DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Análise Topológica de um Modelo Implícito

Autor: **Marcelo de Gomensoro Malheiros**

Orientadora: **Prof$^{\underline{a}}$. Dr-Ing. Wu, Shin-Ting**

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo, IMPA
Prof. Dr. Leo Pini Magalhães, FEEC, UNICAMP

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de **Mestre em Engenharia Elétrica**.

23 de julho de 1999

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo das configurações topológicas de uma família de superfícies definidas implicitamente. É proposto um novo modelo com base em funções implícitas compostas por primitivas esféricas de suporte local. Uma superfície implícita corresponde a um conjunto de nível de uma destas funções, associado a um valor denominado limiar. De acordo com a Teoria de Morse, a topologia dessa superfície está relacionada com os pontos críticos da função correspondente. Portanto, foi desenvolvido um procedimento genérico para a determinação destes pontos com base na coerência das regiões de influência induzidas pelo modelo. Diferentemente das técnicas existentes, que efetuam buscas irrestritas no espaço, o método desenvolvido fornece estimativas com boa precisão das posições dos pontos críticos. Isso possibilita que a procura numérica das posições exatas seja mais robusta e que tenha convergência mais rápida.

Abstract

This work presents an analysis of the topological configurations of a family of implicitly defined surfaces. A new model is proposed, based on implicit functions made of spherical primitives with local support. An implicit surface corresponds to a level set of one of these functions, associated to a value called threshold. From Morse Theory, the topology of that surface is related to the critical points of the corresponding function. Therefore, a generic procedure was developed for the determination of these points based on the coherence of the influence regions induced by the model. Unlike existing techniques, which make unrestricted searches in the space, the developed method gives estimates of the positions of critical points with good precision. This makes possible that the numerical search for the exact positions be more robust and have faster convergence.

Agradecimentos

À minha orientadora Ting, por sua paciência e por ter me guiado com sua experiência quando tudo parecia turvo e sem saída.

À minha mãe Maria Lucia e à minha irmã Patricia, pelo constante estímulo e confiança.

Aos meus amigos Daniel e Mirja, pela motivação e suporte nos momentos mais difíceis.

Ao CNPq, pelo financiamento deste estudo.

E em especial à Paulinha, que me emprestou um pouco de sua luz e alegria quando eu mais precisei.

Sumário

Eu dedico esta tese ao meu querido avô Tancredo,

que me mostrou a arte que existe na técnica,

que me fez ver a beleza que permeia a Ciência,

e que me inspirou com sua sabedoria e generosidade.

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho apresenta a análise da topologia de superfícies definidas implicitamente por uma família de funções proposta. A discussão aqui feita dá ênfase ao aspecto computacional dessas superfícies, em vista de fornecer ferramentas que auxiliem sua visualização.

É pressuposto um conhecimento básico do leitor nas áreas de Modelagem Geométrica, Algoritmos e Álgebra Linear.

A seção seguinte descreve o histórico e a motivação deste trabalho. Logo após, a organização do restante do texto é apresentada, seguida por um breve resumo da notação utilizada.

1.1 Motivação

A motivação inicial para se trabalhar com modelos implícitos veio de sua versatilidade como representação geométrica.

Ao contrário do que ocorre para modelos paramétricos (ou explícitos), superfícies definidas implicitamente têm a propriedade de poderem ser combinadas e alteradas através da simples manipulação algébrica das funções que as definem. Desta forma, objetos com topologia arbitrária podem ser construídos com relativa facilidade.

Além disso, a continuidade geométrica de uma superfície implícita está diretamente relacionada com a continuidade de sua função. Assim, pode-se garantir a "suavidade" de um determinado objeto independentemente de sua complexidade geométrica. Já representações paramétricas exigem que várias condições de contorno sejam satisfeitas simultaneamente para que um nível equivalente de continuidade para a superfície modelada seja atingido.

Apesar destas vantagens, só começou a haver um maior volume de trabalhos publicados sobre representações implícitas a partir da década de oitenta. Até então, modelos paramétricos e representações por fronteira dominavam quase que inteiramente a área de Modelagem Geométrica.

Este interesse tardio da comunidade acadêmica em relação a modelos implícitos pode ser explicado em parte por uma limitação intrínseca a tais modelos: a dificuldade de efetuar sua visualização.

Por não existir um vínculo explícito entre a função que define uma superfície e a geometria da mesma, as técnicas mais empregadas para visualização utilizam métodos exaustivos de amostragem, sempre envolvendo alto custo computacional. Em particular, a técnica de *ray-tracing* é considerada a mais adequada e que fornece imagens mais fiéis de objetos implícitos.

Com o aumento da popularidade destas representações, os sistemas de modelagem e animação passaram gradualmente a incorporar suporte para as mesmas. Contudo, um fator que sempre limitou a sua utilização foi o custo de visualização, que restringia a capacidade de se manipular objetos implícitos em tempo real.

Sendo esta manipulação interativa um problema em aberto e com poucos trabalhos relacionados já publicados, nosso interesse voltou-se para a pesquisa de técnicas alternativas de visualização de superfícies implícitas.

O primeiro passo foi definir o modelo a ser utilizado. Optou-se pela abordagem de modelos baseados em esqueletos, no qual uma superfície implícita é definida em termos de funções predefinidas. Tais funções correspondem a primitivas implícitas, que estão associadas a elementos geométricos simples, tais como pontos ou segmentos de reta. A superfície é então construída pela disposição espacial de um conjunto destes elementos, denominado esqueleto, que induz a função matemática que define a superfície.

Esta abordagem baseada em esqueletos permite um alto grau de controle da superfície resultante e apresenta boa representatividade. Além disso, ela provê um paradigma bastante intuitivo para a construção de objetos implícitos, o que vai de encontro ao nosso interesse em modelagem interativa.

O modelo que nós inicialmente adotamos consistia em uma generalização dos modelos mais conhecidos baseados em esqueletos [Blinn82, Nish85, Wyv86a], empregando uma estrutura hierárquica para efetuar a combinação entre as primitivas. Este modelo foi apresentado em [Malh97], sendo similar a outro trabalho recente, denominado *BlobTree* [Wyv98].

De início optamos por utilizar a técnica proposta por Figueiredo *et al.* [Fig92, Fig96]. Esta técnica efetua a amostragem de uma superfície implícita por um grande número de pontos, utilizando um sistema de partículas. As partículas são inicialmente espalhadas arbitrariamente em uma região do espaço, sendo então sujeitas a um campo vetorial que faz com que estas se aproximem da superfície. Uma vez atingido o repouso sobre a superfície, cada partícula corresponde a uma amostra pontual do objeto implícito.

Nossa idéia era efetuar a simulação completa do sistema de partículas apenas em uma etapa inicial, obtendo um grande número de amostras de forma a permitir a visualização da superfície. Uma vez modificadas interativamente as posições das primitivas que compunham o esqueleto, seria necessário visualizar a forma da nova superfície. Levando em conta a coerência espacial destas modificações, novas amostras poderiam ser obtidas com base nas posições anteriores das partículas. Trechos da superfície que não se modificaram manteriam as mesmas amostras, ao passo que partes que tenham mudado seriam amostradas pelas partículas de sua vizinhança.

Esta estratégia mostrou-se válida somente para uma situação particular, quando a manipulação ocorria em etapas graduais e sobre modelos simples. Quando as modificações do esqueleto ocorriam em pequenos passos, as distâncias que as partículas tinham de percorrer em cada etapa eram pequenas. Isso fazia com que estas partículas atingissem a nova superfície com rapidez.

Entretanto, muitas partículas ficavam "perdidas" quando mudanças mais abruptas ocorriam no modelo, demorando para convergir para a superfície. Além disso, após várias manipulações, a regularidade da amostragem ficava bastante comprometida, pois determinados trechos da superfície concentravam muitas amostras, ao passo que outros trechos acabavam ficando subamostrados. Isso acontecia também quando ocorriam mudanças na topologia da superfície.

Para modelos complexos, esta simulação também apresentou problemas, pois em muitas situações determinadas partículas levavam muito tempo para convergir. Em particular, quando havia primitivas com pesos negativos, criavam-se regiões que expulsavam partículas, dificultando a amostragem da superfície em sua vizinhança.

Diversas estratégias foram tentadas para melhorar a distribuição das amostras. Em particular, cogitou-se seguir a proposta de Witkin e Heckbert [Wit94], na qual é garantida uma regularidade para a amostragem pelo uso de um sistema de equações que mantém as partículas presas à superfície. Apesar da qualidade dos resultados obtidos nesse trabalho, estimamos que o custo de manter um sistema de equações tão complexo tornasse pouco viável a manipulação interativa de objetos com muitas primitivas.

Além disso, um fator determinante para o abandono desta linha de pesquisa foi a qualidade da visualização obtida. Apesar de perceptualmente adequada para modelos simples, a amostragem pontual mostrou-se insuficiente para garantir uma boa compreensão de modelos mais complexos.

Em particular, a falta de senso de profundidade foi especialmente crítica em nossa avaliação. Mesmo com o emprego de técnicas de *fog*, com a tonalização das amostras de acordo com a sua distância até o observador, não foram satisfatórios os resultados obtidos. Ficou então claro que seria necessário investir em abordagens que provessem uma visualização opaca da superfície implícita.

O uso de discos centrados nas amostras e orientados conforme a normal da superfície em cada uma delas, tal como sugerido por Witkin e Heckbert, a princípio poderia fornecer uma melhor noção de volume. A dificuldade estaria em estimar o tamanho de tais discos, de forma a cobrir adequadamente a superfície. Discos muito grandes poderiam dar falsa noção de planaridade local, além de interceptarem discos adjacentes, gerando certa "sujeira" visual. Discos muito pequenos dariam um resultado semelhante ao caso anterior com partículas.

Idealmente, procurávamos uma técnica que permitisse construir e manter uma malha poligonal para a superfície implícita durante sua manipulação interativa. Como tal malha corresponderia a uma aproximação discreta da superfície contínua, deveria existir um compromisso entre a precisão desta aproximação e rapidez com que seria feita a realimentação (*feedback*) para o usuário. Seria importante ainda garantir a compatibilidade entre a topologia da superfície e a da malha.

As técnicas clássicas de poligonização de superfícies implícitas se baseiam na subdivisão regular do espaço em células cúbicas [Wyv86a, Bloom88]. A função implícita é calculada em cada vértice de cada célula para se determinar quais células interceptam a superfície. Em seguida, estas células são percorridas e em cada uma é construído um polígono, que aproxima localmente a intersecção com a superfície. Ao final do processo obtém-se uma malha aproximativa.

Como a função implícita precisa ser avaliada em cada vértice, o custo desta técnica é elevado, o que restringe seu uso à visualização não-interativa. Diversos aprimoramentos foram propostos, incluindo o uso de células tetraédricas, subdivisão adaptativa e construção gradual da malha. Contudo, nos parece que técnicas baseadas em subdivisão espacial são intrinsecamente custosas, o que limita sua utilização em tempo real.

Um método alternativo que nos pareceu bastante promissor foi proposto por Desbrun, Tsingos e Gascuel [Desb95a]. Por conveniência, vamos nos referir a este algoritmo por DTG, que corresponde às iniciais dos sobrenomes dos autores.

Ao invés de procurar amostrar a superfície implícita de uma só vez, o algoritmo DTG utiliza a organização do esqueleto em primitivas para fazer uma amostragem pontual por partes. Adicionalmente, uma estruturação local é imposta a cada primitiva, possibilitando a criação de uma malha poligonal para cada uma delas. Estas malhas são então exibidas simultaneamente, fornecendo uma aproximação global para a superfície.

Este método apresenta diversas vantagens em relação à subdivisão espacial, em particular um custo mais baixo e a capacidade de criar malhas que aproximam a superfície implícita localmente.

Em vista disso, implementamos a técnica DTG para uma classe mais limitada de modelos, nos quais utilizávamos primitivas elipsoidais com pesos positivos. Primitivas mais complexas foram inicialmente deixadas de lado por simplicidade, enquanto pesos negativos foram descartados, pois poderiam introduzir inconsistências no algoritmo original. Restringimos também o modelo à utilização de operações de combinação lineares, pois isto simplificava o processo de amostragem.

Observamos que a aproximação poligonal da superfície implícita apresentava descontinuidades entre as malhas associadas a cada primitiva, que se interpenetravam. Se por um lado esta aproximação permitia a compreensão correta das dimensões e forma da superfície, por outro lado poderia causar interpretações errôneas quanto à sua topologia.

Para tentar eliminar estas descontinuidades, restringimos a exibição das malhas somente aos trechos que aproximavam diretamente a superfície, o que resultou em um conjunto de retalhos poligonais disjuntos. Neste momento ficou claro que, caso fosse possível efetuar uma "costura" entre estes retalhos, a malha resultante seria uma aproximação bem mais fiel da superfície implícita.

Uma primeira tentativa foi feita subdividindo-se a fronteira destes retalhos sob demanda. A idéia era empregar uma estrutura de malha triangular hierárquica [Flor95] para que esta subdivisão pudesse ser feita e revertida a cada interação. O resultado, porém, foi pouco satisfatório, pois o custo extra da subdivisão não justificava a pequena redução da “lacuna” entre os retalhos. Constatamos que tal lacuna somente seria adequadamente fechada na situação limite em que a subdivisão da fronteira é feita um número infinito de vezes.

A tentativa seguinte correspondeu à construção de uma costura explícita entre os retalhos. Inicialmente a borda de cada retalho era identificada e dividida em seções, denominadas “tiras”, de acordo com a proximidade entre as primitivas. Em seguida eram identificados pares de tiras adjacentes, que então eram unidos por uma seqüência de faces triangulares [Chris78, Mey92]. Na extremidade de cada uma destas seqüências sobravam duas arestas. Todas estas arestas restantes eram agrupadas em ciclos, sendo fechados por mais faces triangulares e completando a malha aproximativa.

Para a grande maioria das situações, o procedimento descrito produziu uma malha que aproximava adequadamente a superfície implícita. Entretanto, em alguns casos particulares ocorriam problemas, tais como diferenças de paridade entre as tiras ou impossibilidade de fechar a malha. Em especial, algumas vezes a topologia da malha não correspondia à topologia da superfície original. Uma análise superficial não foi, contudo, suficiente para determinar se estes problemas eram devidos à amostragem discreta ou eram inerentes ao algoritmo DTG.

Isso nos motivou a fazer uma análise mais completa de nosso modelo implícito. De posse de um conhecimento mais aprofundado sobre o mesmo, esperávamos dispor de ferramentas que garantissem a correção topológica da aproximação poligonal.

Inicialmente partimos para a caracterização das regiões de dominância induzidas pelo esqueleto. Uma região de dominância corresponde à região do espaço onde a influência de uma primitiva é maior que a de outras. Estas regiões eram utilizadas indiretamente em nosso algoritmo de costura para estabeler a proximidade entre os retalhos, definindo quais pares de tiras seriam ligados.

Resolvemos fixar o peso de todas primitivas como sendo unitário, pois isso simplificava a identificação das regiões de dominância. Para um esqueleto composto somente de primitivas esféricas de mesmo raio, as regiões de dominância coincidiam com um diagrama de Voronoi clássico no espaço [Auren91], cujos sítios[1] correspondiam aos centros das primitivas. Este resultado se explica pelo fato de que a influência de uma primitiva em um dado ponto do espaço pode ser visto como uma métrica particular, envolvendo tal ponto e o centro desta primitiva. Como

[1] Sítios são pontos que definem um diagrama de Voronoi.

nesta primeira situação todas as primitivas tinham raio unitário, a simetria das influências era equivalente à distância euclidiana, utilizada como métrica em um diagrama de Voronoi clássico.

Para primitivas ainda esféricas, mas com raios arbitrários, as regiões de dominância correspondiam a um diagrama de Voronoi de pesos multiplicativos, ou modelo de Apolônio, descrito em [Auren84]. Este diagrama mostrou-se um pouco mais complexo, apresentando regiões não-convexas e não-conexas, separadas por trechos de planos e superfícies esféricas.

O caso geral com primitivas elipsoidais correspondia a um diagrama de Voronoi ainda mais complexo, com regiões do espaço separadas por superfícies quádricas arbitrárias. Optamos mais uma vez por simplificar o modelo implícito sendo estudado, utilizando somente primitivas esféricas.

Com base na caracterização das regiões de dominância, pudemos observar que, para primitivas esféricas de mesmo raio, a amostragem feita pelo algoritmo DTG é correta. Ou seja, a construção de retalhos na vizinhança das primitivas fornece uma aproximação adequada para a superfície implícita. Problemas nesta situação poderiam advir única e exclusivamente de subamostragem.

Para primitivas com raios distintos, a amostragem comete erros quanto maior for a diferença entre os raios. Com duas primitivas, o erro cometido ainda é aceitável, pois o algoritmo de costura ainda é capaz de aproximar corretamente a superfície. Entretanto, para três ou mais primitivas, pode haver situações onde trechos inteiros da superfície não são amostrados. Além disso, quando existem regiões onde há influência simultânea de várias primitivas, a definição de pares de tiras pode ser incorreta.

Coincidentemente, tomamos conhecimento na mesma época de um trabalho feito por Crespin, Guitton e Schlick [Cres98], que descrevia um procedimento de costura para o DTG bastante semelhante ao que desenvolvemos. A diferença mais significativa em relação ao nosso trabalho consistia no uso da segunda dominância para definir o casamento entre as tiras. Ou seja, examinar quais primitivas apresentavam a segunda maior influência em um dado ponto. Em teoria isto poderia propiciar menos situações de ambigüidade durante a costura, porém não foi possível fazer estudos mais aprofundados nesta direção.

No decorrer de nossa análise, notamos a similaridade entre os elementos de um diagrama de Voronoi e a posição e cardinalidade dos pontos críticos. Isto nos sugeriu a possibilidade de uma procura direcionada pelos mesmos. Ao contrário dos métodos de busca exaustiva no espaço por pontos críticos utilizado por Stander e Hart [Stand97, Hart98], observamos que poderíamos construir boas estimativas para a posição dos pontos críticos de nossa função implícita. Estas estimativas possibilitariam uma convergência numérica bem mais rápida que os métodos anteriores. Além disso, ficou claro que a disposição das primitivas induzia regiões de influência que limitavam a complexidade da função; uma análise local poderia então ser efetuada para se determinar o número e a natureza dos pontos críticos em uma dada região.

Uma vez encontrados os pontos críticos da função implícita, utilizando-se a Teoria de Morse [Miln63, Hart98] podemos facilmente determinar a topologia de qualquer uma de suas superfícies de nível.

Com estas ferramentas, estimamos que é possível garantir a construção de uma malha aproximativa topologicamente equivalente à superfície implícita desejada.

Este trabalho apresenta, portanto, o resultado da análise topológica de um modelo implícito em particular. Foi dada ênfase à caracterização das configurações mais significativas para este modelo de forma a determinar o comportamento dos pontos críticos para casos gerais, e desenvolver um procedimento para a sua obtenção.

1.2 Organização

Esta dissertação está organizada como se segue.

No Capítulo 2 são apresentados os trabalhos relacionados com esta análise e introduzidos os conceitos básicos necessários para a compreensão de seu desenvolvimento.

Em seguida, no Capítulo 3, propomos um novo modelo implícito, discutindo suas principais propriedades e os requisitos que levaram à sua formulação.

A análise do modelo adotado é feita a seguir, no Capítulo 4. São abordadas as principais configurações que caracterizam o comportamento do modelo. Também são examinados os quatro tipos de pontos críticos presentes e em que situações estes podem ocorrer. O capítulo é finalizado pela descrição de um procedimento genérico para a determinação destes pontos.

No Capítulo 5 são apresentados diversos exemplos numéricos, ilustrando o procedimento descrito anteriormente.

O Capítulo 6 conclui este trabalho, comentando as contribuições feitas para a área de Modelagem Geométrica e discutindo direções futuras de pesquisa.

1.3 Notação

Neste texto utilizamos letras em itálico para indicar variáveis e funções escalares. À exceção da função F, representada por uma maiúscula para maior destaque, variáveis e funções escalares aparecem em letras minúsculas: c, r_i, f_j, $\bar{x}$, etc.

Utilizamos a letra ≪P≫ em itálico para denotar pontos no espaço, tal como P_1. As letras ≪I≫ e ≪R≫ em itálico denotam regiões do espaço.

Vetores coluna são representados por minúsculas em negrito: $\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{e}}_i$, etc. Matrizes e funções não-escalares são indicadas por maiúsculas em negrito, como por exemplo $\mathbf{H}$ e $\mathbf{A}_i$.

O conjunto dos números reais é indicado por $\mathbb{R}$, enquanto o de números naturais é representado por $\mathbb{N}$.

Um tipo caligráfico é utilizado para denotar objetos geométricos de relevância para o trabalho, como $\mathcal{S}_c$ para indicar a superfície de nível c ou $\mathcal{P}_i$ para a i-ésima primitiva.

São utilizados acentos para caracterizar a que tipo de entidade geométrica certas variáveis estão associadas. Por exemplo, $\bar{x}_i$ corresponde à coordenada x de um ponto que está sobre a superfície implícita. O valor $\hat{d}$ e o ponto $\hat{\mathbf{x}}_i$ estão relacionados com pontos críticos não-degenerados, enquanto $\tilde{x}$ indica a coordenada de um ponto crítico degenerado.

Um índice subscrito normalmente indica associação, como no caso de $\mathcal{P}_i(P_i, r_i)$, que corresponde à primitiva $\mathcal{P}_i$ definida por seu centro P_i e por seu raio r_i. No caso particular de pontos críticos $\hat{\mathbf{x}}$ e regiões de influência múltipla R, os índices indicam as primitivas que tomam parte em sua existência.

As funções são tipicamente referenciadas por seu símbolo, tal como f_i, ao passo que o valor assumido pelas mesmas em um dado ponto do espaço é indicado por $f_i(x, y, z)$ ou $f_i(\mathbf{x})$.

A esfera $S(P, r)$ de centro P e raio r é composta pelo conjunto de pontos

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - P\| = r\}.$$

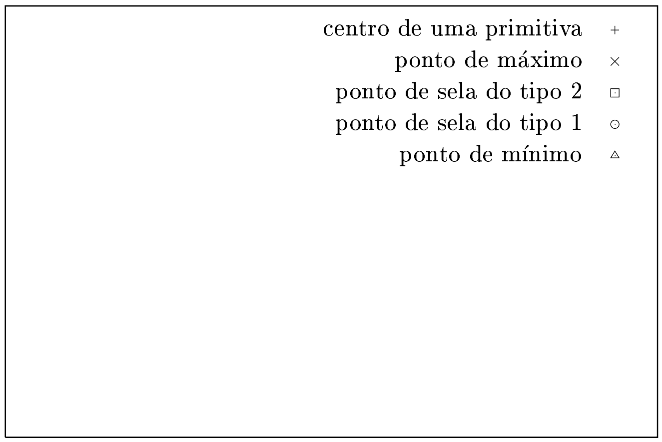
A bola $B(P, r)$ de centro P e raio r é formada pelo conjunto de pontos

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - P\| \leq r\},$$

enquanto a bola aberta $B^*(P, r)$ representa o conjunto de pontos

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - P\| < r\}.$$

Finalmente, os símbolos utilizados para indicar os centros de primitivas e tipos de pontos críticos no Capítulo 4 são indicados na figura abaixo:



Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo definiremos os conceitos básicos envolvendo superfícies implícitas e Teoria de Morse, que servirão de base para a discussão feita nos capítulos 3 e 4.

Também comentaremos brevemente outros trabalhos relacionados, principalmente no que se refere à obtenção de aproximações poligonais para superfícies implícitas.

2.1 Superfícies Implícitas

Seja uma função escalar $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que efetua o mapeamento entre pontos tridimensionais e valores reais, denominada **função implícita**. Seja também um valor real c, chamado de **limiar**[1]. O conjunto de pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação

$$F(\mathbf{x}) = c$$

é denominado uma **superfície implícita**[2].

A função F pode ser interpretada como um campo escalar em $\mathbb{R}^3$, no qual cada conjunto de nível c corresponde a uma superfície distinta.

Uma função implícita F induz uma partição no espaço $\mathbb{R}^3$. Pontos $\mathbf{x}$ em que $F(\mathbf{x}) = c$ estão, por definição, sobre a superfície implícita.

