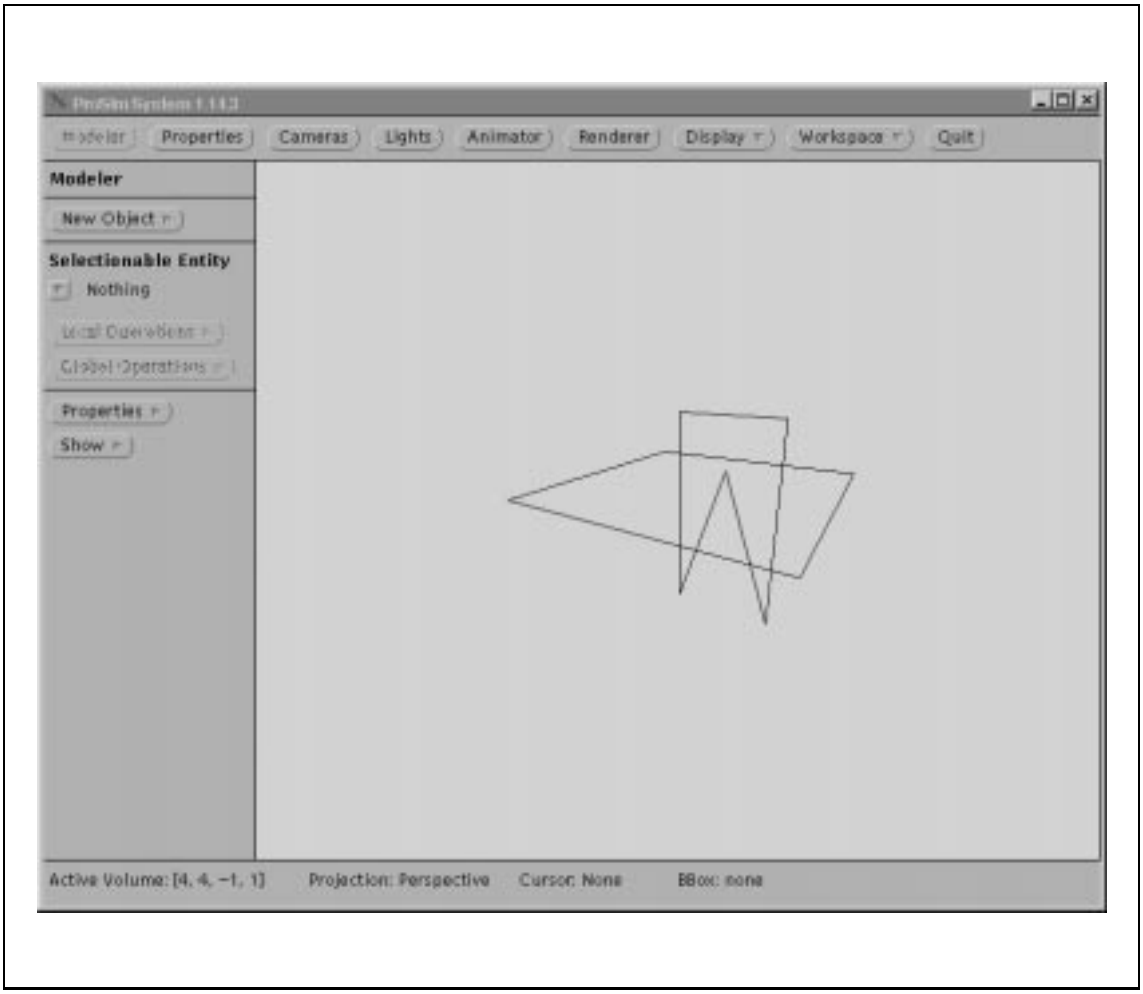

Figura 5.21: Visualização de objetos da *NM-Classe* através do *ProSIm*

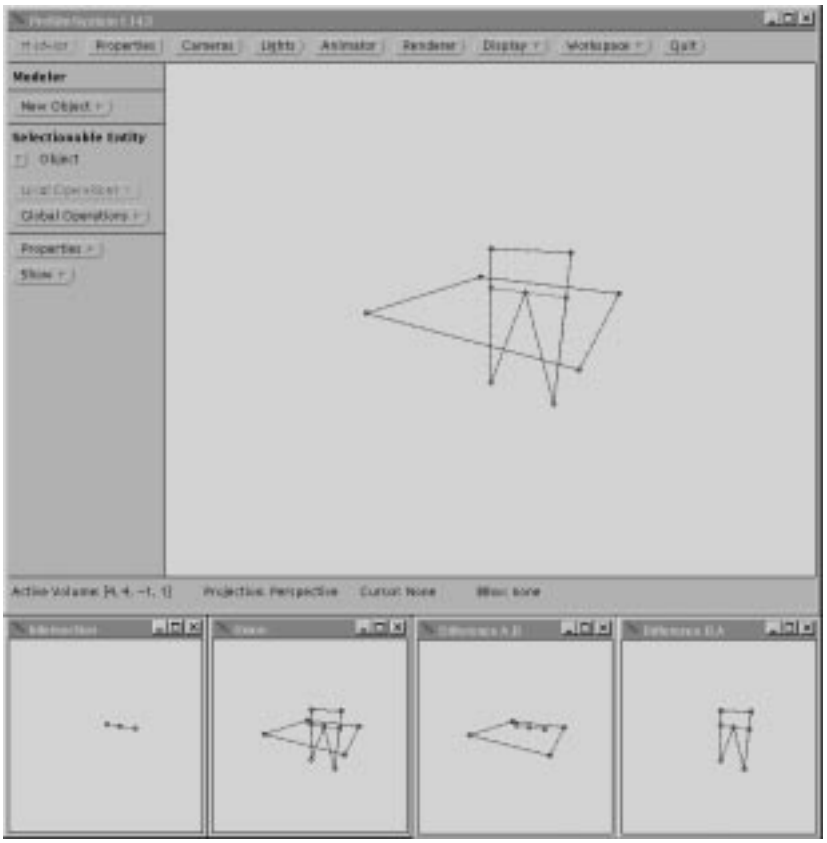

Figura 5.22: Operação booleana entre duas faces (uma convexa e uma côncava); quadro maior destaca linhas de interseção