[1] Em inglês, *threshold*.

[2] Estritamente falando, a solução da equação $F(\mathbf{x}) = c$ nem sempre resulta em uma superfície.

Quando a superfície implícita é finita, pontos onde $F(\mathbf{x}) \neq c$ podem estar dentro ou fora da região delimitada pela superfície, dependendo do referencial adotado. Para este trabalho, diremos que pontos onde $F(\mathbf{x}) > c$ estão no interior desta região, ao passo que pontos para os quais $F(\mathbf{x}) < c$ estão no exterior da mesma.

2.1.1 Modelos Baseados em Esqueletos

Apesar de F poder ser arbitrária, é mais comum que esta seja definida de forma que seus conjuntos de nível sejam variedades compactas e suaves. Uma abordagem bastante popular para a construção de F, e que permite grande controle de seus conjuntos de nível, faz utilização de esqueletos.

Um **esqueleto** consiste em um conjunto de n elementos geométricos predefinidos e simples, tais como pontos, segmentos de reta ou polígonos. A cada um destes elementos é associada uma função implícita f_i, que descreve o campo escalar em $\mathbb{R}^3$ devido a este elemento. Tipicamente estas funções f_i descrevem a **influência** ou **contribuição** do elemento a qual estão relacionadas, cujo valor diminui à medida que aumenta a distância ao mesmo.

Os elementos geométricos e suas funções f_i podem ser vistas como **primitivas implícitas**, que são combinadas para formar a função F. Foram propostas diversas operações de combinação[3] na literatura [Gomes92], das quais a mais comum é a combinação aditiva, dada por

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}).$$

A principal motivação para esta abordagem é que o esqueleto provê uma maneira simples e intuitiva de construir e modificar uma função implícita. Cada elemento pode ser manipulado individualmente, o que se reflete em alterações da função f_i associada e, por conseqüência, na mudança de F. Além disso, como as funções f_i definem campos que assumem maior valor na vizinhança dos elementos a que estão associados, a influência de cada elemento é local ou pseudo-local sobre a superfície implícita.

2.1.2 Regiões de Influência

Seja um modelo implícito definido em termos de n primitivas $\mathcal{P}_i$ quaisquer e dispostas arbitrariamente no espaço, com contribuições não-negativas dadas por f_i.

[3]Também chamadas de *blends*.

Dada uma primitiva $\mathcal{P}_i$, a região do espaço onde sua contribuição é maior que zero é denominada **região de influência** desta primitiva, sendo indicada por I_i. Temos, portanto,

$$I_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : f_i(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Observe que para modelos que empregam funções com suporte infinito, tal como o proposto por Blinn [Blinn82], as regiões de influência correspondem ao espaço inteiro.

A identificação de regiões de influência é mais útil para primitivas com suporte local [Nish85, Wyv86a, Blanc95], pois estas indicam o limite de controle que determinada primitiva tem sobre a função implícita F. Quando a forma de uma região I_i é relativamente simples, pode-se efetuar o teste $\mathbf{x} \in I_i$ antes de se computar a contribuição $f_i(\mathbf{x})$, eventualmente reduzindo o número de cálculos a serem feitos. Além disso, regiões de influência podem ser utilizadas como *bounding boxes* para acelerar algoritmos de *ray-tracing*, por exemplo.

A Figura 2.1 exemplifica primitivas de diversas formas e suas regiões de influência no plano, indicadas por sua borda tracejada.

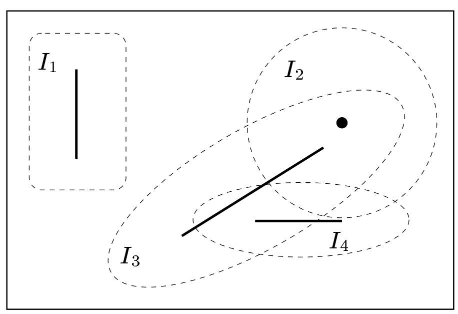


Figura 2.1: Exemplo de regiões de influência no plano.

Quando a região de influência de uma primitiva $\mathcal{P}_i$ não intercepta outras regiões, dizemos que esta primitiva está **isolada**. É o que ocorre para a primitiva $\mathcal{P}_1$ na Figura 2.1. Nesta situação, caso o limiar c seja igual a algum valor de contribuição de $\mathcal{P}_i$, a superfície implícita coincidirá localmente com uma superfície de nível de f_i.

Entretanto é mais comum que ocorram sobreposições das regiões de influência. Neste caso podemos classificar cada ponto do espaço em função das regiões de que faz parte. Ou seja, pontos que sofram influência exatamente das mesmas primitivas terão a mesma classificação. Assim podemos distinguir todas as sub-regiões induzidas pelas regiões de influência, como mostra a Figura 2.2.

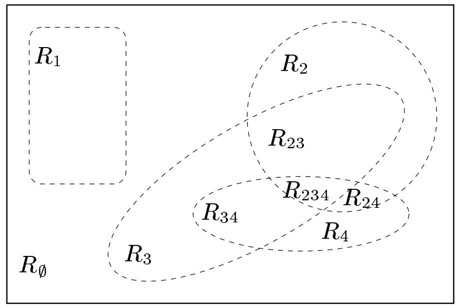


Figura 2.2: Exemplo de regiões de influência múltipla no plano.

A **região de influência múltipla** $R_{k \cdots l}$ é definida como o conjunto de pontos $\mathbf{x}$ nos quais temos simultaneamente $f_i(\mathbf{x}) > 0$ e $f_j(\mathbf{x}) = 0$, para $i \in \{k, \ldots, l\}$ e $j \notin \{k, \ldots, l\}$. Ou de forma equivalente, $R_{k \cdots l}$ corresponde à intersecção de todas as regiões I_i, de onde são subtraídas as regiões I_j, com i e j tal como definidos anteriormente. Por exemplo, observe na Figura 2.2 que R_{23} corresponde à região do espaço que está contida nas regiões I_2 e I_3, mas que não faz parte das regiões I_1 e I_4.

Quando uma primitiva está isolada, temos que $R_i = I_i$. Adicionalmente, utilizamos a denominação especial $R_\emptyset$ para indicar a área onde não há contribuição de nenhuma primitiva.

2.2 Pontos Críticos

Um **ponto crítico** de uma função real F é um ponto $\hat{\mathbf{x}}$ no qual o gradiente de F se anula, ou seja,

$$\nabla F(\hat{\mathbf{x}}) = (F_x(\hat{\mathbf{x}}), F_y(\hat{\mathbf{x}}), F_z(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{0}.$$

O valor $F(\hat{\mathbf{x}})$ da função em um ponto crítico é chamado de **valor crítico**.

A **Hessiana** de uma função F é definida como o Jacobiano de seu gradiente,

$$H(\mathbf{x}) = J(\nabla F(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} F_{xx}(\mathbf{x}) & F_{xy}(\mathbf{x}) & F_{xz}(\mathbf{x}) \\ F_{yx}(\mathbf{x}) & F_{yy}(\mathbf{x}) & F_{yz}(\mathbf{x}) \\ F_{zx}(\mathbf{x}) & F_{zy}(\mathbf{x}) & F_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Um valor λ, para o qual a equação linear

$$(H(\mathbf{x}) - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

tem uma solução $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, é denominado um **autovalor** ou valor característico de $H(\mathbf{x})$. As soluções associadas $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ são chamadas **autovetores** ou vetores característicos de $H(\mathbf{x})$.

Cada ponto crítico de F pode ser classificado analisando-se os autovalores da Hessiana de F. Dado um ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}$, podemos obter os três autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ de $H(\hat{\mathbf{x}})$. Se pelo menos um deles for zero, tal ponto é dito **degenerado**. Caso contrário, ele é dito um ponto crítico **não-degenerado**, podendo ser classificado pelo sinal de seus autovalores:

λ_1	λ_2	λ_3	classificação
$-$	$-$	$-$	máximo
$-$	$-$	$+$	sela do tipo 2
$-$	$+$	$+$	sela do tipo 1
$+$	$+$	$+$	mínimo

2.3 Poligonização

O problema de garantir que a aproximação poligonal de uma superfície implícita seja topologicamente correta tem recebido grande atenção nos últimos anos.

Dois trabalhos propostos tomam como base os pontos críticos da função implícita F, efetuando deformações progressivas em uma malha poligonal inicial, até que a superfície implícita $\mathcal{S}_c = F^{-1}(c)$ seja atingida.

A técnica chamada *shrinkwrap* [OverW93] parte de uma aproximação poligonal para a superfície associada a um limiar c_i, muito menor do que o limiar c_f desejado. Como pode-se garantir que o conjunto de nível de F correspondente a c_i envolve a superfície procurada, é possível construir uma malha esférica para aproximar tal conjunto. À medida que este limiar é aumentado, a malha é deformada para acompanhar a forma do conjunto de nível associado. Este processo é então repetido até atingir o limiar c_f, no qual a malha resultante constitui uma aproximação poligonal para a superfície desejada.

Bottino, Nuij e van Overveld [Bott96] generalizaram a técnica *shrinkwrap* para tratar mudanças de topologia. Enquanto a malha poligonal é deformada para aproximar novos conjuntos de nível, é feita uma procura por pontos críticos na proximidade de seus vértices. Caso um ponto crítico seja encontrado, sua natureza é determinada e a malha é modificada localmente para acomodar a mudança de topologia que ocorre nos conjuntos de nível adjacentes.

Stander e Hart [Stand97] propuseram outra técnica, denominada *inflation*. Esta abordagem atualiza uma malha poligonal à medida que o limiar c decresce de um valor inicial c_i até um valor final c_f, passando pelos valores críticos dos pontos $\hat{\mathbf{x}}_j$ que satisfazem $c_f \leq F(\hat{\mathbf{x}}_j) \leq c_i$. Estes pontos críticos são determinados em uma etapa inicial, através de uma busca no espaço usando aritmética intervalar.

Partindo de um limiar inicial c_i grande, Stander e Hart observaram que localmente ocorre a seguinte seqüência de pontos críticos: máximos, selas do tipo 2, selas do tipo 1 e mínimos. Ou seja, à medida que c se reduz, este passará pelo valor crítico de um ponto de máximo, quando um novo componente da aproximação poligonal é criado. Então, o limiar passa pelo valor crítico de um ponto de sela de tipo 2, quando a malha é modificada de maneira que dois componentes se liguem. A seguir, o valor crítico de uma sela do tipo 1 é atingido, quando um buraco na malha é preenchido. Finalmente, o limiar ultrapassa o valor crítico de um ponto de mínimo, quando ocorre a remoção de uma bolha.

A fundação de ambas as técnicas é provida pela Teoria de Morse. Esta teoria foi desenvolvida no início dos anos sessenta por Milnor [Miln63], e estabelece o relacionamento entre os pontos críticos de uma função F definida sobre uma variedade e o tipo de homotopia desta variedade. Além disso, esta teoria afirma que as mudanças topológicas nos conjuntos de nível de F ocorrem somente em seus pontos críticos [Hart97].

Capítulo 3

Um Novo Modelo Implícito

Este capítulo descreve o modelo implícito proposto. Em especial, mostraremos como este modelo foi construído para atender aos seguintes requisitos:

- prover suporte local;
- ter continuidade C^2; e
- ser computacionalmente eficiente.

Adicionalmente, tentaremos caracterizar várias propriedades intrínsecas deste modelo, com o intuito de fundamentar a análise feita no Capítulo 4.

3.1 Definição

Sejam n primitivas esféricas $\mathcal{P}_i$, que formam um conjunto denominado **esqueleto**. A cada primitiva é associado um ponto $P_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, que corresponde ao **centro** da mesma. Também é associado a cada primitiva um valor real r_i positivo, denominado **raio de influência**. Observe que os centros podem estar em posições arbitrárias, podendo ser coincidentes.

Define-se a **função de forma**[1] $s_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ por

$$s_i(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x} - P_i\|}{r_i}. \tag{3.1}$$

[1]Representada pela inicial s da palavra *shape*.

Seja também a função $d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, denominada **função de decaimento**, dada por

$$d(t) = \begin{cases} (1-t^2)^3, & \text{se } 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Sejam ainda as funções f_i, que correspondem às funções implícitas associadas a cada uma das primitivas $\mathcal{P}_i$. Estas funções são obtidas pela composição da função de decaimento d com as funções de forma s_i, ou seja,

$$f_i(\mathbf{x}) = d \circ s_i = d(s_i(\mathbf{x})). \tag{3.3}$$

A superfície implícita $\mathcal{S}_c$ corresponde ao conjunto de pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação

$$F(\mathbf{x}) = c, \tag{3.4}$$

onde c é um valor real positivo denominado limiar. A função implícita $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ é dada por

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}). \tag{3.5}$$

Nas seções subseqüentes vamos detalhar cada variável envolvida no modelo proposto, explicitando as decisões tomadas para sua definição.

3.1.1 Função Implícita

A função F representa um campo escalar, definido em todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

Seu conjunto de nível associado ao valor c corresponde à superfície implícita $\mathcal{S}_c$, imersa em $\mathbb{R}^3$. Pontos onde F assume valores maiores que c fazem parte do interior da região delimitada por esta superfície. Analogamente, pontos em que F apresenta valores menores que c pertencem ao exterior de tal região.

A combinação das funções das primitivas é feita através de um somatório, indicado na Eq. (3.5). Outras operações poderiam ser utilizadas para compor a função F [Gomes92], porém optamos pela combinação aditiva devido à sua simplicidade e baixo custo computacional.

Observe que todas as funções f_i têm a mesma importância ao serem combinadas. Isso resulta de nossa escolha em utilizar somente pesos unitários para as primitivas, o que reduz consideravelmente a complexidade do modelo, em detrimento de diminuir sua representatividade.

3.1.2 Limiar

Apesar do valor de limiar poder ser considerado um parâmetro válido para a modificação de uma superfície implícita, na prática é mais conveniente mantê-lo invariante e modificar os raios e posições das primitivas até se obter a forma desejada.

Como temos que $0 \leq f_i(\mathbf{x}) = d(s_i(\mathbf{x})) \leq 1$, é conveniente definir como faixa útil de valores para c o intervalo $(0, 1)$.

Naturalmente, não faz sentido estabeler $c = 0$, pois o conjunto de nível de F associado corresponderia a uma região ilimitada. Também não é muito adequado utilizar $c \geq 1$, pois podem surgir superfícies com descontinuidades. Além disso, limiares maiores que 1 não permitem que primitivas isoladas contribuam com partes da superfície.

Neste trabalho normalmente empregamos o valor médio do intervalo útil, $c = 0.5$. Contudo, as propriedades e resultados descritos nos capítulos seguintes são válidos para qualquer valor positivo do limiar.

3.1.3 Função de Decaimento

A função de decaimento tem influência direta sobre as propriedades gerais de um modelo implícito baseado em esqueletos, requerendo portanto um grande cuidado em sua escolha.

A primeira consideração se refere à extensão de seu suporte. Funções com suporte infinito usualmente fornecem um alto grau de continuidade para um modelo [Blinn82], permitindo controle pseudo-local da superfície [Blanc95]. Além disso, tais funções são mais fáceis de serem analisadas que funções com suporte finito, pois não é necessário distinguir as diferentes regiões de influência das primitivas [Stand97, Wit94]. Neste caso, todas as primitivas têm contribuição não-nula em todo o espaço.

Por outro lado, funções de suporte limitado permitem controle verdadeiramente local da superfície implícita e possibilitam economia de cálculos computacionais [Blanc95].

Em vista da nossa motivação em prover manipulações interativas de um modelo implícito, optamos pela utilização de uma função de suporte limitado. Em particular, uma função polinomial contínua por partes mostrou-se bastante satisfatória em vista de nossos requisitos.

Seguindo-se a abordagem descrita em [Wyv86a], definimos o intervalo onde a função de decaimento $d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é descrita por um polinômio como sendo $[0, 1]$. Para valores de seu parâmetro t maiores que 1, esta função assume valor constante e igual a zero.

Como o ponto $d(0)$ será associado ao centro de uma primitiva, convém que a função assuma seu valor máximo neste ponto. Utilizando-se um conjunto imagem normalizado, podemos estabelecer a primeira equação que d deve satisfazer:

$$d(0) = 1. \tag{3.6}$$

Para garantir continuidade de ordem zero da função de decaimento, convém que esta assuma valor nulo quando $t = 1$. Temos, portanto,

$$d(1) = 0. \tag{3.7}$$

Para manter continuidade C^1 no ponto $d(0)$, poderíamos exigir que sua derivada se anulasse. Contudo, como utilizamos pesos unitários para as funções f_i, tal requisito não é estritamente necessário, como observado em [Hart98]. Possíveis descontinuidades de F devidas aos pontos associados a $d(0)$ sempre estarão em limiares $c \geq 1$, e portanto fora da faixa útil descrita na Seção 3.1.2.

Por outro lado, é necessário estabelecer o mesmo requisito para $d(1)$, para garantir continuidade com o trecho constante de d. Observe que os pontos associados a $d(1)$ normalmente estarão abaixo da faixa útil de c, podendo contribuir para a superfície segundo a Eq. (3.5). Temos então

$$d'(1) = 0. \tag{3.8}$$

Como observado em [Hart98], funções apenas com continuidade C^1 podem gerar "artefatos" visuais nas superfícies implícitas. Portanto, convém estender a continuidade da função de decaimento para C^2, fazendo

$$d''(1) = 0. \tag{3.9}$$

Pelo sistema dado pelas equações (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), temos que o polinômio de menor grau que pode satisfazê-las simultaneamente é de grau três. Desta forma, tomando o polinômio geral

$$d_3(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

e fazendo com que este satisfaça o sistema citado, chegamos a

$$d_3(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = (1-t)^3.$$

Apesar deste polinômio ser satisfatório, o uso da distância ponderada $\frac{\|\mathbf{x}-P_i\|}{r_i}$ dada pela função s_i exige que seja efetuada uma raiz quadrada. Como este cálculo é computacionalmente custoso, é mais adequado que a função de decaimento opere sobre o quadrado dessa distância. Isso se reflete em coeficientes nulos para os termos de grau ímpar de d. Um polinômio satisfazendo esta propriedade, em adição ao sistema de equações anterior, tem necessariamente ordem seis, ou seja,

$$d_6(t) = a_6t^6 + a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0,$$

com $a_5 = a_3 = a_1 = 0$.

Resolvendo este novo sistema, chegamos a

$$d_6(t) = -t^6 + 3t^4 - 3t^2 + 1. \tag{3.10}$$

Note que ao se fazer $a_1 = 0$ temos que a derivada se anula em $t = 0$, ou seja, $d_6'(0) = 0$. A segunda derivada no mesmo ponto, porém, é não-nula, valendo $d_6''(0) = -6$. Observe também que a Eq. (3.10) pode ser reescrita como

$$d_6(t) = (1 - t^2)^3. \tag{3.11}$$

Esta função é inversível no intervalo [0,1], sendo dada por

$$d_6^{-1}(t) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}. \tag{3.12}$$

Uma vantagem adicional é a possibilidade de se implementar eficientemente a Eq. (3.11). Seu cálculo requer apenas uma subtração e duas multiplicações, quando o termo $t^2 = s_i(\mathbf{x})^2$ for previamente computado.

Levando-se em conta todo o domínio $[0, +\infty)$ da função de decaimento, chegamos à sua forma final, dada por

$$d(t) = \begin{cases} (1 - t^2)^3, & \text{se } 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.13}$$

A Figura 3.1 ilustra os efeitos da continuidade de d nas superfícies implícitas. São exibidas três superfícies utilizando funções de decaimento com continuidade C^0, C^1 e C^2, sendo dadas respectivamente por $1 - t^2$, $(1 - t^2)^2$ e $(1 - t^2)^3$ no intervalo $[0, 1]$.

Utilizou-se $r_1 = r_2 = 1$, $P_1 = (-0.52, 0, 0)$ e $P_2 = (0.52, 0, 0)$. Foram escolhidos valores convenientes do limiar para que os trechos esféricos das superfícies tivessem o mesmo raio, no caso 0.6. Os valores selecionados foram $c = 0.64$, $c = 0.41$ e $c = 0.262$, respectivamente para os casos C^0, C^1 e C^2.

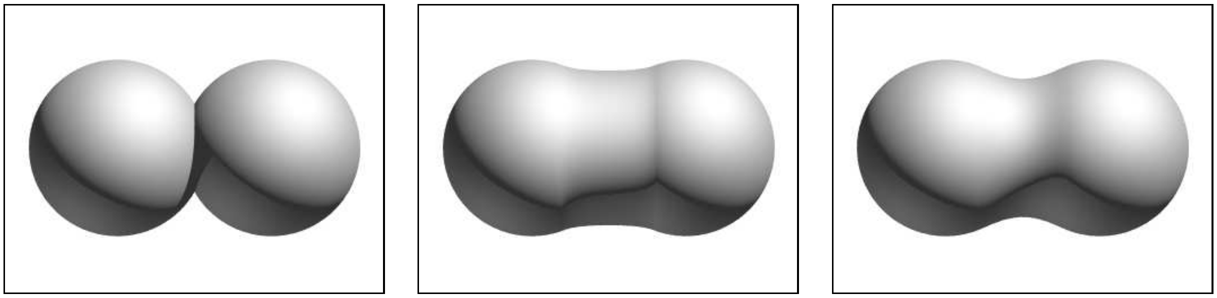


Figura 3.1: Superfícies geradas pelo mesmo par de primitivas, com continuidade C^0 (esquerda), C^1 (meio) e C^2 (direita) para a função de decaimento.

3.1.4 Função de Forma

A função de forma s_i pode ser interpretada como uma função distância, ponderada pelo valor do raio de influência r_i associado.

Quando um dado ponto $\mathbf{x}$ coincide com o centro P_i, temos $s_i(\mathbf{x}) = 0$. Quando o ponto $\mathbf{x}$ está a uma distância r_i de P_i, o que equivale a dizer que está sobre uma esfera de raio r_i e centro P_i, temos $s_i(\mathbf{x}) = 1$.

Como o valor de s_i varia à medida que nos afastamos do ponto P_i, esta função de forma é responsável pelo formato esférico das primitivas empregadas no modelo.

Esta função também pode ser calculada de maneira eficiente, caso baste utilizar o quadrado de seu valor. Neste caso temos

$$s_i^2(x, y, z) = \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}{r_i^2},$$

o que pode ser implementado utilizando-se somente três subtrações, duas adições e quatro multiplicações, supondo a constante r_i^{-2} pré-calculada.

3.2 Regiões de Influência

Ao compor a função de forma s_i com a função de decaimento d na Eq. (3.3), observamos que f_i assume seu valor máximo quando $\mathbf{x}$ coincide com P_i. O valor de f_i decresce gradualmente à medida que o ponto $\mathbf{x}$ se afasta de P_i, assumindo o valor 0 quando a distância chega a r_i. A partir dessa distância, a função f_i assume valor constante e igual a zero.

Os gráficos de s_i e f_i em função de $\|\mathbf{x} - P_i\|$ são mostrados na Figura 3.2.

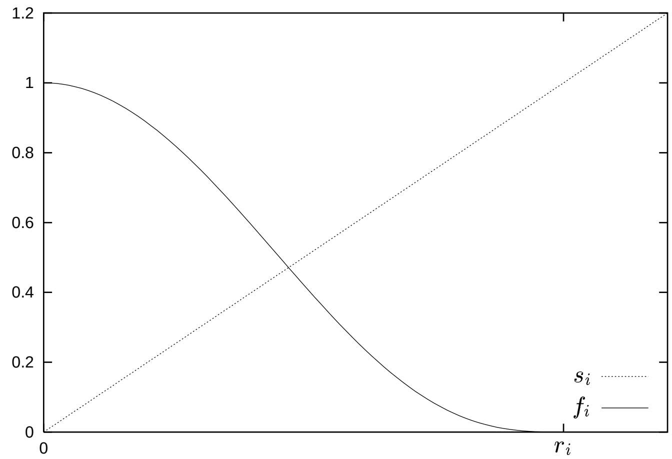


Figura 3.2: Gráficos de s_i e f_i.