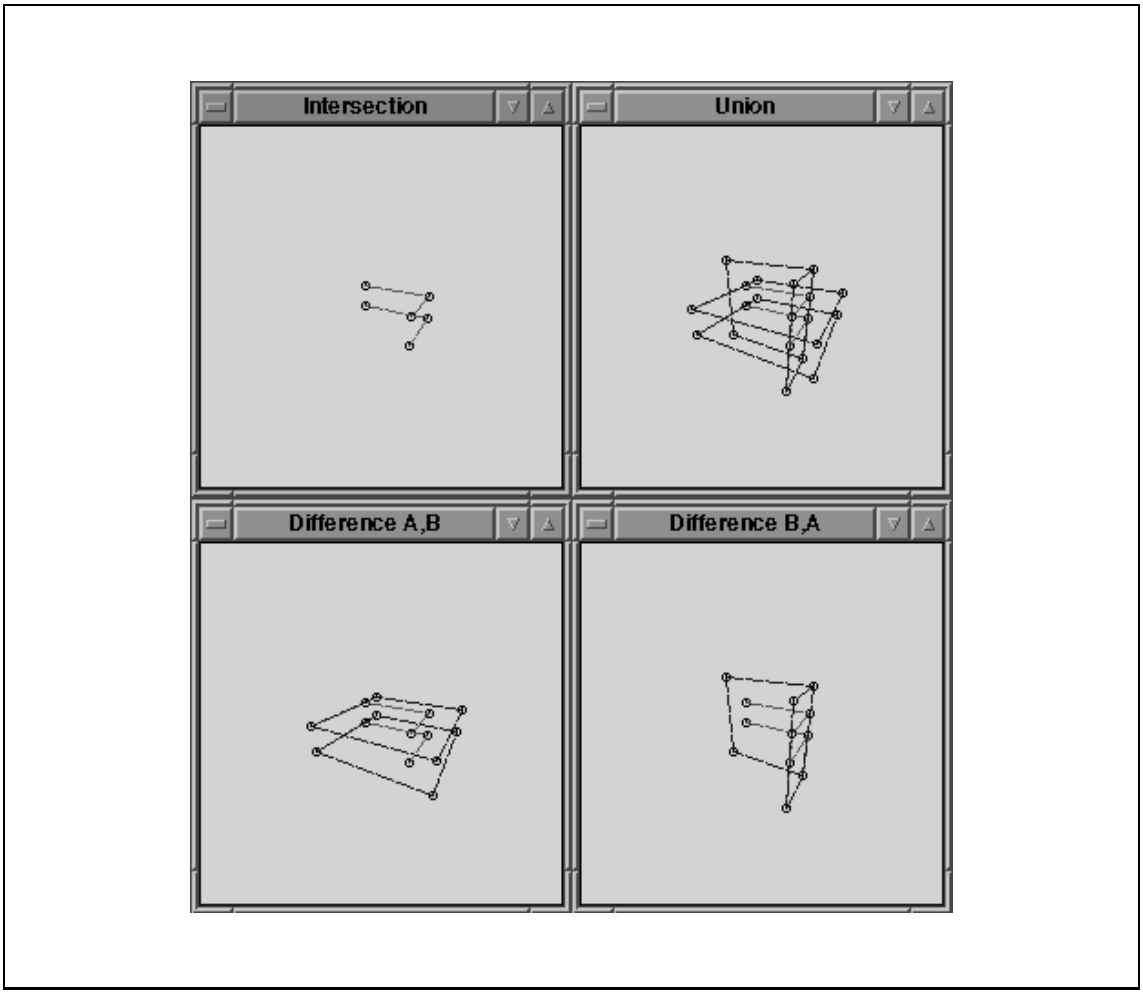

Figura 5.23: Combinações booleanas fechadas entre quatro faces

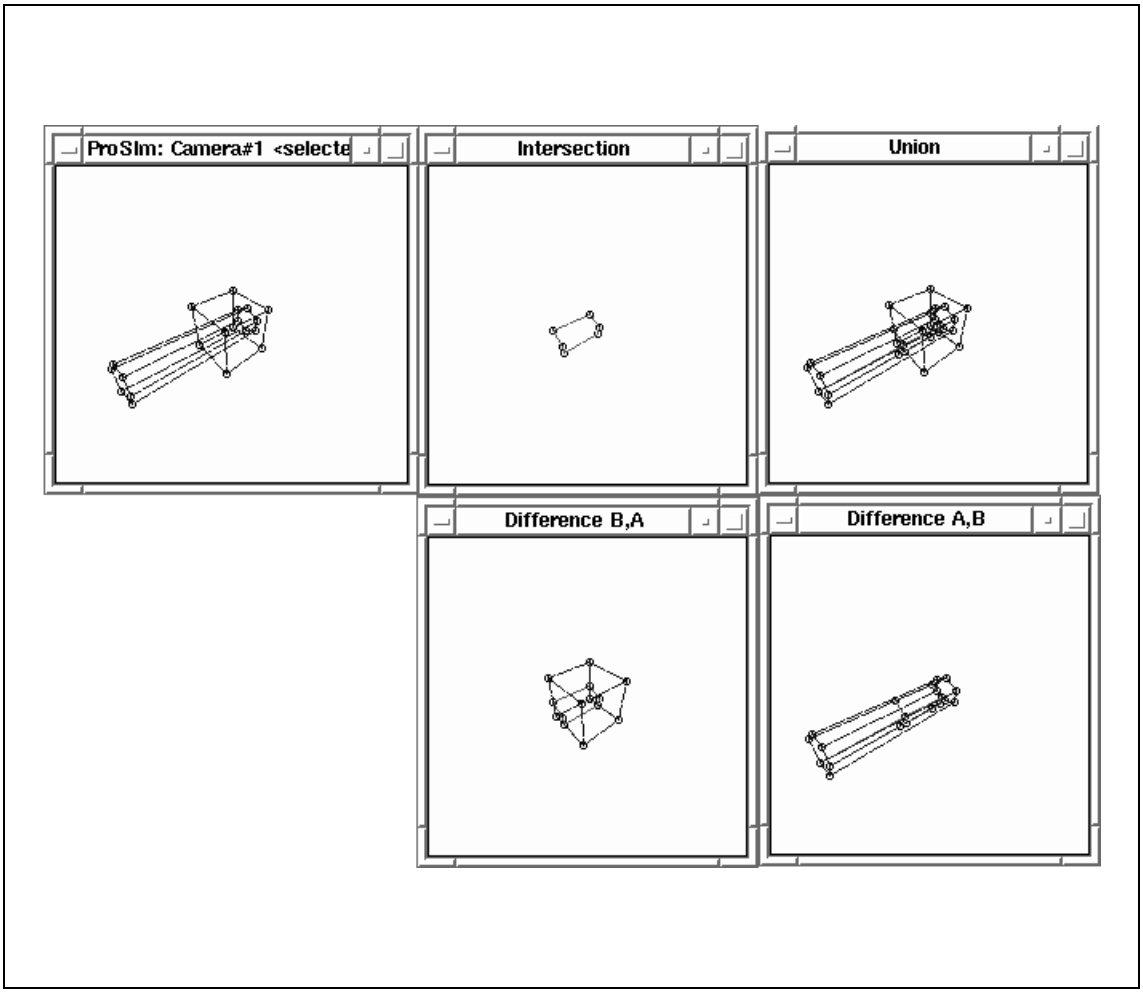

Figura 5.24: Combinações booleanas fechadas entre um cubo e um cilindro, ambos representados por "cascas"

Capítulo 6

Conclusão e sugestões para trabalhos futuros

Apresentamos um conjunto de operadores booleanos fechados sobre uma classe de objetos modelados por complexos celulares. Para viabilizar o processamento uniforme de objetos de dimensões heterogêneas introduzimos o conceito de espaço de imersão mínimo. O uso da noção de espaço de imersão mínimo permite classificar corretamente o tipo de vizinhança dos pontos comuns a objetos de dimensão distinta. Com isso, foi possível utilizar o mesmo padrão de algoritmos de combinações boolenas existentes, cujo maior trunfo é a redução de um problema complexo em problemas locais de determinação de vizinhanças de pontos. A implementação deste processo foi viabilizada graças a utilização de uma estrutura de dados eficiente, capaz de garantir a validade dos modelos e prover mecanismos eficentes para manipulação e recuperação de informações topológicas relativas a estes modelos.

O procedimento de classificação de pertinência proposto não é só um mecanismo eficiente na implementação dos operadores booleanos fechados sobre os objetos da *NM-Classe* como mostrado neste trabalho. Ele é também útil para quaisquer problemas que possam ser reduzidos ao problema de classificação de pertinência como o problema de deteção de colisão entre os objetos da *NM-Classe*.

O algoritmo proposto viabiliza ainda a concepção de algoritmos de operação booleana interativos, porque ele particiona indistintamente todos os pontos dos dois objetos que se interceptam. A partir dos subconjuntos obtidos é possível computar todas as possíveis combinações booleanas.

A função de classificação de pertinência foi implementada para processar pontos, segmentos e polígonos. Está em fase de desenvolvimento um algoritmo de interseção para

superfícies racionais no nosso laboratório. Pretende-se, como um dos futuros trabalhos, a inclusão dessas superfícies no domínio dos nossos objetos da *NM-Classe*. Para isto, é necessário prover algoritmo de classificação de vizinhanças de pontos para superfícies racionais.

Estamos estudando a possibilidade da inclusão de um módulo de interação com o usuário para os operadores booelanos. Este módulo teria por finalidade prover mecanismos para permitir ao usuário do sistema de modelagem ajustes finos no posicionamento dos objetos na cena afim de se conseguir resultados desejados, sem que todo o processo de operações booleanas tenha que ser refeito. A dificuldade reside em descobrir qual a magnitude das tranformações rígidas incrementais que não acarretam mudanças na estrutura topológica, pois desta forma, o processo seria refeito sem a necessidade de utilizar os módulos de classificação.