Note que a função associada a uma primitiva de centro P_i é não-nula somente em uma vizinhança deste ponto. Essa vizinhança é denominada **região de influência** desta primitiva, podendo ser expressa por

$$I_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - P_i\| < r_i\}. \tag{3.14}$$

Em outras palavras, podemos dizer que a região I_i corresponde a uma bola aberta $B^*(P_i, r_i)$. A primeira propriedade de nosso modelo é imediata:

Propriedade 1 *Temos que* $\mathbf{x} \in I_i \iff f_i(\mathbf{x}) > 0$.

Quando o esqueleto consiste somente de uma primitiva $\mathcal{P}_k$, sua superfície coincide com o conjunto de nível de valor c desta primitiva. Como a função $F = f_k$ define conjuntos de nível esféricos e concêntricos, a superfície implícita será uma esfera centrada em P_k e com raio $\bar{r}_k$, que denominamos **raio efetivo**, a ser calculado a seguir.

Isto também se aplica a um esqueleto composto por mais de uma primitiva, contanto que estas estejam suficientemente afastadas para que suas regiões de influência não se sobreponham. Em outros termos, desde que valha $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, para $i \neq j$. Neste caso, a superfície implícita será uma coleção de esferas disjuntas[2].

Pela Eq. (3.4), os pontos $\bar{\mathbf{x}}$ que fazem parte da superfície implícita devem estar a uma certa distância de P_k para que tenhamos $f_k(\bar{\mathbf{x}}) = c$. Aplicando a inversa da função de decaimento, dada pela Eq. (3.12), e usando as equações (3.1) e (3.3), chegamos à segunda propriedade:

[2] Uma condição menos restritiva para a distância mínima entre duas primitivas será discutida na Seção 4.2.

Propriedade 2 *A superfície implícita gerada por uma primitiva isolada $\mathcal{P}_k$ corresponde a uma esfera de centro P_k e com raio $\bar{r}_k = \sqrt{1-\sqrt[3]{c}}\, r_k$.*

É imediato derivar a seguinte observação:

Propriedade 3 *A função f_k associada a uma primitiva isolada $\mathcal{P}_k$ assume valores maiores, iguais e menores que c, respectivamente no interior, na fronteira e no exterior de $B(P_k, \bar{r}_k)$.*

Em um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ sobre a superfície implícita, pela Eq. (3.4), a soma dos campos f_i é exatamente c. Obviamente, a soma dos campos não-nulos também é c. Pela Propriedade 1, $\bar{\mathbf{x}}$ está simultaneamente contido nas regiões de influência de todas as primitivas que têm contribuição não-nula. Assim, podemos afirmar que:

Propriedade 4 *A superfície implícita $\mathcal{S}_c$ está contida na união de todas as regiões de influência I_i.*

Se em um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ da superfície existe somente uma função f_k com contribuição não-nula, pela Propriedade 3 então necessariamente este ponto está sobre a fronteira da bola $B(P_k, \bar{r}_k)$. Por outro lado, se no ponto $\bar{\mathbf{x}}$ existem duas ou mais funções f_i com contribuições não-nulas, estas contribuições devem ser necessariamente menores que c. Isto implica que o ponto $\bar{\mathbf{x}}$ está no exterior das bolas $B(P_i, \bar{r}_i)$. Portanto, podemos dizer que a superfície implícita "envolve" todas as regiões $B(P_i, \bar{r}_i)$.

Propriedade 5 *A região delimitada pela superfície implícita $\mathcal{S}_c$ contém todas as bolas $B(P_i, \bar{r}_i)$.*

3.3 Diferenciações

No Capítulo 4 será feita uma análise detalhada dos pontos críticos da função F, dada pela Eq. (3.5). Por completude, apresentamos nesta seção as duas ferramentas fundamentais para a determinação de tais pontos: o gradiente e a Hessiana de F.

3.3.1 Gradiente

É conveniente definir o gradiente de F em termos dos gradientes das funções f_i, pois precisamos levar em conta as regiões onde estas funções são não-nulas.

Utilizando as equações (3.1), (3.2) e (3.3), temos

$$f_i(x,y,z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}{r_i^2}\right)^3, & \text{se } (x,y,z) \in I_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.15}$$

Calculando as derivadas parciais em x, y e z e agrupando os termos comuns, obtemos

$$\nabla f_i(x,y,z) = \begin{cases} -\frac{6}{r_i^2}\left(1 - \frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}{r_i^2}\right)^2 (x-x_i, y-y_i, z-z_i), & \text{se } (x,y,z) \in I_i; \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Como F consiste do somatório das funções f_i, dado pela Eq. (3.5), é imediato obter a formulação de seu gradiente:

$$\nabla F(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(x,y,z). \tag{3.17}$$

3.3.2 Hessiana

Analogamente ao caso anterior, é adequado computar individualmente a Hessiana de cada função f_i. Calculando novas derivadas parciais em x, y e z para a Eq. (3.16), e separando os termos constantes, temos

$$\mathbf{H}_i(x,y,z) = \begin{cases} \frac{24}{r_i^4}\left(1 - \frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}{r_i^2}\right) \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i, & \text{se } (x,y,z) \in I_i; \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3.18}$$

onde a matriz $\mathbf{A}_i$ é dada por

$$\mathbf{A}_i(x,y,z) = \begin{bmatrix} (x-x_i)^2 & (x-x_i)(y-y_i) & (x-x_i)(z-z_i) \\ (y-y_i)(x-x_i) & (y-y_i)^2 & (y-y_i)(z-z_i) \\ (z-z_i)(x-x_i) & (z-z_i)(y-y_i) & (z-z_i)^2 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{B}_i$ é dada por

$$\mathbf{B}_i(x,y,z) = \frac{6}{r_i^2}\left(1 - \frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}{r_i^2}\right)^2 \mathbf{I},$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade 3×3.

Novamente podemos utilizar a Eq. (3.5) para obter a Hessiana de F:

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i(x,y,z). \tag{3.19}$$

Capítulo 4

Análise

Neste capítulo vamos mostrar que a natureza e a localização aproximada dos pontos críticos de F podem ser inferidas com base na coerência espacial dada pelas regiões de influência de suas primitivas.

Mais ainda, mostraremos que uma configuração arbitrária de primitivas pode ser analisada por partes, com base em quatro situações características: uma primitiva isolada, duas primitivas próximas, três primitivas não-colineares e quatro primitivas não-coplanares.

Uma vez obtidas estimativas para a posição dos pontos críticos, podemos utilizar métodos numéricos para achar a localização exata dos mesmos. Constataremos no Capítulo 5 que tais estimativas são bastante adequadas na maioria dos casos, convergindo em poucos passos.

Em nossa análise utilizamos o pacote Mathematica [Wolf] para efetuar os cálculos numéricos, empregando o Método de Newton.

Toda a visualização tridimensional foi feita através do *ray-tracer* POV-Ray [POV], versão 3.02, modificado por nós para que trabalhasse com o modelo implícito descrito no Capítulo 3. Os gráficos e cortes foram gerados com a ferramenta Gnuplot [Gnuplot], versão 3.7.

Como este trabalho não se limita a somente um valor de limiar c, seria adequado poder visualizar todos os conjuntos de nível de F para uma dada configuração. Todavia, isto claramente não é praticável em um texto impresso, pois exigiria gráficos no espaço $\mathbb{R}^4$. Para fins de clareza, adotamos o artifício de fazer cortes em planos imersos em $\mathbb{R}^3$, sobre os quais as intersecções com alguns conjuntos de nível são ilustradas. Sobre um destes cortes, tais conjuntos de nível correspondem a curvas planas.

4.1 Uma Primitiva

Quando o esqueleto contém somente uma primitiva isolada $\mathcal{P}$, temos o caso mais simples.

Se a primitiva $\mathcal{P}$ tem centro em P e raio r, podemos utilizar a Propriedade 2 e afirmar que a superfície implícita de nível c consistirá de somente um componente esférico, com centro em P e raio $\bar{r} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{c}}\, r$. Em outras palavras, $\mathcal{S}_c$ coincide com a esfera $S(P, \bar{r})$.

A Figura 4.1 apresenta a superfície obtida para $P = (0, 0, 0)$, $r = 1$ e $c = 0.5$, juntamente com um corte feito no plano xy. Neste corte a curva de nível associada ao limiar 0.5 é indicada por uma linha contínua grossa, ao passo que as curvas associadas aos valores 0.25 e 0.75 são exibidas com linhas finas. Adicionalmente, a circunferência tracejada indica o limite da região de influência I no plano.

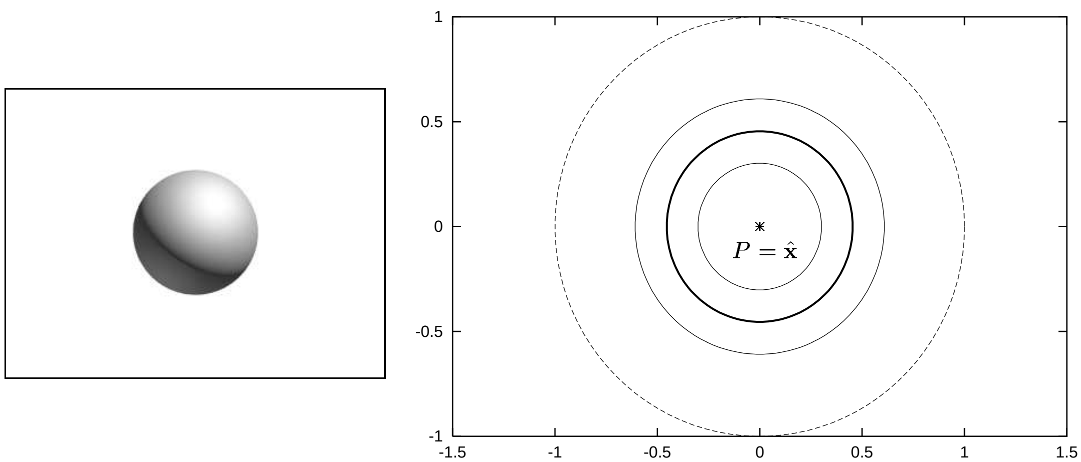


Figura 4.1: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para uma primitiva isolada.

Note que, por simetria, a variação de F será a mesma para qualquer reta $\vec{v}$ que passe por P. Sem perda de generalidade, podemos supor que P está na origem e que $\vec{v}$ coincide com o eixo x, como ilustrado na Figura 4.2. Ao longo deste eixo, a função F é não-nula somente no intervalo aberto $(-r, r)$.

Indicamos por $\bar{x}_i$ as coordenadas ao longo do eixo x na qual F assume valor c. Naturalmente, temos que os pontos $(\bar{x}_i, 0, 0)$ pertencem à superfície $\mathcal{S}_c$. Para uma primitiva isolada sempre ocorrem duas intersecções, $\bar{x}_1 = -\bar{r}$ e $\bar{x}_2 = \bar{r}$, para valores do limiar dentro da faixa útil $(0, 1)$ (Figura 4.2).

A Figura 4.3 mostra a relação entre F e sua derivada parcial F_x, calculadas ao longo do eixo x.

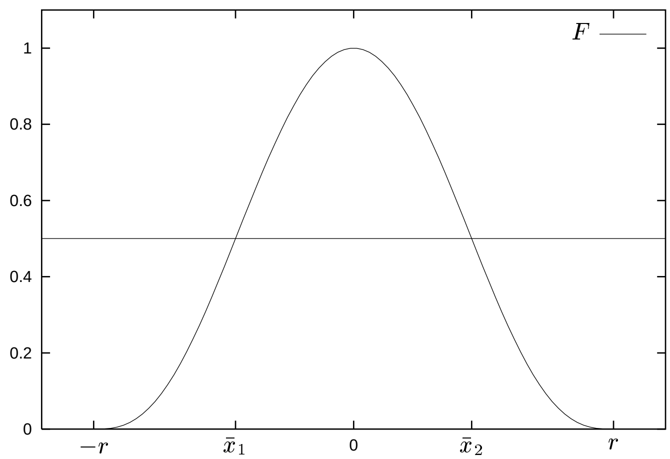


Figura 4.2: Variação de F em função da coordenada x, com $P = (0, 0, 0)$ e $c = 0.5$.

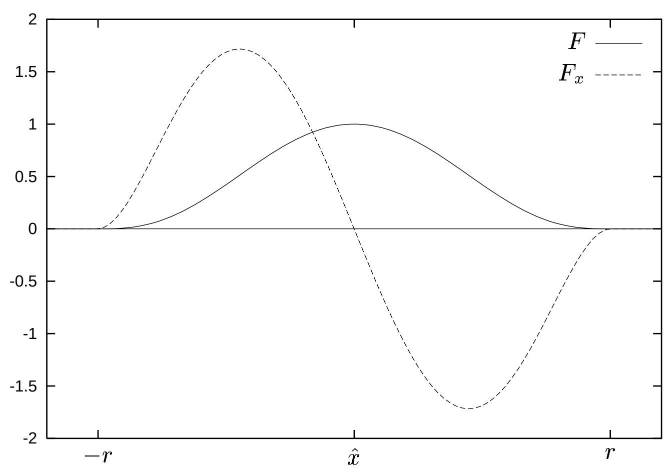


Figura 4.3: Variação de F e F_x em função da coordenada x.

Como F_x é estritamente positiva no intervalo $(-r, 0)$ e negativa em $(0, r)$, temos que F é estritamente crescente e decrescente nos respectivos intervalos. Por simetria, podemos generalizar dizendo que F é estritamente decrescente dentro da região I, à medida que a distância a P aumenta.

Observe agora que, dentro do intervalo $(-r, r)$, F_x se anula somente na coordenada $\hat{x}$, que coincide com o centro P. Novamente pela simetria de F, as outras derivadas parciais F_y e F_z também se anulam em P. Então temos que $\nabla F(P) = \mathbf{0}$, sendo $\hat{\mathbf{x}} = P$ um ponto crítico de F. Podemos classificar este ponto examinando os autovalores da matriz Hessiana associada.

Utilizando a Eq. (3.19), temos

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{6}{r^2}\,\mathbf{I},$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade 3×3. Os seus autovalores são iguais e negativos, o que indica que $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto de máximo.

Este resultado era de se esperar, pois é sabido que o centro de uma primitiva é o ponto onde sua contribuição alcança valor máximo, sendo igual a 1.

A Figura 4.4 apresenta três cortes em planos perpendiculares, ilustrando os conjuntos de nível de F na vizinhança desse máximo.

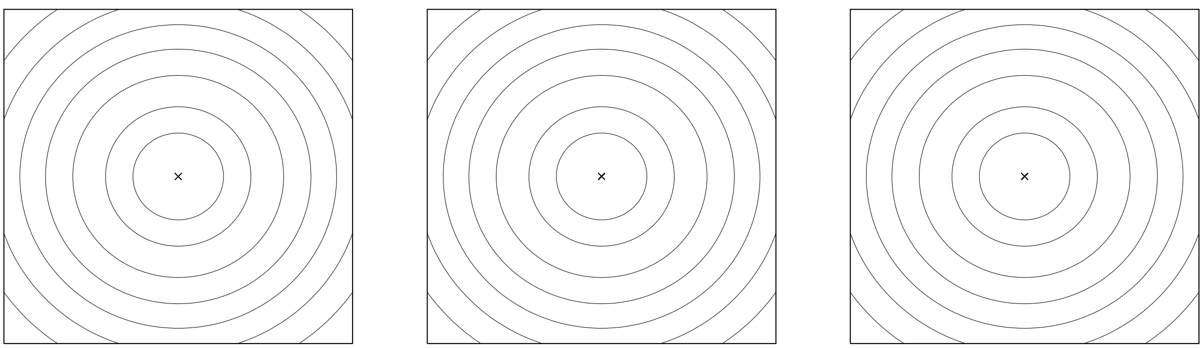


Figura 4.4: Cortes de F na vizinhança de um máximo, no plano xy (esquerda), no plano yz (meio) e no plano xz (direita).

Para qualquer primitiva isolada, o seu centro P_i coincidirá com um ponto crítico de máximo $\hat{\mathbf{x}}_i$. Entretanto, quando uma primitiva não está isolada isto nem sempre é verdade, o que será discutido na seção seguinte.

4.2 Duas Primitivas

O segundo caso a se considerar consiste de um esqueleto composto por duas primitivas, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

A superfície implícita $\mathcal{S}_c$ associada a este esqueleto corresponde ao lugar geométrico dos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$F(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) = c,$$

onde f_1 e f_2 são as funções que descrevem as contribuições das primitivas $\mathcal{P}_1(P_1, r_1)$ e $\mathcal{P}_2(P_2, r_2)$, respectivamente. Sejam $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ os raios efetivos associados a estas primitivas. Suponha também que $r_1 \leq r_2$.

Mostraremos ao longo desta seção que existem basicamente três configurações possíveis, caracterizadas pela distância d entre os centros P_1 e P_2:

- $\bar{r}_1 + r_2 \leq d$:

  Para toda esta faixa de distâncias a superfície consiste de dois componentes esféricos, $S(P_1, \bar{r}_1)$ e $S(P_2, \bar{r}_2)$.

  A função F possui dois pontos críticos de máximo, que coincidem com os centros P_1 e P_2. Esta terá um ponto crítico de sela do tipo 2 caso $\bar{r}_1 + r_2 \leq d < r_1 + r_2$, que estará localizado entre P_1 e P_2.

- $r_1 \leq d < \bar{r}_1 + r_2$:

  Neste intervalo existe uma distância $\hat{d}$ tal que, se $d \in [r_1, \hat{d}]$ então a superfície é composta por um componente. Caso $d \in (\hat{d}, \bar{r}_1 + r_2)$, a superfície será composta por dois componentes. Particularmente, quando $d = \hat{d}$, a superfície apresenta uma singularidade.

  A função F possui dois pontos críticos de máximo, que coincidem com os centros P_1 e P_2. Existe um ponto crítico de sela do tipo 2 localizado entre P_1 e P_2, denominado $\hat{\mathbf{x}}_{12}$.

  Quando a superfície $\mathcal{S}_c$ é composta por dois componentes, temos $F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) < c$. Caso esta tenha somente um componente, vale que $F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) \geq c$. Finalmente, quando $d = \hat{d}$, temos que $F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) = c$.

- $0 \leq d < r_1$:

  Para todo este intervalo a superfície consiste em apenas um componente.

  Neste intervalo existe uma distância $\tilde{d}$, próxima de r_1, na qual ocorre o encontro entre um ponto de máximo e uma sela do tipo 2. No intervalo $0 \leq d < \tilde{d}$ existe somente um ponto de máximo, com valor crítico necessariamente maior que 1.

4.2.1 Raios de Influência Iguais

Para esta situação, podemos supor sem perda de generalidade que $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (d, 0, 0)$ e $r_1 = r_2 = r$.

Devido à simetria das regiões de influência de duas primitivas e ao fato das funções f_i serem monotonamente decrescentes em I_i ao se afastar de P_i, só poderão existir pontos críticos no segmento de reta que une P_1 a P_2. Isto será explorado na discussão adiante, na qual este segmento coincide com o eixo x.

Agora analisaremos o comportamento da superfície para intervalos de variação de d.

Intervalo 1: $\bar{r} + r \leq d$

Quando temos $2r \leq d$, as regiões de influência das primitivas não se interceptam. Isso significa que as primitivas estão isoladas, podendo ser tratadas de maneira independente. Desta forma a superfície implícita é composta por dois componentes esféricos, $S(P_1, \bar{r})$ e $S(P_2, \bar{r})$.

Observe que a discussão feita na Seção 4.1 pode ser aplicada para cada primitiva individualmente. Neste caso, obtemos quatro coordenadas $\bar{x}_i$ onde vale que $F(\bar{x}_i, 0, 0) = c$. Cada par de pontos faz parte de um componente da superfície. Os gráficos de F e F_x ao longo do eixo x são mostrados na Figura 4.5.

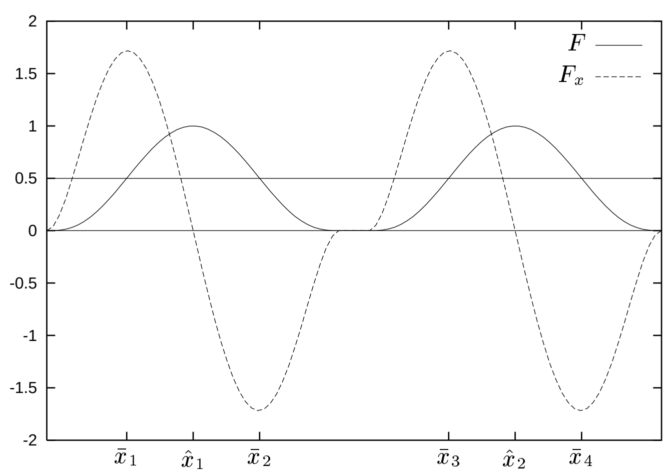


Figura 4.5: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 2.2r$ e $c = 0.5$.

Note que, quando $2r \leq d$, não existe região onde as primitivas tenham simultaneamente contribuições diferentes de zero. Além disso, F apresenta somente dois pontos críticos, $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{x}_1, 0, 0)$ e $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{x}_2, 0, 0)$, que correspondem aos centros das duas primitivas.

Quando $r + \bar{r} \leq d < 2r$, as duas regiões de influência I_1 e I_2 se sobrepõem. Passa a existir o intervalo aberto $(d - r, r)$ sobre o eixo x, onde as contribuições de f_1 e f_2 são não-nulas. A Figura 4.6 ilustra esta situação, onde a contribuição individual de cada primitiva é indicada por uma linha pontilhada.

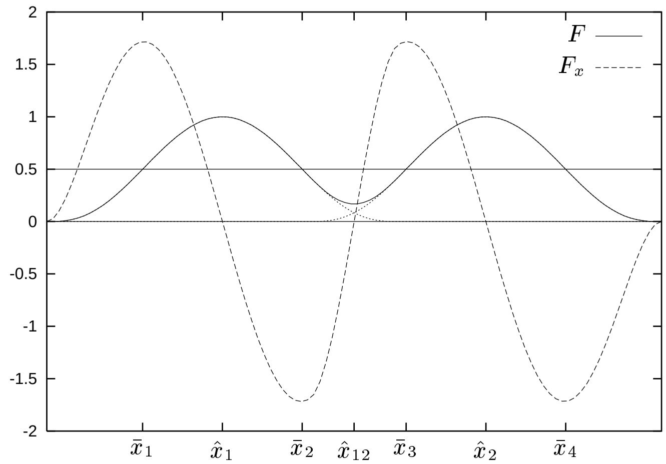


Figura 4.6: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 1.5r$ e $c = 0.5$.

Novamente obtemos quatro pontos $\bar{x}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, onde F assume o valor c. Estes pontos estão sobre as **esferas efetivas** $S(P_1, \bar{r})$ e $S(P_2, \bar{r})$, permanecendo fixos em relação às primitivas enquanto a distância d se reduz até $r + \bar{r}$. Isto se deve ao fato da soma das contribuições no intervalo $(d - r, r)$ ser sempre inferior a c.

Como foi definido na Seção 3.2, o raio efetivo indica a distância do centro de uma primitiva na qual o valor de sua contribuição é c. O limite inferior $r + \bar{r}$ para d é a distância na qual a esfera efetiva $S(P_1, \bar{r})$ tangencia a **esfera de influência** $S(P_2, r)$. Por simetria, $S(P_1, r)$ também toca em $S(P_2, \bar{r})$. Essa situação pode ser entendida observando-se as curvas de nível de F em um corte feito no plano xy, mostrado na Figura 4.7.

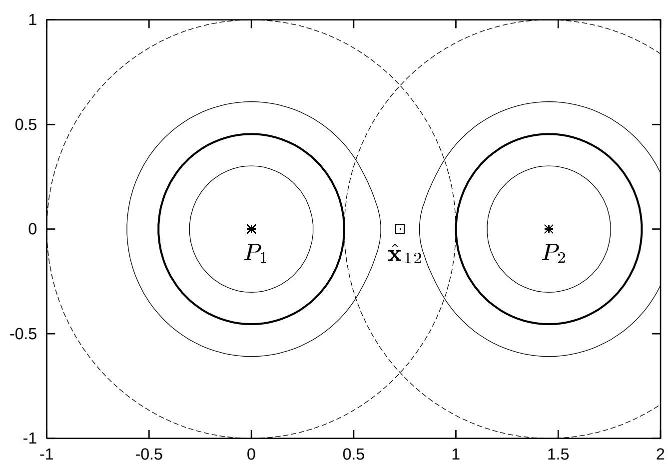


Figura 4.7: Corte no plano xy de duas primitivas, com $d = r + \bar{r}$ e $c = 0.5$.