Visando algumas aplicações, os operadores booleanos fechados podem ser utilizados na detecção de colisão para objetos representados por fronteiras. Para isto, haveria a necessidade de se formular um conjunto de operadores booleanos regularizados baseados na nossa abordagem, o que não seria difícil. A detecção de colisão entre dois objetos é determinada pela comparação dos resultados da interseção regularizada e fechada; se o resultado da primeira for nulo e o resultado da segunda diferente for não-nulo, indica que os objetos se tocam. Isto permite a identificação da área de colisão.

Apêndice A

Topologia de Conjuntos Fechados

Apresentamos neste Apêndice alguns conceitos relativos a topologia de conjuntos fechados, bem como algumas propriedades relativas a fecho, interior e fronteira de conjuntos. Noções de espaço topológicos, homeomorfimos e vizinhanças de conjuntos também são apresentadas.

O objetivo deste apêndice é de suprir alguns conceitos elementares relativos a teoria dos conjuntos e topologia geral, desta forma, estes assuntos são colocados de forma sucinta e quaisquer necessidade de aprofundamento nas demostrações o leitor deve buscar em Kuratowsky e Mostowsky [20], Mendelson [19], e Requicha e Tilove [29]. Além destas referências básicas, algumas outras fontes são citadas durante a apresentação dos assuntos.

A.1 Conceitos elementares de topologia

Esta seção tem o objetivo de apresentar conceitos elementares sobre topologia, que visam facilitar a leitura do restante do capítulo e prover uma base conceitual para as definições que requerem conhecimentos acerca da área, de forma intuitiva e de fácil compreensão.

A.1.1 Espaço topológico

Os espaços topológicos podem ser visto como uma generalização dos espaços métricos, nos quais a noção de proximidade é colocada de forma abstrata sem precisar a existência da distância.

Definição 1 *Um espaço topológico é um par (W, τ), onde W é um conjunto, τ é uma classe de subconjuntos abertos de W denominado topologia de (W, τ), os elementos de W são chamados de pontos, e que satisfazem as seguintes condições:*

- *A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é aberto.*
- *A interseção de quaisquer dois (consequëntemente de quaisquer número finito) de conjuntos abertos é aberto.*
- *O conjunto vazio $\emptyset$ é aberto.*
- *O conjunto universo W é aberto.*

A.1.2 Sistema de vizinhança

Apresentamos em primeira instância a noção de sistema de vizinhança de um ponto x de um conjunto como segue:

Definição 2 *Dado X ser um conjunto, e para cada ponto de $x \in X$, dado $N_x = \{N(x)\}$ ser uma família de subconjuntos não-vazios de X associada a x tal que:*

1. *$x \in N(x)$ para cada $N(x) \in N_x$*
2. *Se $V \supseteq N(x)$ para todo $N(x)$, então*

Intuitivamente, uma vizinhança $N(x)$ de um ponto x em um espaço topológico (W, τ) é qualquer subconjunto de W que contém um conjunto aberto o qual contém x. Se $N(x)$ é um conjunto aberto, então ele é chamado vizinhança aberta [29].

A.1.3 Homeomorfismo

Definição 3 *Dado X e Y espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma função um-para-um de X em Y (tal que f^{-1} seja também uma função). Ademais, dado f e f^{-1} serem contínuas, então f é dito ser um* **homeomorfismo** *[2].*

Os dois espaços são ditos ser topologicamente equivalentes. Intuitivamente, pode ser pensado como uma "deformação elástica" que preserva a adjacências, ou seja, uma transformação sem cortes ou emendas [29].

Os espaços homeomorfos também podem ser chamados de topologicamente equivalentes. Os homeomorfismos desempenham um papel na topologia semelhante ao dos movimentos rígidos na geometria euclidiana, pois dois conjuntos homeomorfos são indestingüíveis do ponto de vista topológico, A Figura A.1 mostra alguns exemplos de homeomorfismos.