Isso significa que a superfície implícita permanece inalterada quando d varia, sendo composta por dois componentes esféricos. Veremos mais adiante que qualquer valor inferior da distância implica em uma modificação da superfície.

Para primitivas de mesmo raio, podemos então definir um critério mais amplo para considerar uma primitiva isolada: sua esfera efetiva não pode interceptar nenhuma esfera de influência de outra primitiva.

É interessante notar o surgimento de um novo ponto crítico de F, no trecho onde ocorre a sobreposição das regiões de influência. Pela simetria do presente caso, este ponto surge na coordenada $\hat{x}_{12} = \frac{d}{2}$. Note ainda que os pontos de máximo $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$ continuam presentes.

Este ponto crítico corresponde a uma sela do tipo 2. Pode-se observar que, partindo-se de $\hat{\mathbf{x}}_{12}$, o valor de F aumenta para ambos os sentidos do eixo x, em direção aos máximos. Em contrapartida, F diminui em qualquer direção que seja perpendicular ao eixo x. Isto pode ser confirmado analiticamente através do cálculo das equações (3.17) e (3.19) no ponto $\hat{\mathbf{x}}_{12} = \left(\frac{d}{2}, 0, 0\right)$, obtendo

$$\nabla F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) = \mathbf{0}$$

e

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{12}) = \frac{12d^2}{r^4}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{12}{r^2}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Para valores de d tal que $r + \bar{r} \leq d < 2r$, $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{12})$ apresenta sempre um autovalor positivo e dois negativos, o que caracteriza um ponto de sela do tipo 2. A Figura 4.8 apresenta três cortes em planos perpendiculares, ilustrando os conjuntos de nível de F na vizinhança desta sela.

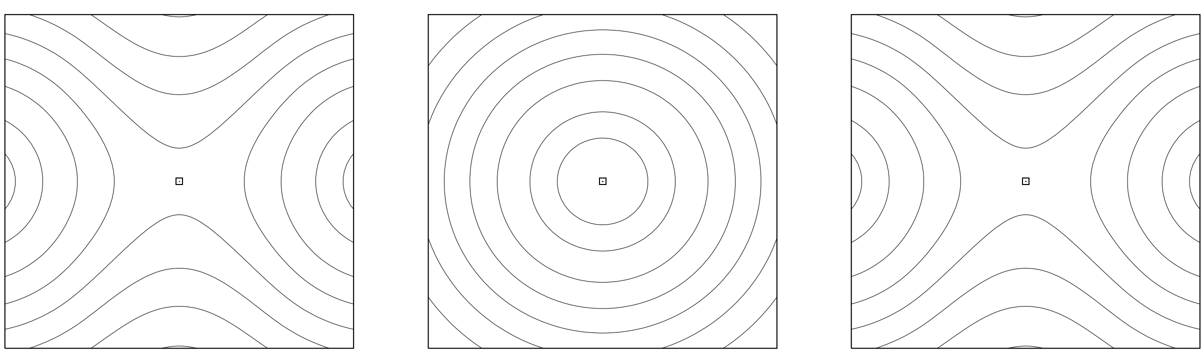


Figura 4.8: Cortes de F na vizinhança de um ponto de sela do tipo 2, no plano xy (esquerda), no plano yz (meio) e no plano xz (direita).

Intervalo 2: $r \leq d < r + \bar{r}$

À medida que a distância d diminui, as coordenadas $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ passam a se afastar de seus respectivos centros, ficando mais próximas entre si (Figura 4.9).

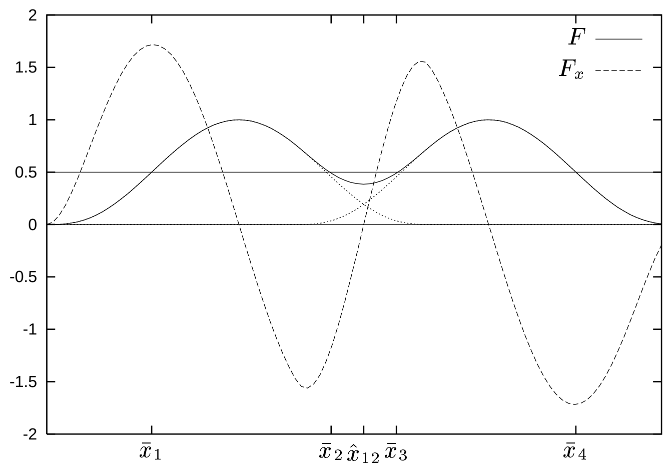


Figura 4.9: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 1.3r$ e $c = 0.5$.

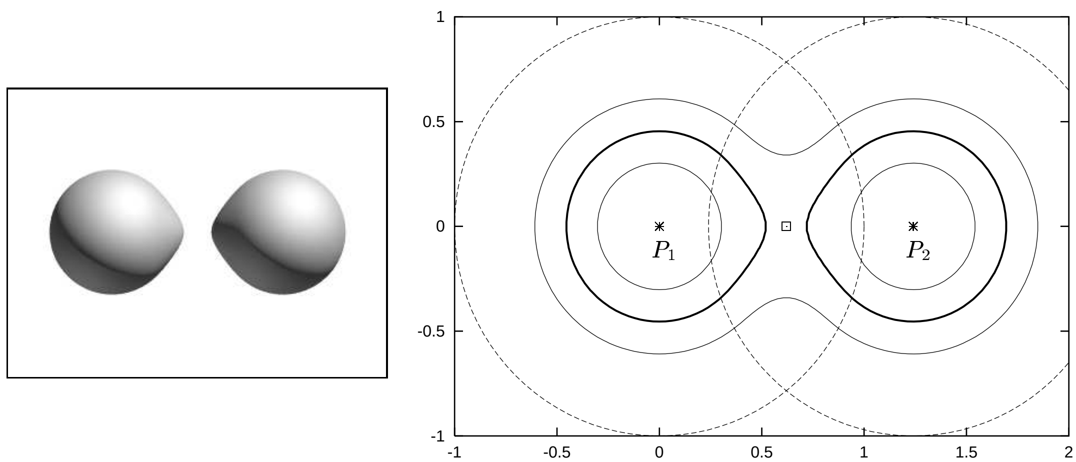


Figura 4.10: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = 1.24r$ e $c = 0.5$.

Com essa aproximação, ocorre um abaulamento dos componentes em direção um do outro. Note que esta modificação somente acontece na intersecção das regiões de influência; fora dela a superfície ainda é localmente esférica (Figura 4.10).

Até este momento o ponto crítico em $\hat{x}_{12} = \frac{d}{2}$ assumiu valores menores que c. No entanto, com a redução de d, a região de sobreposição das influências aumenta e também aumentam os valores de F dentro da mesma. Existe, portanto, uma distância denominada $\hat{d}$ na qual $F(\hat{x}_{12}, 0, 0) = c$. O valor de $\hat{d}$ pode ser obtido observando-se que, por simetria, $f_1(\hat{\mathbf{x}}_{12}) = f_2(\hat{\mathbf{x}}_{12}) = \frac{c}{2}$. Além disso, sabemos que $\hat{\mathbf{x}}_{12} = \left(\frac{\hat{d}}{2}, 0, 0\right)$. Temos, portanto,

$$\hat{d} = 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{c}{2}}}\, r$$

Quando a distância entre P_1 e P_2 mede $\hat{d}$, as coordenadas $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ se encontram, e este encontro ocorre exatamente no ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{12}$, como ilustra a Figura 4.11.

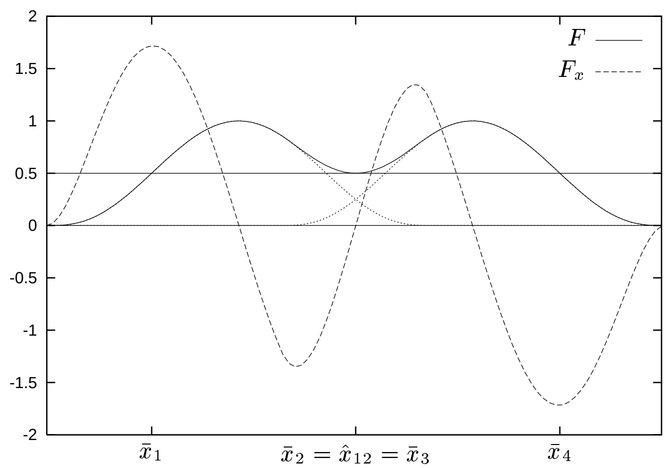


Figura 4.11: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = \hat{d}$ e $c = 0.5$.

Neste instante os dois componentes da superfície implícita se tocam, resultando em uma singularidade em $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ para $\mathcal{S}_c$ (Figura 4.12). A partir deste momento a superfície passa a ter somente um componente, e deixam de existir as intersecções $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$.

Como discutido na Seção 2.3, uma mudança na topologia de uma superfície implícita ocorre sempre que o valor de um ponto crítico de F passa pelo limiar c. Para o presente caso, sempre que o valor de um ponto de sela do tipo 2 passar de menor para maior que c, temos a junção local de dois componentes. Analogamente, quando este valor passar de maior para menor que o limiar, acontece a ruptura de um componente em duas partes.

A única outra mudança topológica possível para um esqueleto composto por duas primitivas corresponde a elevar c acima do valor crítico dos máximos $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$, fazendo com que $\mathcal{S}_c$ não tenha nenhum componente.

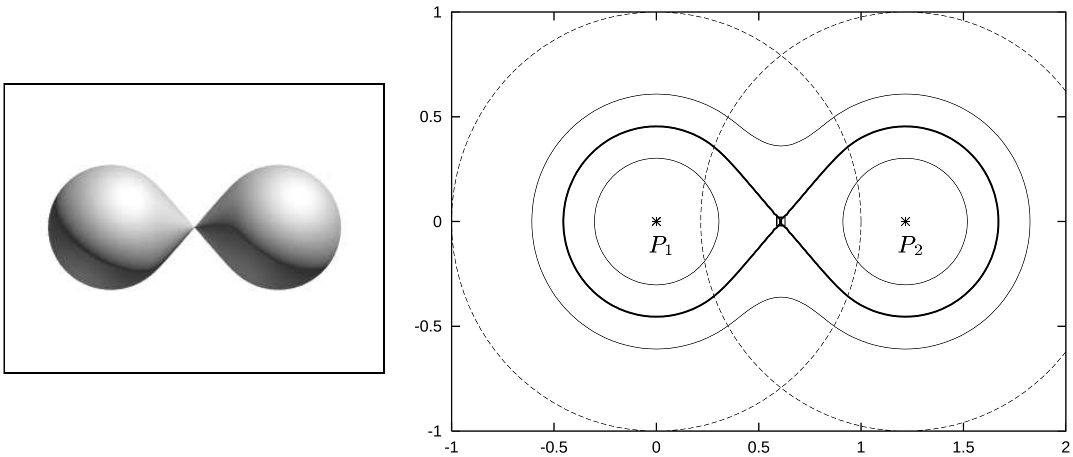


Figura 4.12: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = \hat{d}$ e $c = 0.5$.

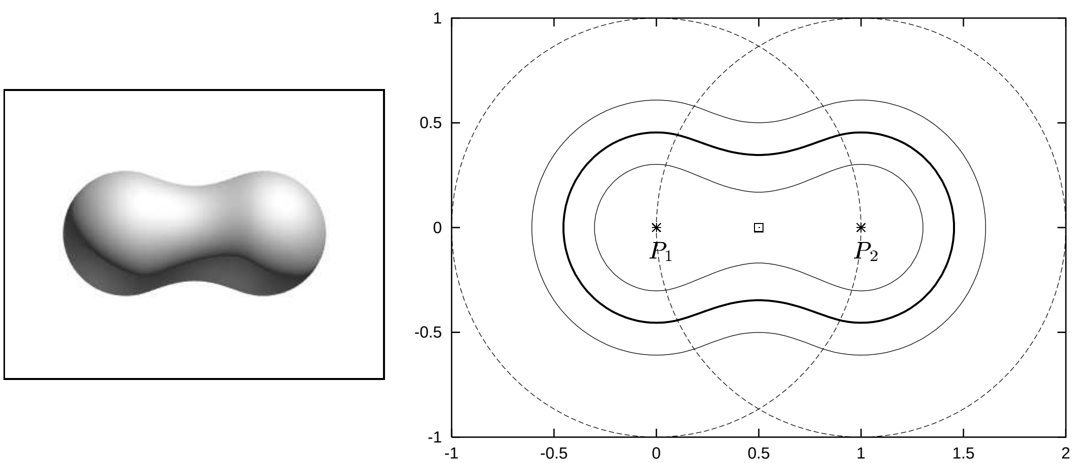


Figura 4.13: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = r$ e $c = 0.5$.

Para o restante do nosso intervalo de estudo, $r \leq d < \hat{d}$, os pontos de máximo continuam coincidindo com os centros das primitivas. O ponto de sela $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ também permanece no ponto médio entre P_1 e P_2.

O limite inferior para a distância d neste intervalo corresponde à situação onde o centro P_1 toca a esfera de influência $S(P_2, r)$, e analogamente, P_2 encontra com $S(P_1, r)$, como ilustrado na Figura 4.13.

Intervalo 3: $0 \leq d < r$

Neste último intervalo as regiões de influência continuam a se interceptar, até que P_1 e P_2 sejam coincidentes, ou seja, $d = 0$. A superfície implícita continua constituída por apenas um componente.

Para valores da distância pouco menores que r, a função F ainda mantém um comportamento semelhante aos casos anteriores, com três pontos críticos. Contudo, gradualmente os pontos de máximo $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$ começam a se aproximar, indo em direção ao ponto de sela $\hat{\mathbf{x}}_{12}$.

Quando a distância assume um valor $\tilde{d}$, os pontos críticos se encontram, formando um único ponto crítico no meio do segmento que une P_1 e P_2. Veja a Figura 4.14.

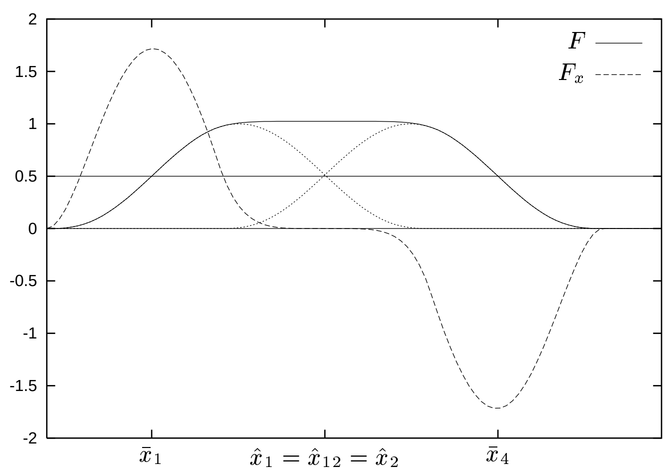


Figura 4.14: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = \tilde{d}$ e $c = 0.5$.

Por simetria, este novo ponto crítico $\tilde{\mathbf{x}}$ está localizado em $\left(\frac{\tilde{d}}{2}, 0, 0\right)$. Em particular, este é um ponto crítico degenerado na qual o autovalor l_1 de $\mathbf{H}(\tilde{x}, 0, 0)$ é nulo. Usando a Eq. (4.1), chegamos ao seguinte valor para $\tilde{d}$:

$$\tilde{d} = \frac{2}{\sqrt{5}} r.$$

Para valores em que $0 \leq d < \tilde{d}$, passa a existir somente um ponto crítico em F, na posição $\left(\frac{d}{2}, 0, 0\right)$. Calculando novamente os autovalores da matriz Hessiana neste ponto, obtemos três valores negativos, o que caracteriza um ponto de máximo. A coordenada deste ponto é indicado por $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ na Figura 4.15.

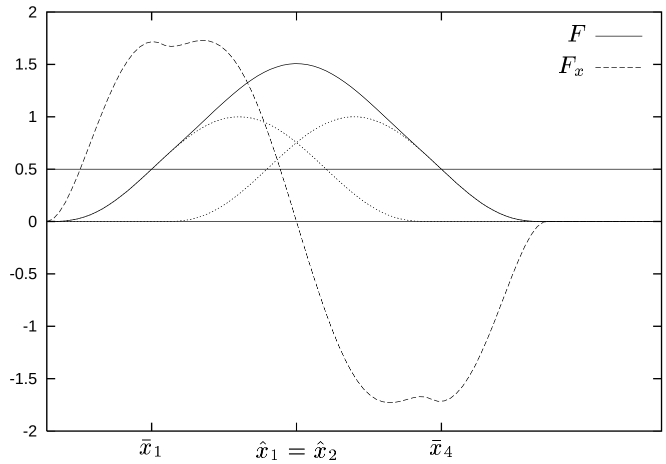


Figura 4.15: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 0.6r$ e $c = 0.5$.

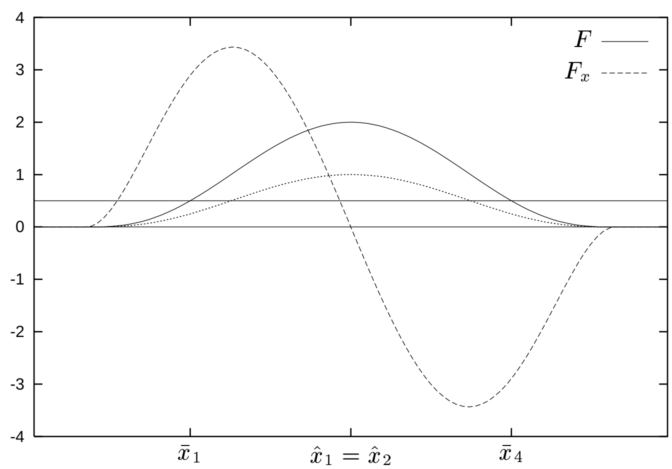


Figura 4.16: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 0$ e $c = 0.5$.

Quando temos $d = 0$, as regiões de influência coincidem e F torna-se bastante similar ao caso com apenas uma primitiva (Figura 4.16). A diferença reside no fato de agora F apresentar o dobro do valor do caso discutido na Seção 4.1.

Quando os centros P_1 e P_2 coincidem, a superfície implícita se reduz a uma única esfera. Usando as equações (3.5) e (3.15), chegamos que o raio desta esfera é dado por $\breve{r} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{c}{2}}}\, r$. A Figura 4.17 mostra a superfície e o corte no plano xy para esta configuração.

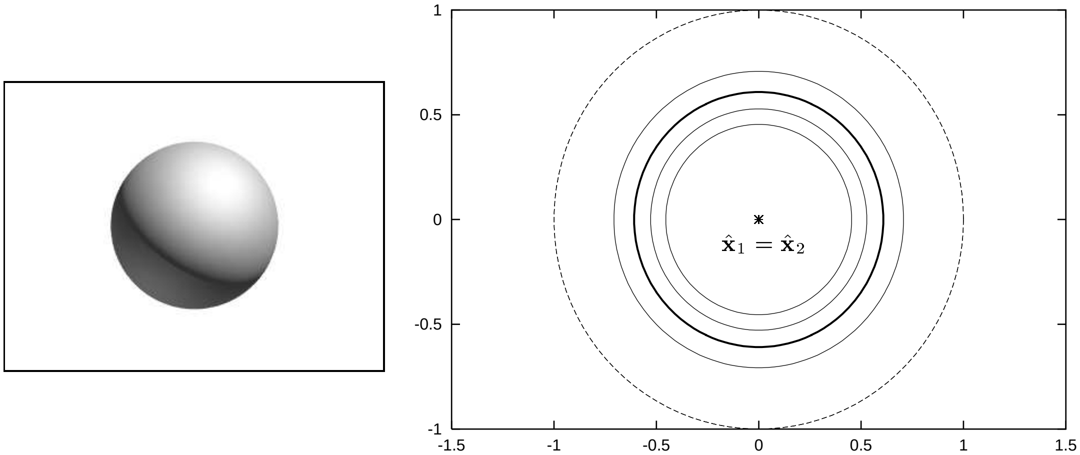


Figura 4.17: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = 0$ e $c = 0.5$.

4.2.2 Raios de Influência Distintos

De forma análoga à seção anterior, vamos examinar os diversos intervalos de variação da distância. Sem perda de generalidade, podemos supor que a primeira primitiva está posicionada na origem, $P_1 = (0,0,0)$, e que a segunda primitiva está em $P_2 = (d,0,0)$. Vamos supor ainda que $r_1 < r_2$.

Intervalo 1: $\bar{r}_1 + r_2 \leq d$

Quando a distância entre as primitivas é maior ou igual à soma de seus raios, temos que as regiões de influência correspondentes não se interceptam. Neste caso as primitivas estão isoladas e a superfície implícita será composta por duas esferas, $S(P_1, \bar{r}_1)$ e $S(P_2, \bar{r}_2)$. Além disso, não existe região onde as primitivas tenham ao mesmo tempo contribuição diferente de zero, havendo somente dois pontos críticos de máximo em F.

Para $\bar{r}_1 + r_2 \leq d < r_1 + r_2$, as esferas de influência se sobrepõem. Passa então a existir uma região onde as contribuições das primitivas são não-nulas, onde surge um ponto de sela do tipo 2, $\hat{\mathbf{x}}_{12}$. A Figura 4.18 ilustra esta situação sobre o eixo x.

De forma análoga ao primeiro intervalo da Seção 4.2.1, as coordenadas $\bar{x}_i$ que satisfazem $F(\bar{x}_i, 0, 0) = c$ permanecem fixas em relação às primitivas, e o valor crítico de $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ permanece

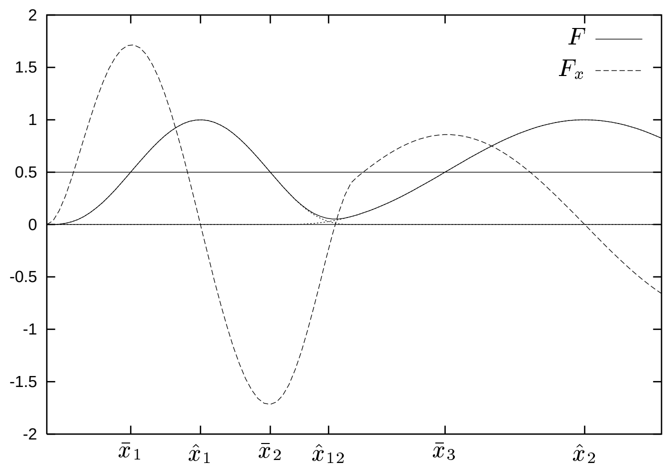


Figura 4.18: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 2.5r_1$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

menor que c. Portanto, a superfície implícita resultante continua sendo composta por duas esferas.

Como os centros das primitivas estão fora do intervalo de sobreposição, não ocorre modificação nos pontos críticos $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$, que permanecem localizados em P_1 e P_2, respectivamente.

Por outro lado, o ponto de sela $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ varia de posição de acordo com d, estando sempre localizado no segmento que une os centros das primitivas. Como não é possível determinar analiticamente a sua posição exata, partimos para a utilização de métodos numéricos. Para tanto, calculamos uma estimativa $\hat{\mathbf{e}}_{12}$ para este ponto e a usamos como ponto inicial para um algoritmo para busca de raízes em ∇F.

Uma estimativa que mostrou-se adequada corresponde ao ponto em que as funções f_1 e f_2 assumem o mesmo valor, o que corresponde ao ponto onde as linhas pontilhadas se cruzam na Figura 4.18. Fazendo com que $f_1(\hat{\mathbf{e}}_{12}) = f_2(\hat{\mathbf{e}}_{12})$ e utilizando a Eq. (3.15), temos

$$\hat{\mathbf{e}}_{12} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} P_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} P_2. \tag{4.2}$$

Neste intervalo, a distância d pode se reduzir até o ponto onde a esfera efetiva $S(P_1, \bar{r}_1)$ seja tangenciada pela esfera de influência $S(P_2, r_2)$. Como as primitivas têm raios distintos, a situação inversa em que $S(P_1, r_1)$ toca $S(P_2, \bar{r}_2)$ não ocorre simultaneamente, mas em um valor inferior de d.