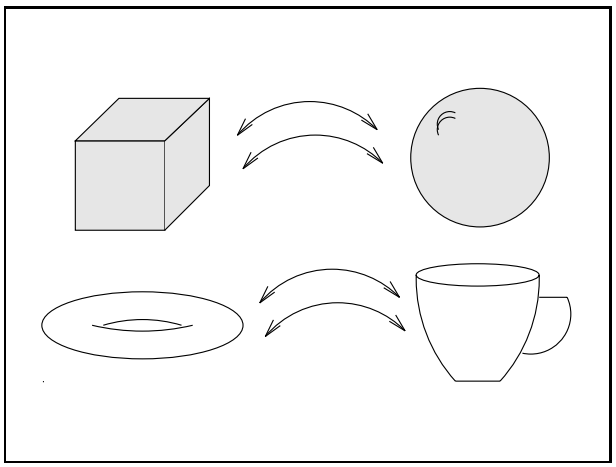

Figura A.1: Exemplos de homeomorfismos

A.2 Conjuntos fechados

O complemento de um conjunto X, denotado por $\overline{X}$, em relação ao universo W é $\overline{X} = W - X$, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos do conjunto universo que não pertencem a X.

Definição 4 *Um subconjunto do espaço topológico* (W, τ) *é fechado se seu complemento é aberto, isto é, se* $\overline{X}$ *pertence a* τ.

É interessante observar que os conjuntos fechados não são "opostos" aos conjuntos abertos. Os conjuntos vazio e o universo são ambos fechados e abertos. Também, existem conjuntos que não são nem abertos nem fechados, considere os três casos seguintes intervalos na reta $\Re$:

- o intervalo $[a, b]$ é fechado.
- o intervalo (a, b) é aberto.

- o intervalos $[a, b)$ não é aberto nem fechado

Os conjuntos fechados guardam algumas propriedades interessantes [29], que são:

1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o universo W são ambos fechados.
2. A união de um número finito de conjuntos fechados também é um conjunto fechado.
3. A interseção de qualquer coleção de de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

A.3 Pontos limites, interior, fronteira e fecho de um conjunto

Definição 5 *Um ponto x é um ponto limite de um subconjunto X de um espaço topológico (W, τ) se cada vizinhança de x contém pelo menos um ponto de X diferente de x [2].*

Os pontos limites de um conjunto não necessariamente são elementos deste conjunto. Por exemplo, no intervalo aberto (0,1) em $\Re$, 0 e 1 são pontos limites, mas não pertencem ao intervalo. Um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos limites [29].

Definição 6 *Dado um conjunto X de um espaço topológico (W, τ). O conjunto derivado de X, escrito com $X\prime$, é o conjunto de todos os $x \in W$ tal que x seja um ponto limite de W.*

Com os elementos que temos, podemos tomar um conjunto X arbitrário em um espaço W, e derivar deste conjunto um novo conjunto, $X\prime$, o conjunto dos pontos limites de X, a junção dos pontos de X e $X\prime$ constrói um conjunto definido como segue:

Definição 7 *Dado um conjunto X de um espaço topológico (W, τ). o fecho do conjunto X, denotado por $k(X)$, é o conjunto $X \cup X\prime$.*

A operação fecho goza de algumas propriedades, dentre as quais relacionamos as seguintes:

- Se x é um ponto de de $k(X)$ cada vizinhança de x intersecta X.
- O fecho de X é o menor conjunto fechado que contém X, ou seja, é a interseção de todos os conjuntos fechados que contém X.
- Se X é subconjunto de Y, então, $k(X)$ é subconjunto de $k(Y)$.

- $k(X \cup Y) = k(X) \cup k(Y)$.
- O conjunto $k(X \cap Y)$ é subconjunto de $k(X) \cap k(Y)$.