Intervalo 2: $r_1 \leq d < \bar{r}_1 + r_2$

Quando a distância varia neste intervalo, ocorre a intersecção entre a esfera efetiva $S(P_1, \bar{r}_1)$ e a esfera de influência $S(P_2, r_2)$.

Em um primeiro momento, quando $r_1 + \bar{r}_2 \leq d < \bar{r}_1 + r_2$, ocorre a modificação da coordenada $\bar{x}_2$, que passa a se afastar de P_1. As demais coordenadas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$ permanecem fixas em relação às suas primitivas correspondentes. Em conseqüência, ocorre a modificação da componente menor da superfície implícita, que se abaula dentro da região de intersecção. Caso exista uma parte desta componente que seja externa à região de influência I_2, esta se manterá localmente esférica. Em contrapartida, a componente associada à primitiva de maior raio permanece inalterada (Figura 4.19).

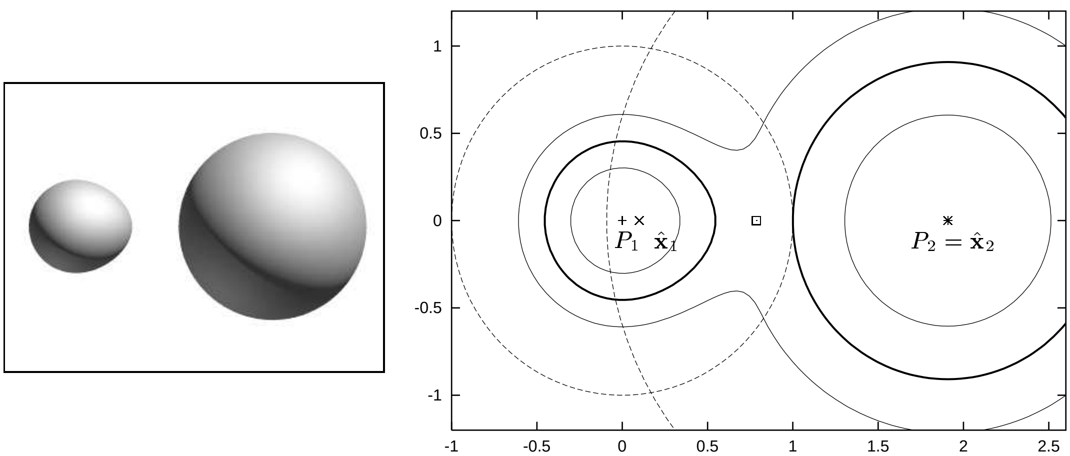


Figura 4.19: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = r_1 + \bar{r}_2$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

Se tivermos $r_1 + \bar{r}_2 < r_2$, então quando d for menor que r_2 o ponto de máximo $\hat{\mathbf{x}}_1$ será perturbado, saindo da posição P_1. Isso ocorre pois $\hat{\mathbf{x}}_1$ passa a sofrer influência da outra primitiva, como pode ser observado na Figura 4.19. Já o ponto de máximo $\hat{\mathbf{x}}_2$ permanece fixo em P_2.

Reduzindo d, passamos pela situação em que a esfera de influência $S(P_1, r_1)$ intercepta a esfera efetiva $S(P_2, \bar{r}_2)$, fazendo com que a coordenada $\bar{x}_3$ se afaste do centro P_2. Gradualmente, a coordenada $\bar{x}_3$ se aproxima de $\bar{x}_2$, como mostra a Figura 4.20.

Diminuindo mais ainda a distância entre as duas primitivas, verificamos que existe uma distância $\hat{d}$ para a qual $\bar{x}_2 = \hat{x}_{12} = \bar{x}_3$. Analogamente ao caso de primitivas com raios iguais, os

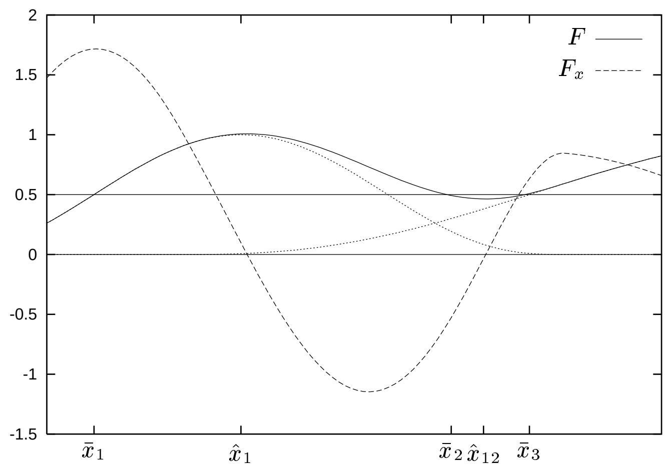


Figura 4.20: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 1.8r_1$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

dois componentes da superfície implícita começam a se unir em um só, formando uma singularidade em $\mathcal{S}_c$ (Figura 4.21).

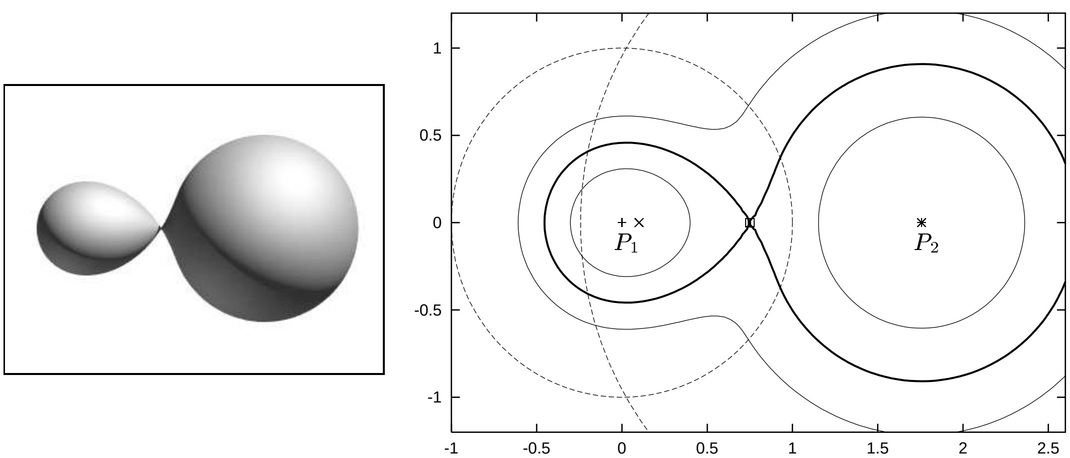


Figura 4.21: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para duas primitivas, com $d = \hat{d}$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

Utilizando-se o fato de que o ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ pertence ao intervalo $(\hat{\mathbf{e}}_{12}, P_2)$, podemos usar $\hat{\mathbf{e}}_{12}$ como ponto inicial para obter numericamente a posição exata de $\hat{\mathbf{x}}_{12}$. Pela Teoria de Morse, sabemos que os dois componentes se fundem a partir do nível $F(\hat{\mathbf{x}}_{12})$. Então podemos inferir numericamente a topologia de $\mathcal{S}_c$ para uma dada distância d. Se $F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) \geq c$, temos somente um componente; caso contrário, temos dois componentes.

Intervalo 3: $0 \leq d < r_1$

Neste intervalo a superfície implícita se comporta de maneira análoga ao descrito no Intervalo 3 da Seção 4.2.1, sendo composta por um único componente.

Os pontos críticos de F sofrem mudanças similares ao caso com primitivas de raios iguais.

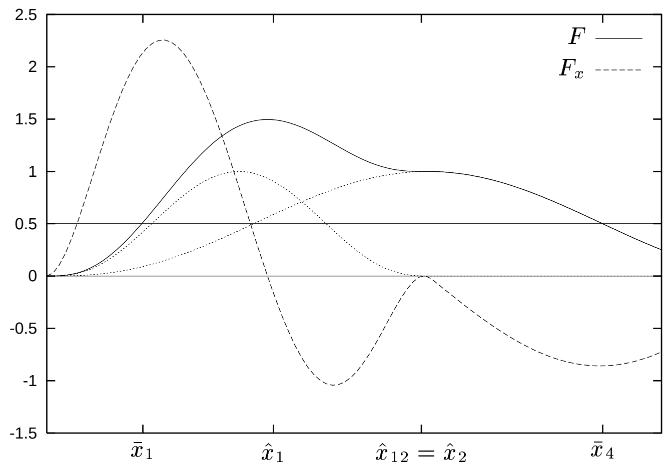


Figura 4.22: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = \tilde{d}$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

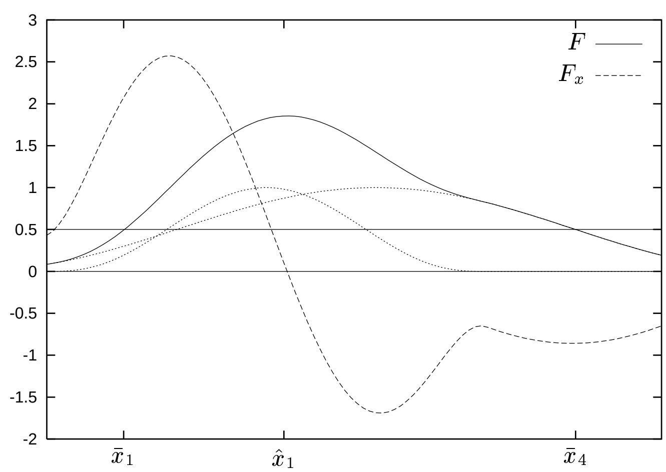


Figura 4.23: Variação de F e F_x em função da coordenada x, com $d = 0.5r_1$, $r_2 = 2r_1$ e $c = 0.5$.

Em um primeiro momento, com d próximo de r_1, os três pontos críticos estarão presentes, se aproximando com a diminuição da distância. No entanto, em um valor $\tilde{d}$ ocorre o encontro entre o ponto de sela de tipo 2, $\hat{\mathbf{x}}_{12}$, e o ponto de máximo associado à primitiva de maior raio,

$\hat{\mathbf{x}}_2$. Neste instante surge um ponto crítico degenerado $\tilde{\mathbf{x}}$, no qual um dos autovalores da matriz $\mathbf{H}(\tilde{x}, 0, 0)$ é nulo (Figura 4.22).

Aproximando mais os centros das primitivas, este ponto degenerado desaparece e resta somente o máximo $\hat{\mathbf{x}}_1$ como único ponto crítico de F (Figura 4.23). Neste caso, a procura numérica por pontos críticos usando $\hat{\mathbf{e}}_{12}$ como ponto inicial sempre converge para $\hat{\mathbf{x}}_1$.

Uma situação interessante, e que não ocorre para duas primitivas de mesmo raio, acontece quando temos $r_1 \leq \bar{r}_2$ e $d \leq \bar{r}_2 - r_1$. Isto corresponde à esfera de influência $S(P_1, r_1)$ estar inteiramente contida na esfera efetiva $S(P_2, \bar{r}_2)$, como ilustrado na Figura 4.24. Neste caso, toda a contribuição da primitiva de raio menor estará em uma região onde a contribuição da outra primitiva já é maior ou igual ao limiar. Desta maneira, a primitiva de menor raio não afeta a superfície implícita, que corresponde à esfera $S(P_2, \bar{r}_2)$.

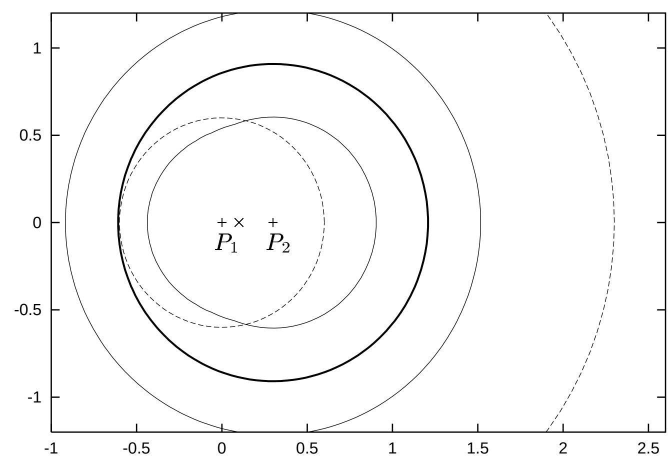


Figura 4.24: Corte no plano xy, para duas primitivas, com $d = 0.3$, $r_1 = 0.6$, $r_2 = 2$ e $c = 0.5$.

4.3 Três Primitivas

Dando continuidade às seções anteriores, seria natural analisar todas as possíveis configurações de três primitivas. O mesmo seria feito em seguida para quatro primitivas, e assim por diante.

Todavia, neste momento deve-se deixar claro a não-factibilidade de tal procedimento. Não só ocorre um grande aumento no número de possíveis arranjos como torna-se cada vez mais difícil determinar precisamente a fronteira entre estas configurações. Um procedimento alternativo é portanto necessário para uma análise mais genérica.

O estudo dos casos apresentados nas Seções 4.1 e 4.2 nos levou a concluir que a função F pode ser analisada por partes, de acordo com a extensão da influência das primitivas que compõem seu esqueleto (Seção 2.1.2). Isso se deve ao fato da geometria observada em cada região ser única e exclusivamente definida pelas primitivas que a influenciam. Em particular, vimos que na região R_i, na qual há a influência de somente uma primitiva, só pode existir um ponto de máximo. Já na região em que existe a influência simultânea de duas primitivas, R_{ij}, só pode ocorrer um único ponto de sela do tipo 2.

Seja, por exemplo, o arranjo de quatro primitivas de raios distintos exibido na Figura 4.25. Esta disposição divide o espaço em dez regiões. A primeira, designada $R_\emptyset$, corresponde a todos os pontos que não sofrem influência de nenhuma primitiva. As regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 têm influência de somente uma primitiva, enquanto R_{12}, R_{13}, R_{23} e R_{34} recebem contribuição de duas primitivas. Finalmente, a região R_{123} corresponde ao conjunto de pontos que têm influência de três primitivas.

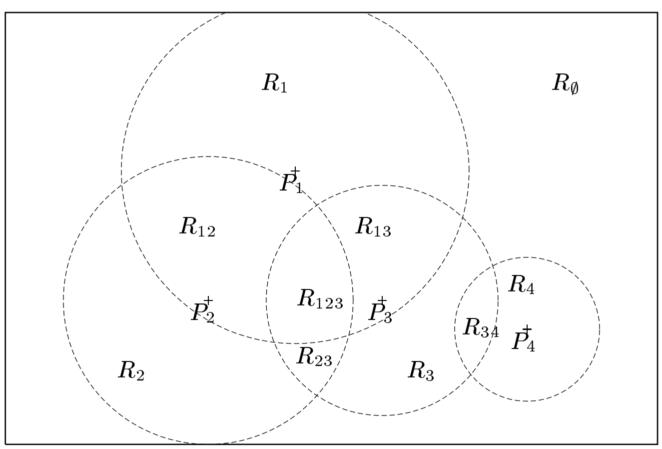


Figura 4.25: Regiões de influência múltipla de quatro primitivas no plano xy.

Observe que é possível caracterizar a superfície implícita localmente a partir das regiões assim definidas, mesmo sem levar em conta a posição exata das primitivas.

Podemos afirmar que, caso exista um trecho da superfície dentro da região R_1, este será necessariamente parte de uma esfera. O mesmo pode ser dito para as regiões R_2, R_3 e R_4, pois é sabido que em trechos em que ocorra a influência de apenas uma primitiva a superfície é localmente esférica (Seção 4.1).

Outra informação útil que pode ser obtida pela simples análise da disposição das regiões se refere aos pontos críticos de F. Pela análise feita na Seção 4.2.2, podemos afirmar que R_4 contém um ponto de máximo e que este coincide com o centro da primitiva que influencia esta região. Já a região R_2 não contém nenhum ponto crítico, uma vez que o máximo da primitiva associada está dentro da região R_{12}. De forma análoga, pode-se dizer que existe somente um ponto de sela do tipo 2 nas regiões R_{12} e R_{34}, uma vez que os pontos críticos situados nos segmentos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_3P_4}$, não são perturbados por outras primitivas.

Em resumo, é possível analisar F separando seu domínio em regiões que sofram influência do mesmo conjunto de primitivas. Este desmembramento permite que sejam estabelecidos limites de complexidade para a superfície implícita em cada região, servindo de base para um estudo mais preciso de sua topologia.

Sob esta ótica, resta ainda analisar as configurações que dão origem aos dois tipos de pontos críticos ainda não observados: sela do tipo 1 e mínimo.

Nesta seção mostraremos algumas propriedades de F em relação a pontos críticos de sela do tipo 1:

- A função F só pode apresentar pontos de sela do tipo 1, indicados por $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$, em regiões $R_{1\cdots n}$ que têm influência de $n > 2$ primitivas não-colineares.
- Cada ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ está localizado em uma região delimitada pelos pontos críticos (máximos ou selas do tipo 2) associados às primitivas que circundam tal região. Tais primitivas devem ter influência não-nula em $R_{1\cdots n}$.
- Existe somente um ponto de sela do tipo 1 em cada região $R_{1\cdots n}$.
- O baricentro da região definida pelos pontos críticos "corrigidos" entre cada par de primitivas é uma boa estimativa inicial para a determinação numérica do ponto de sela do tipo 1 em $R_{1\cdots n}$.
- A superfície implícita $\mathcal{S}_c$ apresenta um "furo" na região $R_{1\cdots n}$ caso

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}) \leq c < \min_{ij}\{F(\hat{\mathbf{x}}_{ij})\}.$$

4.3.1 Configuração Colinear

Para três primitivas, podem ser consideradas como significativas duas situações: quando os centros das primitivas são colineares e quando estes formam um triângulo (caso geral). Esta seção aborda o primeiro caso. Mostraremos que na configuração alinhada só podem ocorrer pontos de sela do tipo 2 em regiões de influência múltipla.

Vamos supor de início que as primitivas tenham o mesmo raio. Sem perda de generalidade, a primeira primitiva será colocada na origem, a segunda sobre o eixo x, distando d_a da origem, e a terceira também sobre x, distando d_b da segunda. Temos então $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (d_a, 0, 0)$, $P_3 = (d_a + d_b, 0, 0)$ e $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

Naturalmente, sempre teremos $0 \leq d_a$ e $0 \leq d_b$, pois valores negativos resultariam em situações equivalentes, com as primitivas simplesmente trocando de posição.

Quando $2r \leq d_a + d_b$, não existem regiões em que ocorra contribuição simultânea das três primitivas. A Figura 4.26 ilustra a situação limite, em que $d_a + d_b = 2r$. Observe que a superfície implícita pode ser vista como uma combinação de casos já analisados anteriormente. Nas regiões R_1, R_2 e R_3, a superfície $\mathcal{S}_c$ coincide, respectivamente, com os conjuntos de nível $f_1(\mathbf{x}) = c$, $f_2(\mathbf{x}) = c$ e $f_3(\mathbf{x}) = c$. Nas regiões R_{12} e R_{23} a superfície corresponde ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem as equações $f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) = c$ e $f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) = c$, respectivamente. Cada parte de $\mathcal{S}_c$ contida em uma região de influência múltipla é denominada **retalho**.

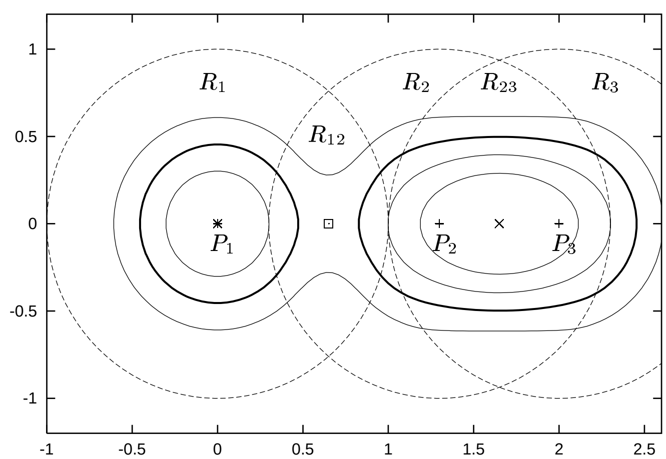


Figura 4.26: Corte no plano xy, para três primitivas colineares, com $d_a = 1.3r$, $d_b = 0.7r$ e $c = 0.5$.

Para valores inferiores da soma $d_a + d_b$, passa a existir uma região R_{123} com influência simultânea de três primitivas. Como F é de classe C^2, existe necessariamente continuidade entre os retalhos da superfície contidos em R_{123} e os contidos nas regiões vizinhas.

Sendo os raios iguais, se $0 < d_b < r$ então sempre existirá uma região R_{12} adjacente a

R_{123}. Por definição, o retalho da superfície implícita contido em R_{12} é resultado somente da interação entre as regiões de influência das primitivas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, e o retalho em R_{123}, da interação entre $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$. Note que somente na direção $\overline{P_1P_3}$ a derivada de f_1 tem sinal contrário ao da derivada de $f_2 + f_3$, podendo formar um "estrangulamento" (Figura 4.27), como visto na Seção 4.2.1.

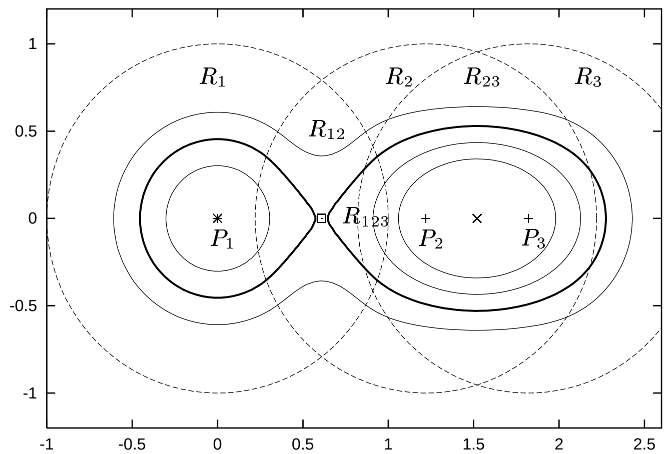


Figura 4.27: Corte no plano xy, para três primitivas colineares, com $d_a = 1.22r$, $d_b = 0.6r$ e $c = 0.5$.

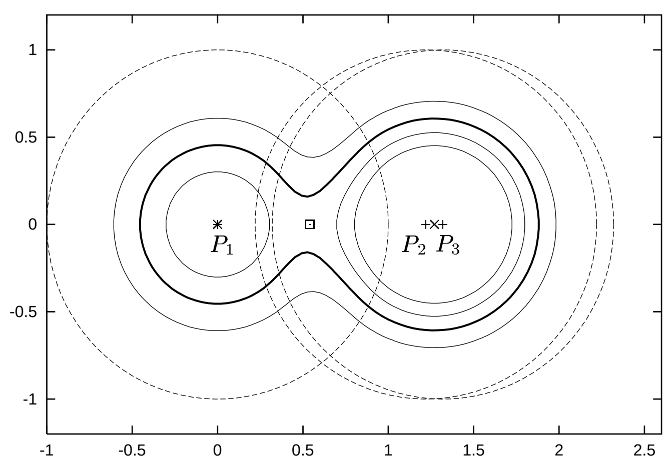


Figura 4.28: Corte no plano xy, para três primitivas colineares, com $d_a = 1.22r$, $d_b = 0.1r$ e $c = 0.5$.

Portanto, o tipo de singularidade que pode ocorrer em R_{123} é análogo ao que vimos nos casos com duas primitivas. Tanto que quando $d_b \approx 0$, $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ passam a se comportar aproximadamente como uma única primitiva, com o dobro da contribuição de uma primitiva individual. Isto não causa mudanças significativas nas superfícies resultantes, mas pode antecipar a ocorrência de uma fusão entre dois componentes, como ilustrado na Figura 4.28.

Para saber se a superfície $\mathcal{S}_c$ é conexa ou separada entre P_1 e P_2, podemos fazer uso do conhecimento do ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ de $f_1 + f_2$:

- (a) Se $\hat{\mathbf{x}}_{12} \notin R_{123}$, então $\hat{\mathbf{x}}_{12} \in R_{12}$ é um ponto crítico de F, pois f_3 é identicamente nula em R_{12} (Figura 4.27). Além disso, em R_{123} não pode ocorrer nenhum outro ponto crítico, pelo fato de termos
$$|\nabla f_1| < |\nabla f_2| < |\nabla f_2 + \nabla f_3|$$
no segmento que une $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ a P_2.

- (b) Se $\hat{\mathbf{x}}_{12} \in R_{123}$, então $f_1 + f_2$ é adicionada de f_3 em R_{123}, com f_3 tendo o mesmo comportamento que f_2 (Figura 4.28). Assim, o gradiente $\nabla f_1 + \nabla f_2$ sofre o acréscimo de ∇f_3 em R_{123}.

  Se este aumento for suficientemente grande, o que somente ocorre para primitivas com raios distintos, o ponto $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ pode desaparecer, dando lugar a um máximo comum $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_3$.

  Caso contrário, existe um ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{123}$ de sela do tipo 2 no segmento que une $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ a P_2, e que pode ser encontrado numericamente usando-se $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ como estimativa inicial. Observe que $\hat{\mathbf{x}}_{123}$ corresponde a uma versão "corrigida" de $\hat{\mathbf{x}}_{12}$.

De posse da posição do ponto crítico entre P_1 e P_2, pode-se inferir facilmente a geometria de $\mathcal{S}_c$ examinando o seu valor crítico. Se este valor for menor que c, a superfície é separada. Caso contrário, ela é conexa.

O caso geral corresponde a primitivas de raios distintos, com raios r_1, r_2 e r_3. Aqui a condição para que não ocorra uma região de tripla influência é de que $r_1 + r_3 \leq d_a + d_b$ (Figura 4.29).

Como a influência de uma primitiva, por exemplo $\mathcal{P}_3$, pode se estender além das outras em função do tamanho de seu raio, pode surgir a região R_{13}, como ilustra a Figura 4.30. Neste caso $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3$, o que causa o desaparecimento do ponto crítico de sela do tipo 2 definido apenas por $f_1 + f_3$, restando somente um ponto de máximo.

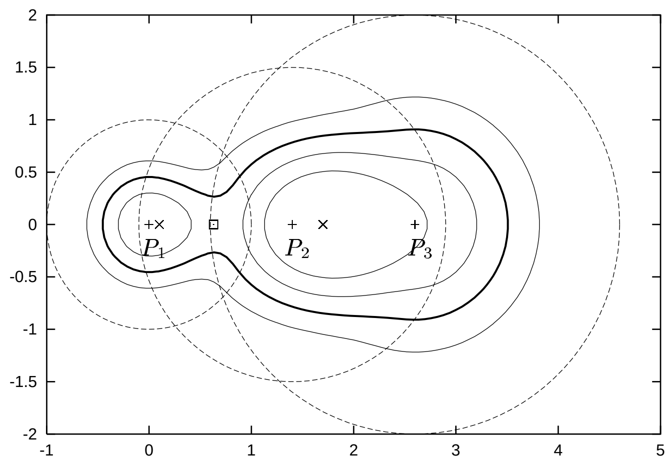


Figura 4.29: Corte no plano xy, para três primitivas colineares, com $r_1 = 1$, $r_2 = 1.5$, $r_3 = 2$, $d_a = 1.4$, $d_b = 1.2$ e $c = 0.5$.

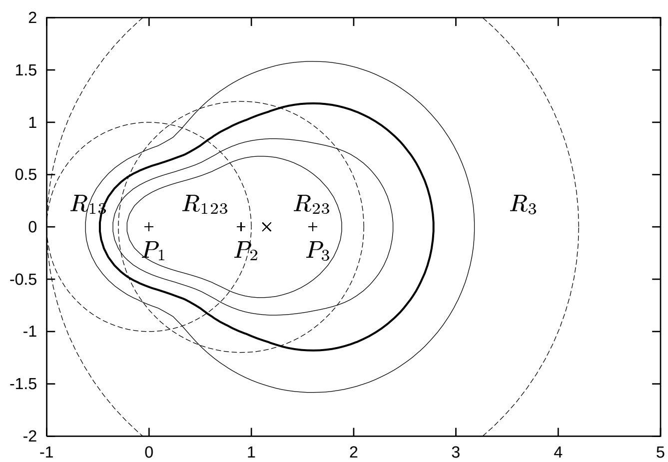


Figura 4.30: Corte no plano xy, para três primitivas colineares, com $r_1 = 1$, $r_2 = 1.2$, $r_3 = 2.6$, $d_a = 0.9$, $d_b = 0.7$ e $c = 0.5$.

4.3.2 Configuração Não-Colinear

A outra situação relevante para três primitivas ocorre quando os seus centros não estão alinhados. Dependendo da disposição de tais primitivas, pode ocorrer um ponto crítico até então não observado: um ponto de sela do tipo 1. Este tipo de ponto crítico ocorre necessariamente em regiões $R_{1 \cdots n}$ em que há influência de três ou mais primitivas não-colineares. Veremos que a não-colinearidade possibilita que as derivadas de f_i em duas direções linearmente independentes se anulem, causando a criação de um "buraco" em $R_{1\cdots n}$ para certos conjuntos de nível de F.

Vamos inicialmente analisar a configuração mais simples, com três primitivas de raios iguais, e posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado d. Temos então $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (d,0,0)$, $P_3 = \left(\frac{d}{2}, \frac{d\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $r_1 = r_2 = r_3 = r$. Pela simetria da situação, podemos utilizar os mesmos intervalos de análise do caso com duas primitivas de raios iguais, descrito na Seção 4.2.1. Observe que somente existirá uma região de influência tripla quando $d < \sqrt{3}\, r$.

Para $r + \bar{r} \leq d$, não ocorre influência mútua significativa entre as primitivas, sendo a superfície implícita constituída por três esferas de raio $\bar{r}$. No entanto, no interior da região em que há influência das três primitivas, surge um novo ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{123}$, uma sela do tipo 1. Isto acontece em decorrência da influência de $\mathcal{P}_3$ sobre a função $f_1 + f_2$ na direção do eixo y, criando um "vale" nesta direção, enquanto nas outras duas direções ortogonais o comportamento de F é similar ao de pontos de sela do tipo 2 (Figura 4.31).

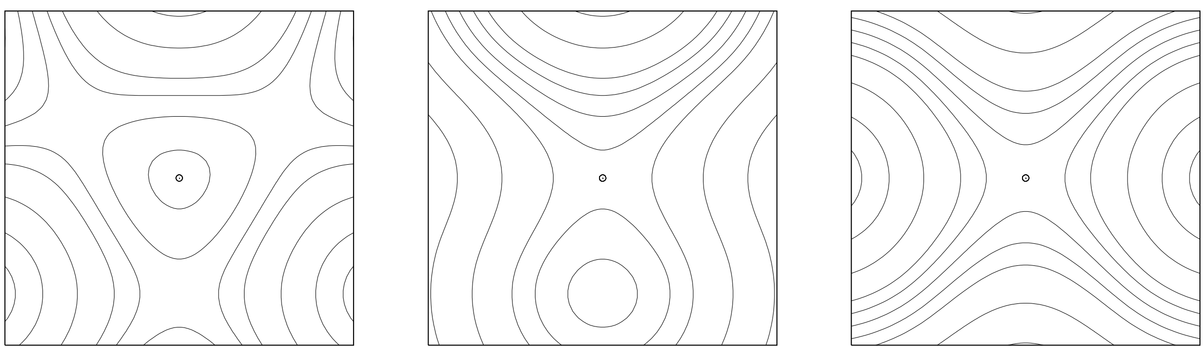


Figura 4.31: Cortes de F na vizinhança de um ponto de sela do tipo 1, no plano xy (esquerda), no plano yz (meio) e no plano xz (direita).

Em linhas gerais, um ponto de sela do tipo 1 só pode ocorrer quando F é similar a um parabolóide na vizinhança do ponto em uma das direções. Em uma configuração não-colinear podemos considerar, sem perda de generalidade, que os centros das primitivas estejam no plano xy. Neste caso é necessário que o ponto seja rodeado de primitivas para que exista esse parabolóide, orientado na direção do eixo z.

No presente caso, por simetria, este ponto crítico localiza-se exatamente no baricentro do triângulo formado por P_1, P_2 e P_3, como mostra a Figura 4.32.

Quando temos $r \leq d < r + \bar{r}$, a superfície deixa de ser constituída por três esferas. Em um primeiro momento cada componente se abaula em direção dos outros, se alongando até que se tocam em $\hat{d}_\alpha = 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{c}{2}}}\; r$, quando o valor crítico dos pontos de sela do tipo 2 entre cada

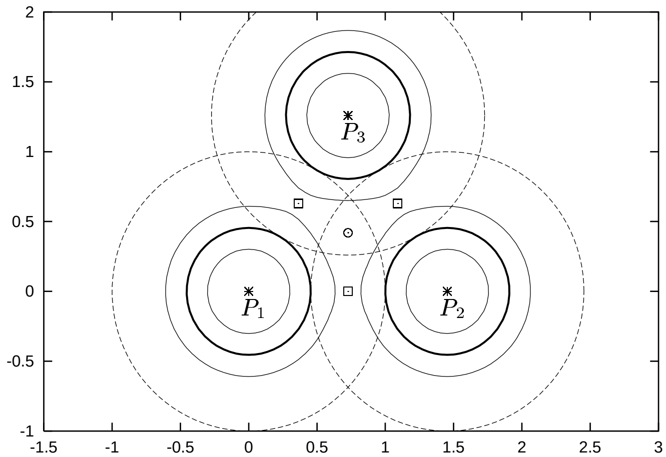


Figura 4.32: Corte no plano xy, para três primitivas não-colineares, com $d = r + \bar{r}$ e $c = 0.5$.

par de primitivas é igual a c. Neste instante a superfície passa por uma mudança de topologia, apresentando três singularidades, como ilustrado na Figura 4.33.

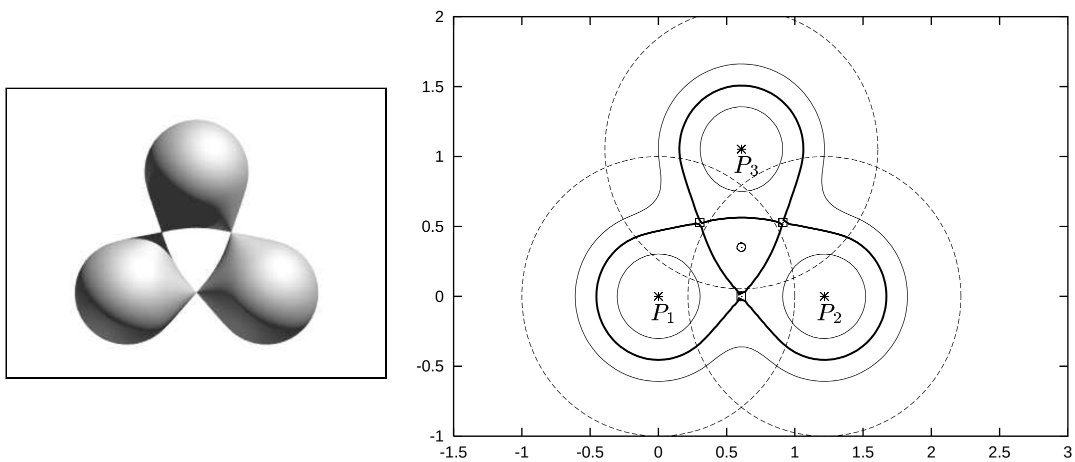


Figura 4.33: Superfície (esquerda) e corte no plano xy (direita), para três primitivas não-colineares, com $d = \hat{d}_\alpha$ e $c = 0.5$.

Para valores da distância pouco inferiores a $\hat{d}_\alpha$, a superfície fica constituída de apenas um componente, apresentando um furo. Isto corresponde a termos $F(\hat{\mathbf{x}}_{ij}) > c$, para os pontos críticos de sela do tipo 2, $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$.

À medida que as primitivas se aproximam, o valor da função em $\hat{\mathbf{x}}_{123}$ aumenta e furo da superfície implícita se reduz. Isto acontece até o momento em que a distância fica igual a $\hat{d}_\beta$, quando ocorre uma nova mudança de topologia. Neste instante o furo desaparece, formando uma singularidade, e temos $F(\hat{\mathbf{x}}_{123}) = c$. Tal singularidade ocorre onde um trecho da superfície toca outro trecho, o que acontece em um único ponto (Figura 4.34).

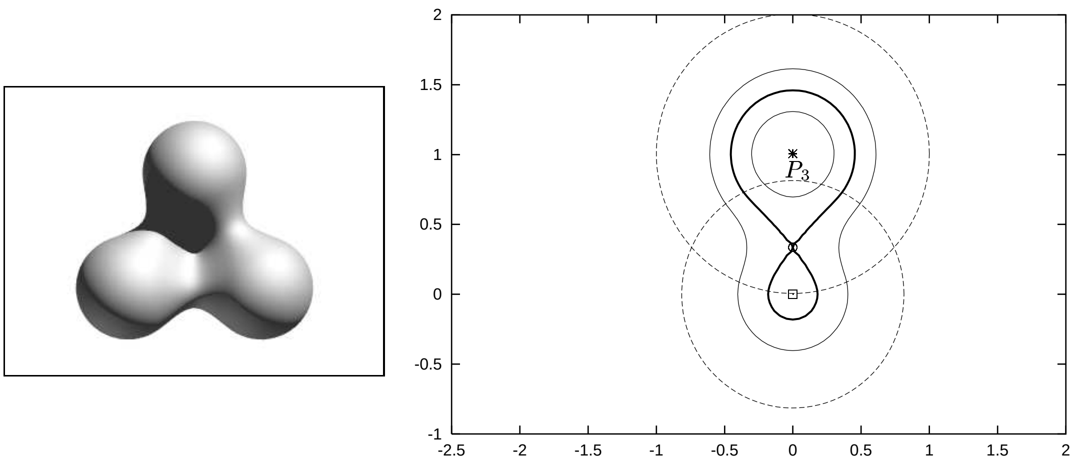


Figura 4.34: Superfície (esquerda) e corte no plano yz (direita), para três primitivas não-colineares, com $d = \hat{d}_\beta$ e $c = 0.5$.

O valor $\hat{d}_\beta$ pode ser calculado observando-se que as contribuições das três primitivas são sempre iguais no baricentro de P_1, P_2 e P_3. Quando $F(\hat{\mathbf{x}}_{123})$ alcança o limiar, temos $f_i = \frac{c}{3}$. Usando a Eq. (3.15) podemos obter a distância entre o baricentro e o centro de uma primitiva quando ocorre esta singularidade. Em conseqüência, $\hat{d}_\beta$ é dado por

$$\hat{d}_\beta = \sqrt{3}\,\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{c}{3}}}\; r.$$

Para d assumindo valores inferiores a $\hat{d}_\beta$, a superfície mantém-se como um único componente sem furo.

Finalmente, no intervalo $0 \leq d < r$ a superfície se aproxima gradativamente da forma esférica (Figura 4.35), que é atingida quando $d = 0$. É interessante observar que durante este processo o ponto de sela do tipo 1 vai se aproximando dos pontos de sela do tipo 2 e dos máximos, até que se forma um ponto crítico degenerado. Continuando a reduzir d, este ponto passa a ser um ponto de máximo, o único de F.

Ainda com três primitivas de raios iguais, é conveniente examinar as situações em que sua configuração não é simétrica. Neste caso, um ou mais pontos críticos de sela do tipo 2 podem desaparecer, e conseqüentemente, o ponto de sela do tipo 1.

De maneira similar ao procedimento descrito na seção anterior, neste caso pode-se inferir

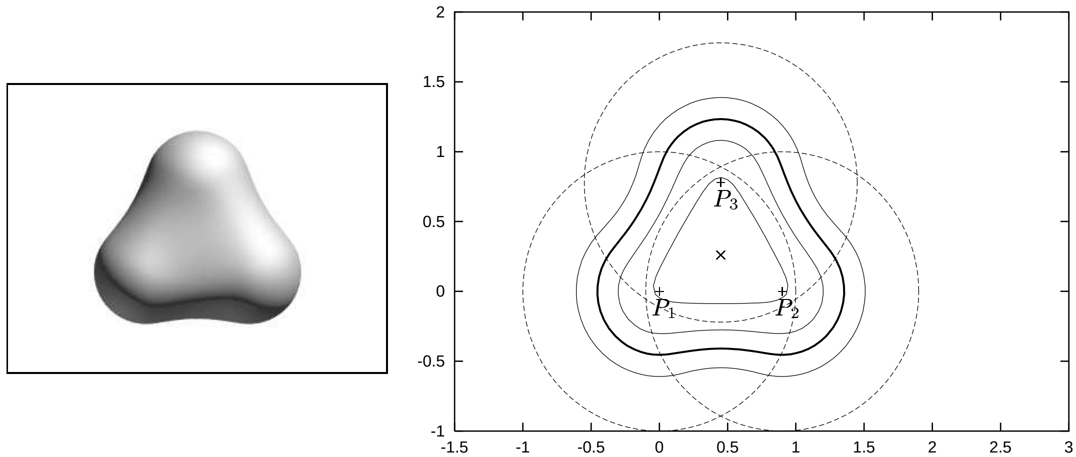


Figura 4.35: Superfície (esquerda) e corte no plano yz (direita), para três primitivas não-colineares, com $d = 0.9$ e $c = 0.5$.

o comportamento da superfície como um todo analisando-se as interações entre cada par de primitivas. Tome como exemplo a situação exibida na Figura 4.36. Examinadas duas a duas, temos dois pares de primitivas separadas, ou seja, com $F(\hat{\mathbf{x}}_{12}) < c$ e $F(\hat{\mathbf{x}}_{13}) < c$, e um par de primitivas ligadas, com $F(\hat{\mathbf{x}}_{23}) > c$. Somente se todos os valores críticos dos pontos $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$ estivessem abaixo do limiar c é que poderia ocorrer um furo, pois desta forma o ponto $\hat{\mathbf{x}}_{123}$ estaria cercado por valores mais altos. O resultado é, portanto, uma superfície com dois componentes.

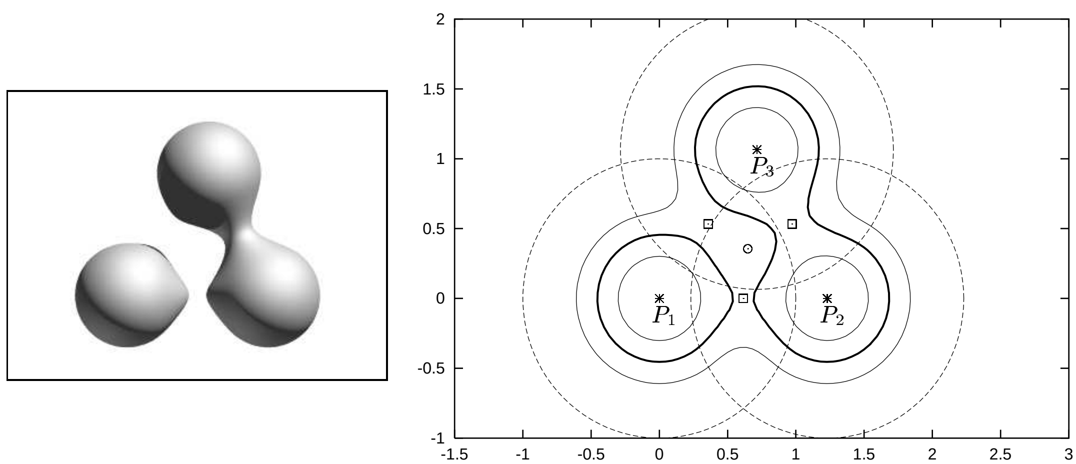


Figura 4.36: Superfície (esquerda) e corte no plano yz (direita), para três primitivas não-colineares, com $c = 0.5$.

Seja agora a configuração mostrada na Figura 4.37. Temos dois pares de primitivas ligadas, e um de primitivas separadas. Pelos motivos expostos anteriormente, isso resulta em uma superfície com apenas um componente. Como o ponto de sela do tipo 2, $\hat{\mathbf{x}}_{12}$, tem valor crítico menor que c, mesmo que a primitiva $\mathcal{P}_3$ seja aproximada das demais, não ocorre o surgimento de um furo na superfície (Figura 4.38).

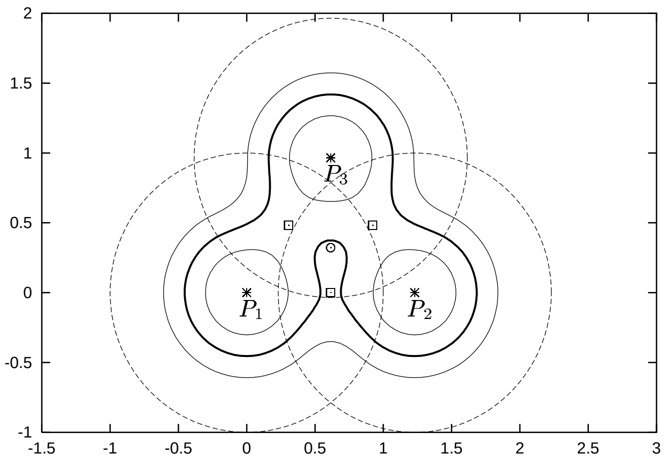


Figura 4.37: Corte no plano xy, para três primitivas não-colineares, com $c = 0.5$.

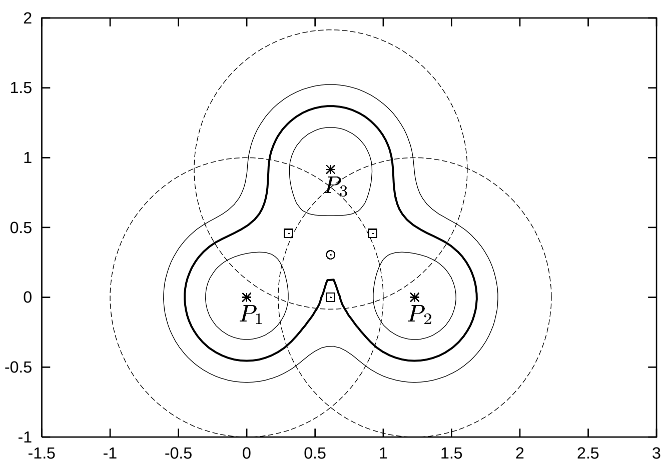


Figura 4.38: Corte no plano xy, para três primitivas não-colineares, com $c = 0.5$.

O caso geral novamente corresponde a primitivas de raios distintos. Não há mudança significativa no comportamento da superfície e dos pontos críticos de F, exceto pelo fato de que não mais se consegue obter uma solução fechada para a posição do ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ em $R_{1\cdots n}$, em função das distâncias entre as primitivas e de seus raios de influência.

Entretanto, o estudo de casos de três primitivas com raios iguais nos permitiu adotar o seguinte procedimento para obter $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ numericamente na região de influência múltipla $R_{1\cdots n}$:

1. Determinar numericamente o ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$ entre cada par de primitivas $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{P}_j$, utilizando a estimativa inicial $\hat{\mathbf{e}}_{12}$. Conforme vimos na Seção 4.2.2, este ponto só pode ser um máximo ou um ponto de sela do tipo 2.

2. Atualizar cada $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$, caso estejam dentro das regiões de influência de outras primitivas, sendo utilizados como estimativas iniciais para os métodos numéricos.

   Como já discutido, influências adicionais podem modificar a natureza de um ponto $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$. Se este deixar de ser um ponto crítico, o processo numérico não converge; caso contrário, ele sempre converge para um ponto crítico próximo. Pelos autovalores da Hessiana neste novo ponto pode ser feita a sua classificação.

   Se por acaso este novo ponto não estiver na região $R_{1\cdots n}$, é conveniente substituí-lo por outro que esteja dentro da mesma. Um expediente adequado é identificar o ponto de intersecção de um dos autovetores da Hessiana calculada no ponto (devidamente projetado no plano que aproximadamente contém as primitivas $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$) com a região $R_{1\cdots n}$ (Figura 4.39).