Definição 8 *Um ponto x de W é um ponto interior de um subconjunto X de W se X é uma vizinhança de x, isto é, se X contém um conjunto aberto que contém x. O interior de X, escrito como iX, é o conjunto de todos os pontos interiores de X.*

Algumas propriedades importantes relacionadas ao interior de um conjunto:

1. O interior de X é o maior conjunto aberto contido em X, ou seja, é a união de todos os conjuntos abertos contidos em X.
2. $X = iX$ se e somente X é aberto.
3. Se X é subconjunto de Y, então, iX é subconjunto de iY.
4. $iX = \overline{k(\overline{X})}$.
5. $\overline{iX} = k(\overline{X})$.
6. $\overline{k(X)} = i(\overline{X})$.
7. $i(X \cap Y) = iX \cap iY$.
8. O conjunto $iX \cup iY$ é subconjunto de $i(X \cup Y)$.
9. $i(X - Y) = iX - iY$.

Definição 9 *Um ponto x de W é um ponto da fronteira de um subconjunto X de W se cada vizinhança de x intersecta ambos X e $\overline{X}$. A fronteira de X, denotada por bX, é o conjunto de todos os pontos de fronteira de X.*

A fronteira de um conjunto goza das seguintes propriedades (inclusive o primeiro item pode ser utilizado como uma definição alternativa para fronteira):

1. $bX = k(X) \cap k(\overline{X})$.
2. O conjunto bX é um conjunto fechado.
3. $bX = b\overline{X}$.
4. $k(X) = iX \cup bX = X \cup bX$
5. Para qualquer subconjunto X de W, $W = iX \cup bX \cup i\overline{X}$, onde os três conjuntos do lado direito da expressão são disjuntos dois-a-dois.

Referências Bibliográficas

[1] M.A Armstrong. *Basic Topology.* Springer-Verlag, 1983.

[2] J.D. Baum. *Elements of Point Set Topologia.* Dover Publications, Inc., New York, 1991.

[3] B. Bruderlin. Detecting ambiguities: An optimistic approach to robustness problems in computation geometry. Technical Report UUCS-90-003, Computer Science Department, University of Utah, Salt Lake City, Apr. 1990.

[4] B. Bruderlin. Robust regularized set operations on polyhedra. Technical Report UUCS-90-004, Computer Science Department, University of Utah, Salt Lake City, Apr. 1990.

[5] S.T. Wu; L.G. da Silveira Júnior. *TDM-Topological Data Module (User Manual).* Dep. de Eng. da Comput. e Aut. Industrial - Fac. de Eng. Elétrica e de Computação, 96. em preparo.

[6] F.B. Prinz E.L. Gursoz. A point set approach in geometric modeling. In H. Jansen F.-L. Krause, editor, *Advanced Geometric Modelling For Engineering Aplications*, pages 63–77, Berlin (West) FRG, Nov. 1989. International GI-IFIP Symposium.

[7] F.B. Prinz E.L. Gursoz, Y. Choi. Vertex-based representation of non-manifold geometric models. In K. Preiss M. Wozny, J. Turner, editor, *Geometric Modeling for Product Engineering*, pages 107–130. North Holland, 1990.

[8] F.B. Prinz E.L. Gursoz, Y. Choi. Boolean set operations on non-manifold boundary representations objects. *Computer Aided Design*, 23(1):33–39, Jan. 1991.

[9] A. Paoluzzi; *et. al.* Dimension-independent modeling with simplicial complexes. *ACM Transactions on Graphics*, 12(1):56–102, Jan. 1993.

[10] C. Hoffmann; J. Hopcroft. Geometric ambiguities in boundary representations. Technical Report TR 86-725, Dep. of Computer Science - Cornell University, Ithaca, New York, Jan. 1986.

[11] K. Jänich. *Topology.* Springer-Verlag, 1984.

[12] C.M. Hoffman; G. Vanecek Jr. Fundamental techniques for geometric and solid modeling. Technical report, Computer Science, Purdue University, June 1991.

[13] A.A.G. Requicha J.R. Rossignac. Constructive non-regularized geometry. *Computer-Aided Design*, 23(1):21–32, feb. 1991.

[14] C.M. Hoffmann; J.E Hopcroft; M.S. Karasick. Robust set opartions on polyhedral solids. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 50–59, Nov. 1989.

[15] M. Mäntylä. A note on the modeling space of euler operators. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 26(1):45–60, 1984.