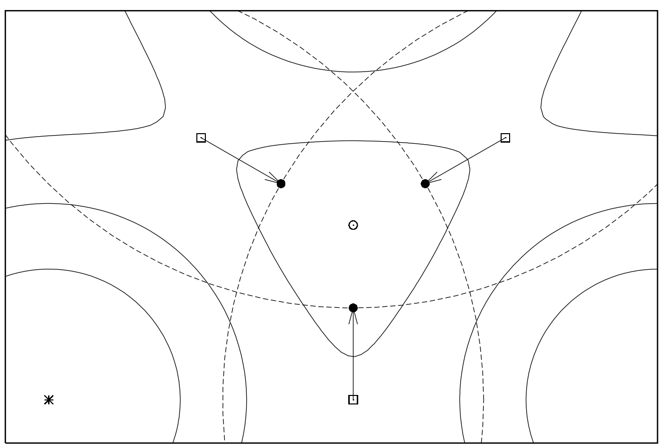


Figura 4.39: Obtenção de pontos dentro de $R_{1\cdots n}$.

3. Determinar $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ utilizando como estimativa inicial o baricentro dos pontos obtidos na etapa anterior. Caso os pontos sejam colineares, a situação é reduzida ao caso descrito na Seção 4.3.1.

Conhecendo $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ podemos inferir corretamente a geometria da superfície $\mathcal{S}_c$ em $R_{1\cdots n}$. Ela será preenchida caso $F(\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}) \geq c$; terá um furo caso $F(\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}) < c < \min\{F(\hat{\mathbf{x}}_{ij})\}$; e será aberta para $c \geq \min\{F(\hat{\mathbf{x}}_{ij})\}$.

4.4 Quatro Primitivas

O último caso significativo corresponde a arranjos de quatro (ou mais) primitivas não-coplanares, que criam uma região $R_{1\cdots n}$ onde todas estas apresentam influência simultânea.

Tal região pode conter um ponto onde o gradiente de F se anula, pois em tal configuração é possível a existência de derivadas em três direções linearmente independentes que se anulem de forma mútua. Um ponto com esta característica corresponde a um ponto crítico de mínimo $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$.

A Figura 4.40 apresenta três cortes em planos perpendiculares, ilustrando os conjuntos de nível de F na vizinhança de um ponto de mínimo.

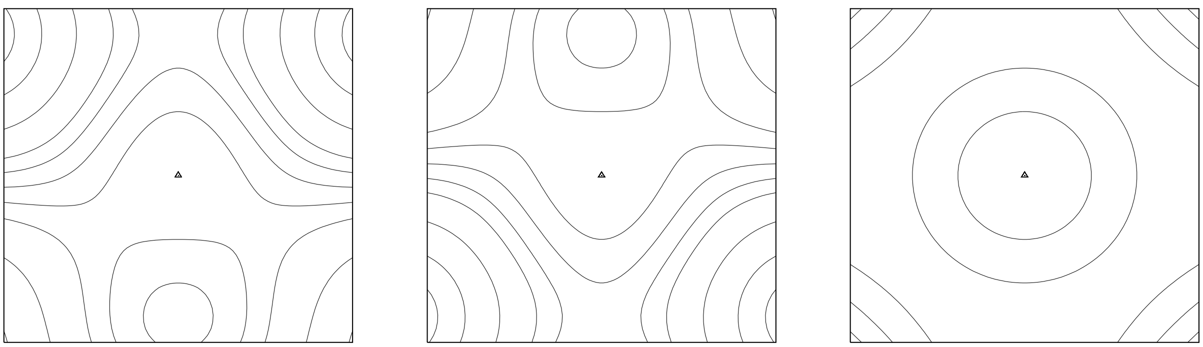


Figura 4.40: Cortes de F na vizinhança de um mínimo, no plano xy (esquerda), no plano yz (meio) e no plano xz (direita).

Fazendo uma análise de forma similar às configurações anteriores, constatamos as seguintes propriedades:

- A função F só pode apresentar pontos de mínimo $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ na região que tem a influência de $n > 3$ primitivas não-coplanares.
- O ponto $\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}$ está localizado na região delimitada pelos pontos críticos $\hat{\mathbf{x}}_{j\cdots k}$ associados a conjuntos de primitivas coplanares que têm influência não-nula em $R_{1\cdots n}$. Tais pontos podem ser máximos, selas do tipo 2 ou ainda selas do tipo 1.
- Existe um e somente um ponto de mínimo em $R_{1\cdots n}$.
- O baricentro da região definida pelos pontos críticos "corrigidos", devidos a cada conjunto de primitivas coplanares, mostrou-se uma boa estimativa inicial para a determinação numérica do ponto de mínimo em $R_{1\cdots n}$.

- A superfície implícita $\mathcal{S}_c$ apresenta uma "bolha" na região $R_{1\cdots n}$ caso

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{1\cdots n}) \leq c < \min_{j\cdots k}\{F(\hat{\mathbf{x}}_{j\cdots k})\}.$$

Por simplicidade vamos examinar o caso básico, com primitivas de mesmo raio e centros formando um tetraedro regular de lado d. Sejam $P_1 = \left(-d, \frac{d}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $P_2 = \left(d, \frac{d}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, -\frac{d}{\sqrt{2}}, -d\right)$, $P_4 = \left(0, -\frac{d}{\sqrt{2}}, d\right)$ e $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$.

Para valores grandes de d, as primitivas são disjuntas, resultando em uma superfície implícita com quatro componentes esféricos.

Reduzindo d, os componentes começam a se abaular gradativamente, até se tocarem formando seis singularidades em $\hat{d}_\alpha$. Cada uma destas singularidades corresponde a um ponto $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$ de sela do tipo 2 de F, associado a um par de primitivas. Neste instante temos que $F(\hat{\mathbf{x}}_{ij}) = c$, como mostra a Figura 4.41. Como ocorre a fusão individual e simultânea de cada par de primitivas, a superfície resultante apresenta três furos[1].

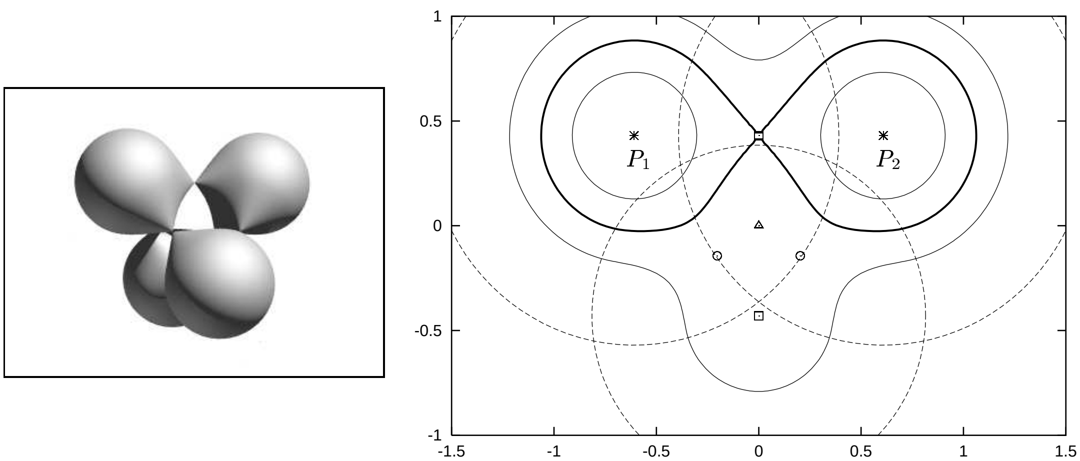


Figura 4.41: Superfície (esquerda, em vista oblíqua) e corte no plano xy (direita), para quatro primitivas não-coplanares, com $d = \hat{d}_\alpha$ e $c = 0.5$.

O valor de $\hat{d}_\alpha$ pode ser obtido exatamente como descrito na Seção 4.2.1, pois os pontos críticos $\hat{\mathbf{x}}_{ij}$ estão localizados em regiões R_{ij} com influência de somente duas primitivas. Portanto, temos $f_i = f_j = \frac{c}{2}$ e $\hat{d}_\alpha = 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{c}{2}}}\, r$.

Continuando a reduzir d, os pontos de sela do tipo 2 de F se aproximam o suficiente para elevar os valores críticos dos pontos de sela do tipo 1 até c, o que acontece em $\hat{d}_\beta$. Como

[1] Isso pode ser melhor observado ao se distorcer a superfície para que os furos fiquem perpendiculares a um mesmo plano do espaço.

visto na Seção 4.3.2, $\mathcal{S}_c$ terá uma singularidade no baricentro de cada conjunto de três primitivas coplanares. Como existem quatro destes conjuntos, a superfície neste instante terá quatro singularidades (Figura 4.42).

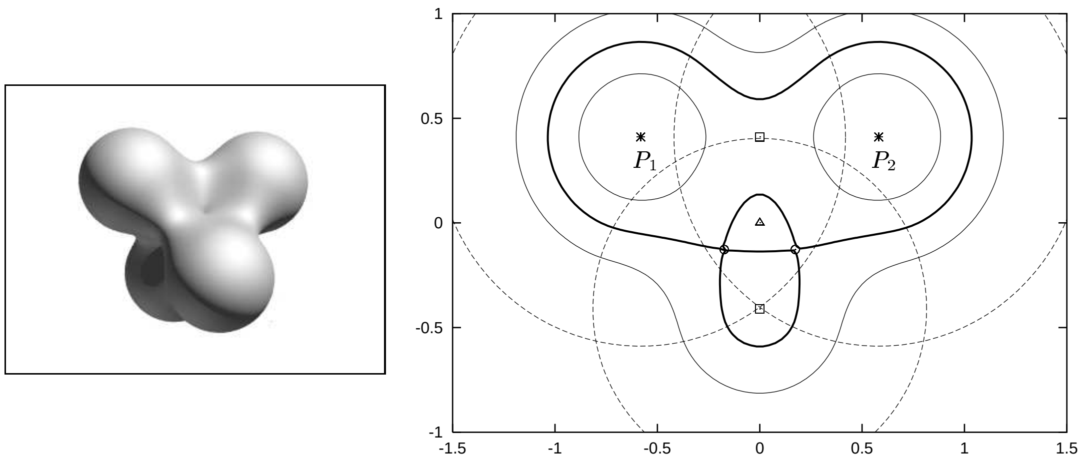


Figura 4.42: Superfície (esquerda, em vista oblíqua) e corte no plano xy (direita), para quatro primitivas não-coplanares, com $d = \hat{d}_\beta$ e $c = 0.5$.

Ao contrário do valor $\hat{d}_\alpha$, a distância $\hat{d}_\beta$ não pode ser calculada diretamente. Esta corresponde ao instante em que os quatro pontos de sela do tipo 1, $\hat{\mathbf{x}}_{ijk}$, assumem valores críticos iguais a c. Note que suas posições não correspondem mais aos baricentros de $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_j$ e $\mathcal{P}_k$, pois tais pontos estão agora na região R_{1234}. Como estes pontos sofrem influência das quatro primitivas, suas posições se deslocam em direção ao ponto de mínimo, como indica a Figura 4.42. Neste caso o valor $\hat{d}_\beta$ foi obtido por inspeção.

Observe que, quando os pontos $\hat{\mathbf{x}}_{ijk}$ cruzaram o limiar c, a superfície deixou de ter furos, mas no centro das primitivas o ponto de mínimo continua a ter um valor crítico maior que c. O resultado é a formação de uma "bolha", como ilustrado na Figura 4.42. Para efeito de síntese de imagens, podemos considerar esta bolha como um outro componente, com orientação invertida em relação ao componente externo.

Ao reduzir ainda mais d fazemos com que o valor crítico do ponto de mínimo atinja o limiar, criando uma nova singularidade no momento em que a bolha se reduz a um único ponto (Figura 4.43). A distância $\hat{d}_\gamma$ onde isto ocorre pode ser calculada analiticamente, pois a posição do mínimo $\hat{\mathbf{x}}_{1234}$ é conhecida e coincide com a origem. Por simetria, neste ponto temos $f_i = \frac{c}{4}$, o que nos diz que a distância entre $\hat{\mathbf{x}}_{1234}$ e um centro P_i deve ser $2\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{c}{4}}}\,r$. Isso nos leva a

$$\hat{d}_\gamma = \frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{c}{4}}}\,r.$$

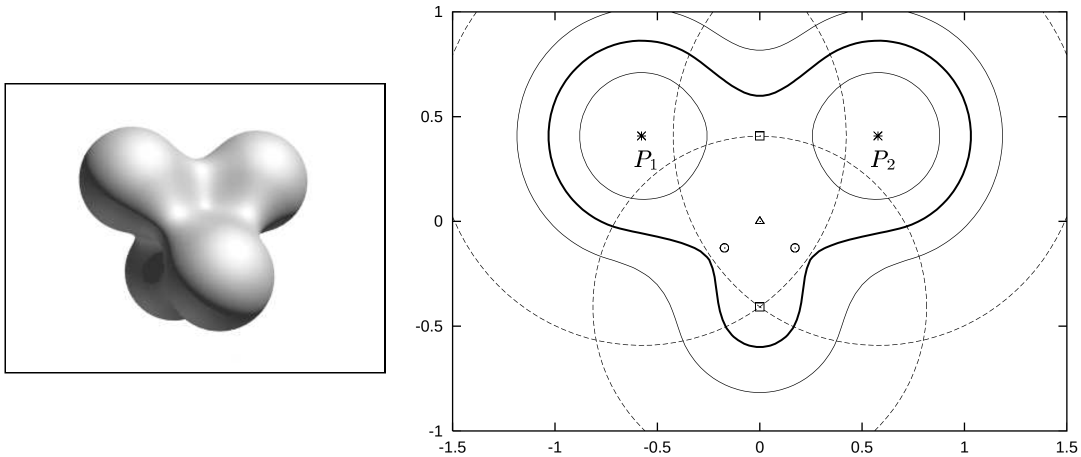


Figura 4.43: Superfície (esquerda, em vista oblíqua) e corte no plano xy (direita), para quatro primitivas não-coplanares, com $d = \hat{d}_\gamma$ e $c = 0.5$.

O ponto de mínimo tem seu valor crítico menor que o valor de todos os outros pontos críticos (máximos, selas do tipo 2 e selas do tipo 1), senão este não seria um ponto de mínimo. Além disso, $\hat{\mathbf{x}}_{1234}$ deve ser circundado espacialmente pelos pontos críticos de outra natureza. Em particular, no caso de uma região de influência de n primitivas $R_{1\cdots n}$, se existir um ponto de mínimo nesta região, este deve ser circundado por todos os pontos críticos de outro tipo da função $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

Para d menor que $\hat{d}_\gamma$, a superfície implícita corresponde a apenas um componente, sem a existência de uma bolha. Este componente gradualmente se aproxima da forma esférica, atingida quando $d = 0$.

Em resumo, o conhecimento do valor crítico do ponto de mínimo de F é fundamental para a determinação correta da topologia da superfície implícita $\mathcal{S}_c$ na região $R_{1\cdots n}$ devida a n primitivas não-coplanares. Resta ainda saber como este ponto pode ser obtido.

Usando o fato de que o ponto de mínimo deve estar no meio dos outros pontos críticos de $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, podemos utilizar o baricentro destes pontos como estimativa inicial para uma resolução numérica. Novamente pode ser conveniente "corrigir" tais pontos críticos, obtendo novos pontos na direção de um de seus autovetores que estejam dentro de $R_{1\cdots n}$.

4.5 Procedimento para a Determinação de Pontos Críticos

Com base na discussão feita nas seções anteriores, apresentamos a seguir um procedimento para obter numericamente todos os pontos críticos da função implícita F, para uma dada configuração com n primitivas.

1. Determinação de máximos:
   Para cada primitiva $\mathcal{P}_i$ com centro em P_i:

   (a) Defina $\hat{\mathbf{e}}_i = P_i$ como a estimativa inicial para o ponto de máximo $\hat{\mathbf{x}}_i$.

   (b) Valide $\hat{\mathbf{e}}_i$, verificando se este está no interior das regiões de influência de outras primitivas além das já consideradas. Caso não esteja, o máximo $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i$ foi encontrado.

   (c) Recalcule $\hat{\mathbf{e}}_i$, considerando a nova função

   $$\sum^{l} f_i + \sum^{m} f_j,$$

   onde l e m denotam, respectivamente, o número de primitivas já consideradas e de não consideradas que têm regiões de influência contendo $\hat{\mathbf{e}}_i$. Use a estimativa anterior de $\hat{\mathbf{e}}_i$ como base para esta nova iteração. Volte ao passo 1b.

2. Construção do grafo de incidência: os vértices deste grafo representam os máximos (e as primitivas associadas), enquanto as arestas indicam a existência de uma região de influência comum entre cada par de máximos.

3. Determinação de selas de tipo 2:
   Para cada aresta ij no grafo:

   (a) Se um vértice, i ou j, representa um grupo de primitivas, escolha duas primitivas que têm regiões de influência comuns. Suponha que estas são as primitivas $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{P}_b$.

   (b) Calcule o ponto crítico da função $f_a + f_b$, utilizando como estimativa inicial o ponto $\hat{\mathbf{e}}_{ab}$ dado pela Eq. (4.2). Caso o método numérico falhe, o ponto entre $\hat{\mathbf{e}}_{ab}$ e o centro da primitiva de maior raio é calculado e atribuído a $\hat{\mathbf{e}}_{ab}$, servindo como nova estimativa. Este processo é repetido até convergir para o ponto de sela do tipo 2 entre $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{P}_b$, que substitui $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$.

   (c) Valide o ponto $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$, verificando se este está no interior das regiões de influência de outras primitivas além das já consideradas. Se não estiver, o ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_{ij}$ foi encontrado; vá para o passo 3e.

(d) Recalcule $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$, considerando a nova função

$$\sum^{l} f_i + \sum^{m} f_j,$$

onde l e m denotam, respectivamente, o número de primitivas já consideradas e de não consideradas que têm regiões de influência contendo $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$. Use a estimativa anterior de $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$ como base para uma nova iteração. Se o método numérico falhar, não há ponto de sela. Caso contrário, volte para o passo 3c.

(e) Determine a classificação do ponto $\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_{ij}$, utilizando os autovalores da Hessiana de F no ponto.

4. Atualize o grafo de incidência, removendo as arestas entre cada par de vértices que, ou tenham determinado um ponto crítico diferente de uma sela do tipo 2, ou que não tenham pontos críticos.

5. Marque como um **ciclo** no grafo de incidência cada seqüência fechada de vértices não-colineares cujas primitivas tenham uma região de influência comum.

6. Determinação de selas do tipo 1:
   Para cada ciclo c aproximadamente planar no grafo:

   (a) Calcule o ponto crítico associado ao ciclo c, usando como estimativa inicial, $\hat{\mathbf{e}}_c$, o baricentro das selas de tipo 2 que circundam a região R_c. Se o método numérico não convergir, substitua as selas de tipo 2 que estejam fora de R_c pelos pontos mais próximos em R_c, ao longo da direção de um dos autovetores associados a cada sela. Use o baricentro deste novo conjunto de pontos como estimativa inicial.

   (b) Determine a classificação de $\hat{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{e}}_c$, com base nos autovalores da Hessiana de F neste ponto.

7. Marque como um **superciclo** no grafo de incidência cada conjunto de ciclos cujas primitivas constroem uma configuração não-coplanar e que tenham uma região de influência comum.

8. Determinação de mínimos:
   Para cada superciclo s no grafo:

   (a) Calcule o ponto crítico associado ao superciclo s, usando como estimativa inicial, $\hat{\mathbf{e}}_s$, o baricentro das selas de tipo 1 que circundam a região R_s. Se o método numérico não convergir, substitua as selas de tipo 1 que estejam fora de R_s pelo pontos mais próximos em R_c, ao longo da direção de um dos autovetores associados a cada sela. Use o baricentro deste novo conjunto de pontos como estimativa inicial.

(b) Determine a classificação de $\hat{\mathbf{x}}_s = \hat{\mathbf{e}}_s$, com base nos autovalores da Hessiana de F neste ponto.

9. Fim.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo apresentamos diversas configurações de primitivas, que tiveram seus pontos críticos determinados pelo procedimento descrito na Seção 4.5.

5.1 Procedimento Passo a Passo

Vamos inicialmente considerar a situação simétrica de quatro primitivas dispostas nos vértices de um tetraedro regular, à semelhança da discussão feita na Seção 4.4. O procedimento para a determinação de seus pontos críticos é mostrado a seguir.

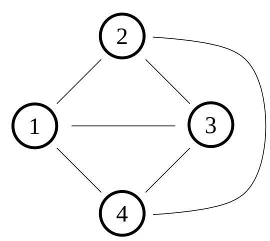
As tabelas apresentam cada ponto crítico encontrado, indicando a estimativa inicial utilizada (estimativa), os índices das primitivas que têm influência sobre o mesmo (influência), sua posição ($\hat{\mathbf{x}}$) e o número de iterações necessárias para a convergência (iterações).

Sejam então quatro primitivas com raio unitário e centros dados por $P_1 = (\alpha, \alpha, \alpha)$, $P_2 = (\alpha, -\alpha, -\alpha)$, $P_3 = (-\alpha, \alpha, -\alpha)$ e $P_4 = (-\alpha, -\alpha, \alpha)$, onde $\alpha = 0.41$.

1. **Máximos:** Os centros das primitivas foram usados como estimativas iniciais para os máximos. Uma vez que não há influência de outras primitivas nos pontos P_i, estes coincidem com os pontos críticos. Todos os máximos apresentam valor crítico igual a 1.

i	estimativa	influência	$\hat{\mathbf{x}}_i$	iterações
1	P_1	1	$(0.41, 0.41, 0.41)$	0
2	P_2	2	$(0.41, -0.41, -0.41)$	0
3	P_3	3	$(-0.41, 0.41, -0.41)$	0
4	P_4	4	$(-0.41, -0.41, 0.41)$	0

2. **Grafo de incidência:** Para cada primitiva $\mathcal{P}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ é associado um máximo. Em conseqüência, são necessários quatro vértices no grafo para representá-los. Devido à simetria da configuração, estas primitivas têm influência mútua, o que leva ao seguinte grafo:

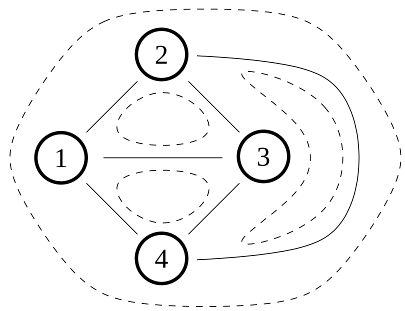


3. **Selas do tipo 2:** A Eq. (4.2) foi usada para a obtenção da estimativa inicial para cada par de primitivas. Por causa da simetria, todos estes pontos têm o mesmo valor crítico, 0.585.

ij	estimativa	influência	$\hat{\mathbf{x}}_{ij}$	iterações
12	$\hat{\mathbf{e}}_{12}$	1,2	$(0.41, 0, 0)$	0
13	$\hat{\mathbf{e}}_{13}$	1,3	$(0, 0, -0.41)$	0
14	$\hat{\mathbf{e}}_{14}$	1,4	$(0, 0.41, 0)$	0
23	$\hat{\mathbf{e}}_{23}$	2,3	$(0, 0, 0.41)$	0
24	$\hat{\mathbf{e}}_{24}$	2,4	$(0, -0.41, 0)$	0
34	$\hat{\mathbf{e}}_{34}$	3,4	$(-0.41, 0, 0)$	0

4. **Atualização do grafo de incidência:** Como cada ponto crítico encontrado em uma região R_{ij} é uma sela do tipo 2 não-degenerada, não é necessário fazer a atualização do grafo de incidência.

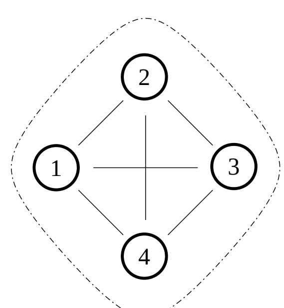
5. **Ciclos no grafo:** Neste caso, existem quatro seqüências fechadas de vértices no grafo, que correspondem aos conjuntos de primitivas {1,2,3}, {1,3,4}, {2,3,4} e {1,2,4}, como ilustrado na figura a seguir.