[16] M. Mäntylä. Boolean opeartions of 2-manifolds through vertex neighborhood classification. *ACM Transactions on Graphics*, 5(1):1–29, Jan. 1986.

[17] M. Mäntylä. *An Introduction to Solid Modeling.* Computer Science Press Inc., USA, 1988.

[18] H. Masuda. Form-feature representation based on non-manifold geometric modeling. In *MICAD*, pages 17–35, Paris, França, Fev. 1992.

[19] B. Mendelson. *Introduction to Topology.* Allyn and Bacon Inc, 3rd edition, 1975.

[20] K. Kuratowsky; A. Mostowsky. *Set Theory.* North Holland Publising Co., 1976.

[21] J.R. Rossignac; M.A. O'Connor. Sgc: A dimension-independent model for pointsets with internal structures and incomplete boundary. In J.U Turner; K. Preiss (Editors) M.J. Wozny, editor, *Geometric Modeling for Product Engineering*, pages 145–180. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), Rensselaerville, N.Y., 1990.

[22] G.A. Crocker; W.F. Reinke. An editable nonmanifold boundary representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 39–51, Mar. 1991.

[23] A.A.G. Requicha. Representation of rigid solids - theory, methods, and systems. *ACM Computer Surveys*, 12(4):437–465, Dec. 1980.

[24] A.A.G. Requicha; J.R. Rossignac. Solid modeling and beyond. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 31–44, Sep. 1992.

[25] M. Segal. Using tolerances to guarantee valid polyhedral modeling results. In *Computer Graphics (Proc. Siggraph)*, volume 24. ACM Computer Graphics, Aug. 1990.

[26] H. Desaulniers; N. F. Stewart. An extension of manifold boundary representation to the r-sets. *ACM Transactions on Graphics*, 11(1):40–60, Jan. 1992.

[27] F. Tampieri. Newell's method for computing equation of a polygon. In D. Kirk, editor, *Graphics Gems III*, pages 231–232. Academic Press, Inc, 1994.

[28] B. Naylor; J. Amanatides; W. Thibault. Merging bsp trees yields polihedral set operations. In *Computer Graphics (Proc. Siggraph)*, volume 24, pages 115–124, Dallas-USA, Aug. 1990. ACM Computer Graphics.

[29] A.A.G. Requicha; R.B. Tilove. Mathematical foundations of constrcutive solid geometry: General topology of closed regular sets. Technical Memoradum 27a, College of Engineering and Applied Science. University of Rochester, Rochester, New York, June 1978. Production Automation Project.

[30] R.B. Tilove. A study of geometric set-membership classification. Technical memoradum, College of Engineering and Applied Science. University of Rochester, Rochester, New York, Nov. 1977. Production Automation Project.

[31] P.C.P. Carvalho; J.M. Gomes; L. Velho. Space decompositions: Theory and practice. Technical report, IMPA, Rio de Janeiro, jul. 1994.

[32] A.A.G. Requicha; H.B. Voelcker. Constrcutive solid geometry. Technical Memoradum 25, College of Engineering and Applied Science. University of Rochester, Rochester, New York, Nov. 1977. Production Automation Project.

[33] A.A.G. Requicha; H.B. Voelcker. Boolean operations in solid modeling: Boundary evaluation and merging algorithms. *Proceedings of the IEEE*, 73(1):30–44, Jan. 1985.

[34] K.J. Weiler. *Topological structures for geometric modeling.* PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Aug. 1986.

[35] S.T. Wu. Towards a unified data scheme for geometrical representations. In A. Rolst$\overline{a}$s F. Kimura, editor, *Computer Applications in Production and Engineering*, pages 259–266. Elsevier Science Publishers (North-Holland), 1989.

[36] S.T. Wu. Considerations about minimal set of non-manifold operators. In *Workshop on Geometric Modeling*, pages 17–21, Rensselaerville, New York, June 1990.

[37] S.T. Wu. *Topologie von Hybriden Objekten.* PhD thesis, Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Germany, 1991.

[38] S.T. Wu. Non-manifold data models: Implementation issues. In *MICAD*, pages 37–56, Paris, Fev. 1992.