6. **Selas do tipo 1:** Neste caso, o baricentro de cada grupo de três selas do tipo 2 está dentro da região de influência comum de três primitivas, R_{ijk}. Por conseguinte, podemos utilizar estes baricentros como tentativas iniciais para obter as selas do tipo 1. Como houve a convergência do método numérico para estas estimativas, não há necessidade de se corrigir os pontos críticos. O valor crítico de cada sela do tipo 1 é 0.5056.

c	estimativa	influência	$\hat{\mathbf{x}}_c$	iterações
123	$(\hat{\mathbf{x}}_{12} + \hat{\mathbf{x}}_{23} + \hat{\mathbf{x}}_{13})/3$	1,2,3,4	$(0.125, 0.125, -0.125)$	2
124	$(\hat{\mathbf{x}}_{12} + \hat{\mathbf{x}}_{24} + \hat{\mathbf{x}}_{14})/3$	1,2,3,4	$(0.125, -0.125, 0.125)$	2
134	$(\hat{\mathbf{x}}_{13} + \hat{\mathbf{x}}_{34} + \hat{\mathbf{x}}_{14})/3$	1,2,3,4	$(-0.125, 0.125, 0.125)$	2
234	$(\hat{\mathbf{x}}_{23} + \hat{\mathbf{x}}_{34} + \hat{\mathbf{x}}_{24})/3$	1,2,3,4	$(-0.125, -0.125, -0.125)$	2

7. **Superciclo no grafo:** Somente com as primitivas dos quatro ciclos previamente identificados foi possível definir uma configuração não-coplanar. Podemos, portanto, agrupar estes ciclos em um único superciclo:



8. **Mínimos:** Devido à simetria podemos utilizar como estimativa para o mínimo o baricentro dos quatro pontos de selas do tipo 1 encontrados anteriormente. O valor deste ponto crítico é 0.4872.

s	estimativa	$\hat{\mathbf{x}}_s$	iterações
1234	$(\hat{\mathbf{x}}_{123} + \hat{\mathbf{x}}_{124} + \hat{\mathbf{x}}_{134} + \hat{\mathbf{x}}_{234})/4$	$(0, 0, 0)$	0

9. **Fim.**

Com base nos valores críticos obtidos acima, podemos caracterizar a topologia da superfície implícita $\mathcal{S}_c$ para distintos valores do limiar c. Como foram determinados três valores críticos, identificamos quatro configurações topológicas, ilustradas na Figura 5.1 e resumidas na tabela seguinte.

nenhum componente	$c > 1$
quatro componentes	$0.585 < c \leq 1$
um componente com três furos	$0.5056 < c \leq 0.585$
um componente com uma bolha	$0.4872 < c \leq 0.5056$
um componente sem bolhas	$0 < c \leq 0.4872$

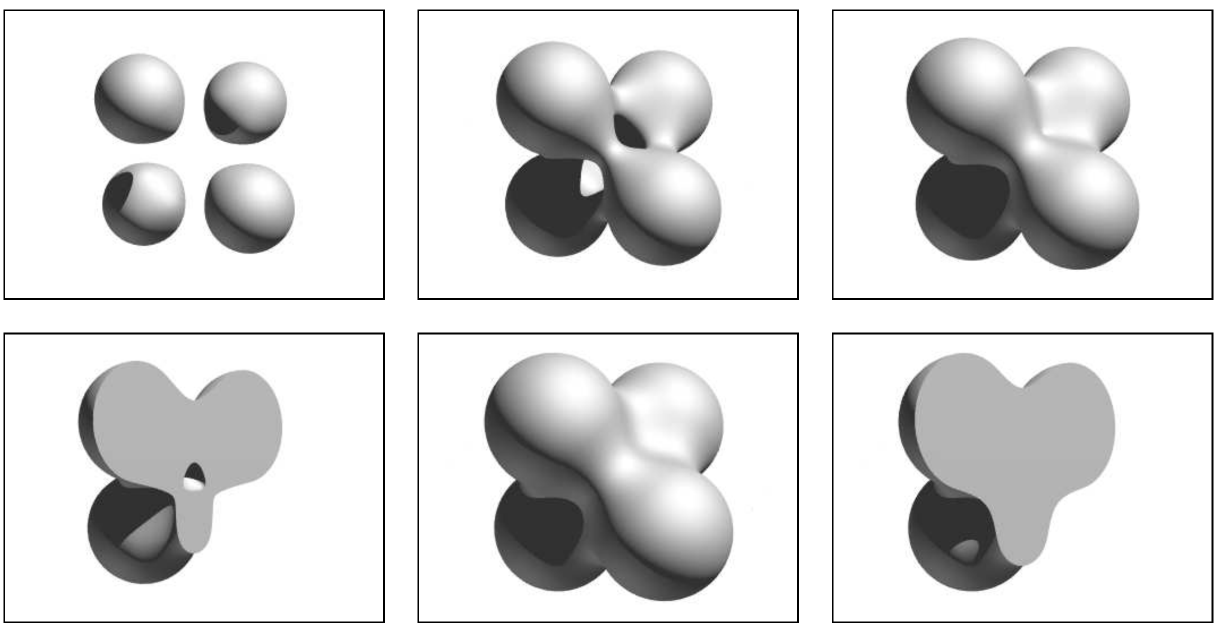


Figura 5.1: Configuração de quatro primitivas: $c = 0.7$ (no alto à esquerda), $c = 0.55$ (no alto no meio), $c = 0.5$ (no alto à direita) e em corte (embaixo à esquerda), e $c = 0.4$ (embaixo no meio) e em corte (embaixo à direita).

5.2 Outros Exemplos

As tabelas nesta seção enumeram cada ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}$ encontrado, juntamente com sua classificação, posição, valor crítico e número de iterações necessárias para a convergência.

Para ilustrar a situação onde a resolução numérica (em nosso caso o Método de Newton) pode falhar com a estimativa inicial dada pela Eq. (4.2), considere a configuração dada por duas primitivas. Seus raios são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, estando centradas em $P_1 = (0, 0, 0)$ e $P_2 = (2, 1, 0)$. Apesar do método divergir com a primeira estimativa, é conhecida a existência de uma sela do tipo 2 entre as duas primitivas devido à sua distância (Seção 4.2.2). Então, uma nova tentativa foi feita, estimando um ponto entre $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$ e P_2. O ponto crítico foi identificado após duas iterações. A Figura 5.2 exibe a superfície implícita de limiar 0.9138. Observe que existe uma singularidade na superfície, que corresponde justamente à sela do tipo 2. A tabela abaixo resume os pontos críticos encontrados.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_1$	máximo	$(0.278, 0.139, 0)$	1.1327	2
$\hat{\mathbf{x}}_2$	máximo	$(2, 1, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_{12}$	sela tipo 2	$(1.338, 0.669, 0)$	0.9138	2

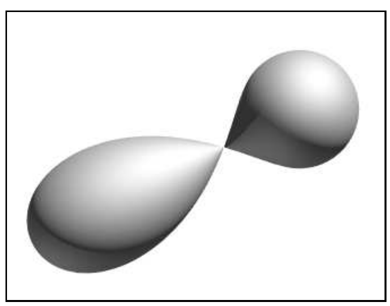


Figura 5.2: Configuração de duas primitivas, com $c = 0.9138$.

Outro exemplo interessante é exibido na Figura 5.3. Ele contém um máximo compartilhado, criado por duas primitivas próximas. Esta situação também mostra que mesmo que existam regiões de influência múltipla entre três primitivas, a ocorrência de uma sela do tipo 1 não pode ser garantida. Mais ainda, este exemplo ilustra que nem sempre existe uma sela do tipo 2 entre um par de primitivas. Os parâmetros para esta configuração são: $r_1 = 2$, $r_2 = 2.6$, $r_3 = 3.5$, $r_4 = 1.5$, $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (4, 0, 0)$, $P_3 = (2, 1, 0)$ e $P_4 = (2, 0.5, 1.5)$. A tabela seguinte apresenta os pontos críticos obtidos pelo nosso procedimento. Note que os pontos críticos $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ e $\hat{\mathbf{x}}_{14}$ não existem devido à influência de $\mathcal{P}_3$.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_4$	máximo	$(2.007, 0.557, 1.317)$	1.5508	2
$\hat{\mathbf{x}}_2 \equiv \hat{\mathbf{x}}_3$	máximo	$(2.445, 0.278, 0)$	1.326	3
$\hat{\mathbf{x}}_1$	máximo	$(0.29, 0.145, 0)$	1.2686	2
$\hat{\mathbf{x}}_{24} \equiv \hat{\mathbf{x}}_{34}$	sela tipo 2	$(2.618, 0.526, 0.496)$	1.1234	4
$\hat{\mathbf{x}}_{13}$	sela tipo 2	$(1.454, 0.727, 0)$	0.9506	4

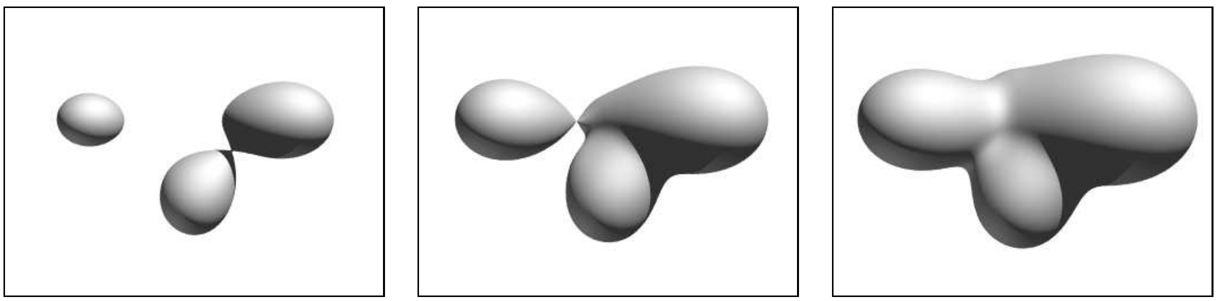


Figura 5.3: Uma configuração de quatro primitivas, com $c = 1.1234$ (esquerda), $c = 0.9506$ (meio) e $c = 0.8$ (direita).

A Figura 5.4 exemplifica uma situação onde apenas um máximo é associado a diversas primitivas. Quatro primitivas com raios unitários são definidas: $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1.55, 0, 0)$, $P_3 = (1.04, -0.52, 0)$ e $P_4 = (1.04, 0.52, 0)$. Neste caso, existem três primitivas que constroem um único máximo. Portanto, o grafo de incidência associado é constituído de apenas dois vértices. Um vértice corresponde ao máximo compartilhado, enquanto o outro corresponde à quarta primitiva. Quando analisamos as regiões de influência comuns R_{ij}, duas delas contém selas do tipo 2, como é confirmado pela tabela a seguir. E como esperado, as selas do tipo 2 e os máximos rodeiam a sela de tipo 1.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_2 \equiv \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \hat{\mathbf{x}}_4$	máximo	$(1.293, 0, 0)$	1.4044	3
$\hat{\mathbf{x}}_1$	máximo	$(0, 0, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_{13}$	sela tipo 2	$(0.52, -0.26, 0)$	0.583	0
$\hat{\mathbf{x}}_{24}$	sela tipo 2	$(0.52, 0.26, 0)$	0.583	0
$\hat{\mathbf{x}}_{123} \equiv \hat{\mathbf{x}}_{124}$	sela tipo 1	$(0.585, 0, 0)$	0.5703	3

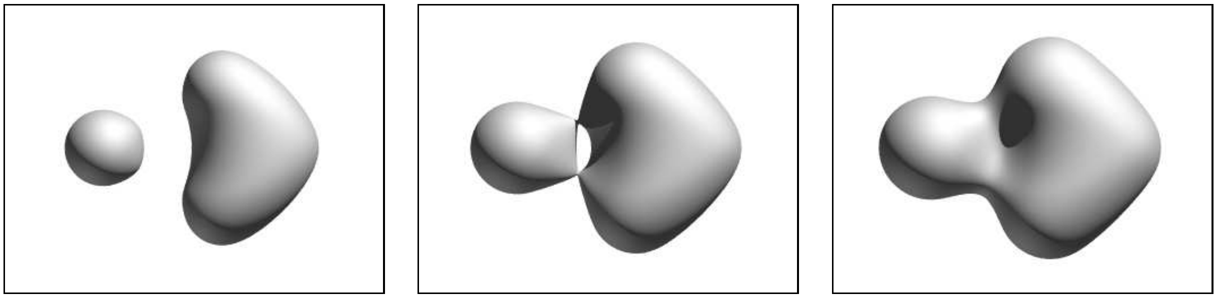


Figura 5.4: Configuração de quatro primitivas, com $c = 0.7$ (esquerda), $c = 0.583$ (meio) e $c = 0.5$ (direita).

A Figura 5.5 ilustra uma modificação da situação anterior, onde as primitivas $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são tornadas mais próximas entre si e têm seus raios reduzidos. Temos então $r_1 = 1$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 0.4$ e $r_4 = 0.4$, com centros $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0.6, 0, 0)$, $P_3 = (0.4, -0.21, 0)$ e $P_4 = (0.4, 0.21, 0)$. Novamente um único máximo é formado por três primitivas. Nesta nova configuração os dois pontos de sela de tipo 2 ficam bastante próximos, mas ainda assim é possível diferenciá-los, como mostra a tabela abaixo.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_2 \equiv \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \hat{\mathbf{x}}_4$	máximo	$(0.4367, 0, 0)$	1.977	8
$\hat{\mathbf{x}}_1$	máximo	$(0, 0, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_{13}$	sela tipo 2	$(0.0841, -0.044, 0)$	0.9817	3
$\hat{\mathbf{x}}_{14}$	sela tipo 2	$(0.0841, 0.044, 0)$	0.9817	3
$\hat{\mathbf{x}}_{123} \equiv \hat{\mathbf{x}}_{124}$	sela tipo 1	$(0.1, 0, 0)$	0.9788	5

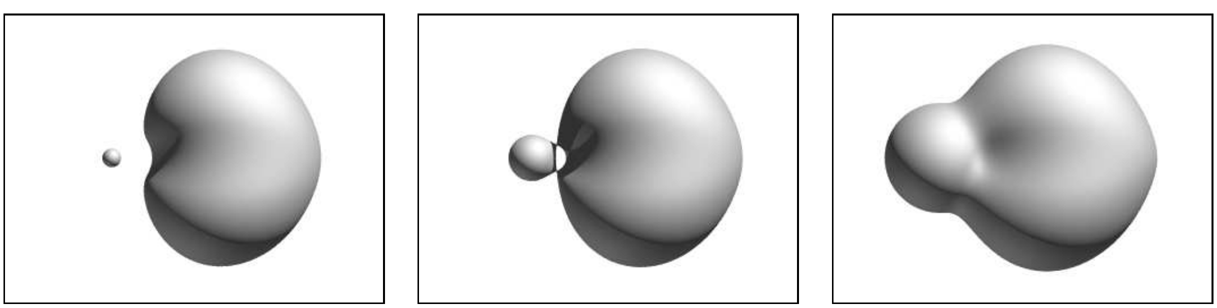


Figura 5.5: Configuração de quatro primitivas, com $c = 0.997$ (esquerda), $c = 0.9817$ (meio), $c = 0.9$ (direita).

Finalmente, na Figura 5.6 é apresentado um arranjo de seis primitivas com o mesmo raio unitário. Os centros são $P_1 = (1.1, 0, 0)$, $P_2 = (0.55, 0.9526, 0)$, $P_3 = (-0.55, 0.9526, 0)$, $P_4 =$

$(-1.1, 0, 0)$, $P_5 = (-0.55, -0.9526, 0)$ e $P_6 = (0.55, -0.9526, 0)$, formando uma configuração em anel. É interessante notar que não existe uma sela do tipo 1, apesar dos máximos e selas do tipo 2 construírem um ciclo perfeito em $\mathbb{R}^3$. Tal resultado é esperado, pois não existe região de influência comum para estas seis primitivas. Ao contrário, as primitivas circundam uma região onde a função F é identicamente nula. A tabela a seguir apresenta os pontos críticos obtidos.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_1$	máximo	$(1.1, 0, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_2$	máximo	$(0.55, 0.9526, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_3$	máximo	$(-0.55, 0.9526, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_4$	máximo	$(-1.1, 0, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_5$	máximo	$(-0.55, -0.9526, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_6$	máximo	$(0.55, -0.9526, 0)$	1	0
$\hat{\mathbf{x}}_{12}$	sela tipo 2	$(0.825, 0.476, 0)$	0.6787	0
$\hat{\mathbf{x}}_{23}$	sela tipo 2	$(0, 0.953, 0)$	0.6787	0
$\hat{\mathbf{x}}_{34}$	sela tipo 2	$(-0.825, 0.476, 0)$	0.6787	0
$\hat{\mathbf{x}}_{45}$	sela tipo 2	$(-0.825, -0.476, 0)$	0.6787	0
$\hat{\mathbf{x}}_{56}$	sela tipo 2	$(0, -0.953, 0)$	0.6787	0
$\hat{\mathbf{x}}_{16}$	sela tipo 2	$(0.825, -0.476, 0)$	0.6787	0

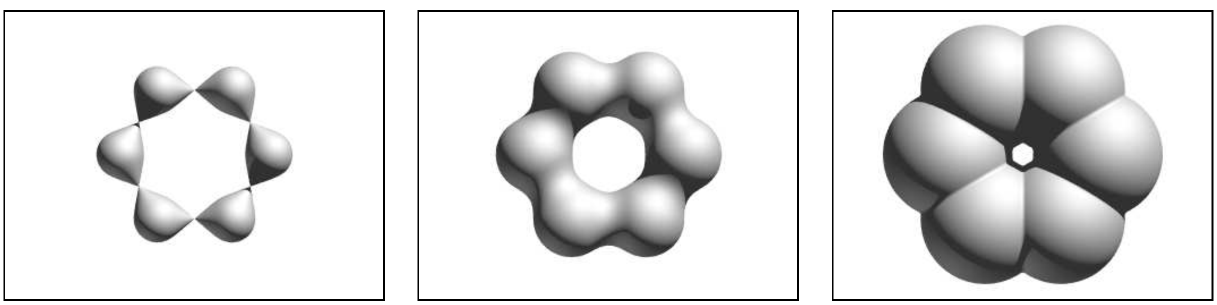


Figura 5.6: Configuração de seis primitivas, com $c = 0.6787$ (esquerda), $c = 0.32$ (meio) e $c = 0.001$ (direita).

5.3 Exemplo Final

Para terminar este capítulo, apresentamos uma configuração bem mais complexa que as anteriores, permitindo ilustrar a expressividade do modelo proposto. Seja o conjunto de 22 primitivas de raios diversos especificado na tabela a seguir:

primitiva	posição	raio	primitiva	posição	raio
P_A	$(-3, -2.5, 0)$	7.5	P_L	$(-1.5, 6.4, -0.4)$	4.6
P_B	$(-4, -6, 0)$	5	P_M	$(1.5, 6.4, -0.4)$	4.6
P_C	$(3, -2.5, 0)$	7.5	P_N	$(-2.2, 8, -1)$	5
P_D	$(4, -6, 0)$	5	P_O	$(2.2, 8, -1)$	5
P_E	$(-2.5, -3, -1.5)$	3	P_P	$(-5, 8.6, -2)$	4
P_F	$(2.5, -3, -1.5)$	3	P_Q	$(0, 9.2, -2)$	2.5
P_G	$(-2, -1.8, -2.5)$	3.2	P_R	$(5, 8.6, -2)$	4
P_H	$(2, -1.8, -2.5)$	3.2	P_S	$(-2.4, 6, 1.8)$	0.9
P_I	$(0, 1, -1)$	6	P_T	$(2.4, 6, 1.8)$	0.9
P_J	$(-2, 5, -1)$	6	P_U	$(-2, 6.2, 1.1)$	2.5
P_K	$(2, 5, -1)$	6	P_V	$(2, 6.2, 1.1)$	2.5

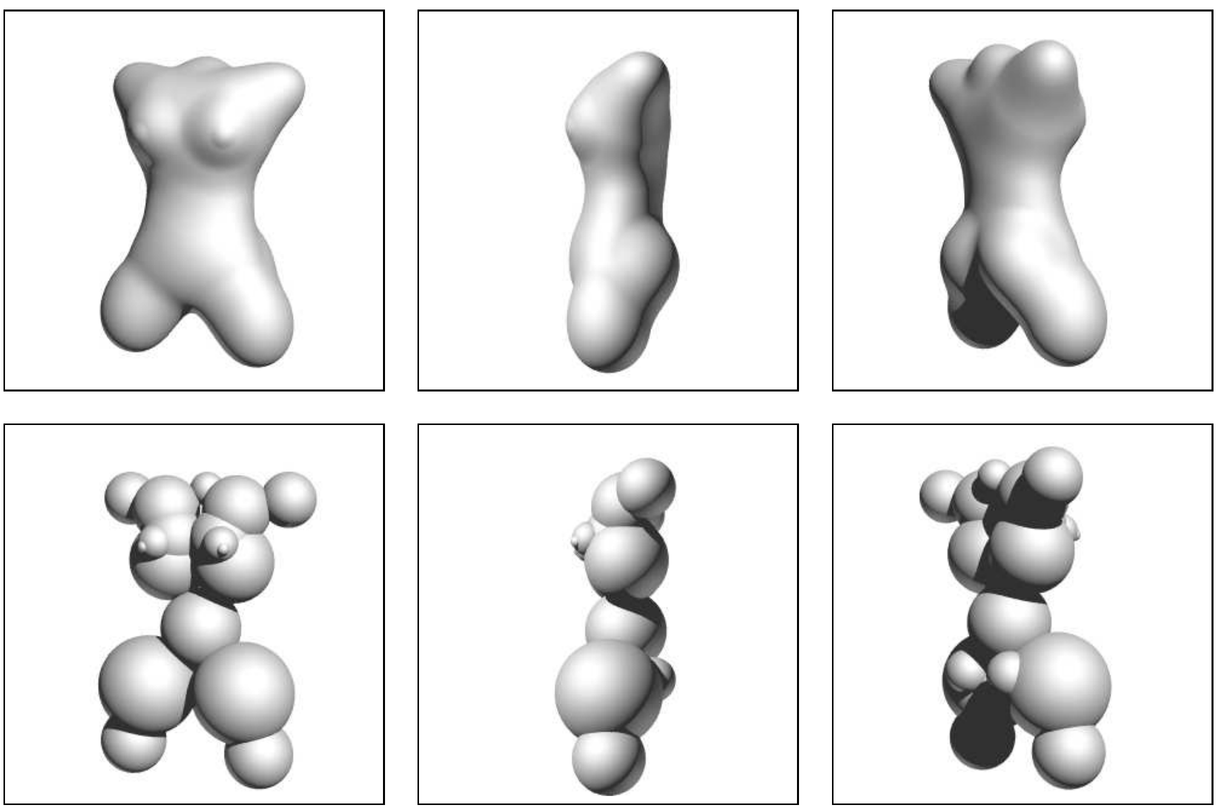


Figura 5.7: Configuração de 22 primitivas, vista em três ângulos distintos, com $c = 0.9$ (no alto) e com esferas (embaixo).

Esta configuração cria uma superfície com a forma de um torso feminino, mostrado na Figura 5.7. O valor do limiar utilizado é $c = 0.9$. Na parte inferior dessa figura é exibido o arranjo das primitivas, ilustrado por esferas de raio 60% menor que as primeiras, para compensar o limiar elevado. Observe que o torso está ao longo do eixo y e é simétrico em relação ao plano yz.

Novamente podemos aplicar o procedimento descrito na Seção 4.5 para determinar os pontos críticos desta configuração. Como o arranjo de primitivas é bem compacto, apenas ocorrem pontos de máximo e de sela do tipo 2, como mostra a tabela abaixo.

ponto	classificação	posição	valor crítico	iterações
$\hat{\mathbf{x}}_Q$	máximo	(0,6.435,-0.708)	3.252	8
$\hat{\mathbf{x}}_L$	máximo	(-1.382,6.318,0.057)	3.177	8
$\hat{\mathbf{x}}_M$	máximo	(1.382,6.318,0.057)	3.177	8
$\hat{\mathbf{x}}_P$	sela tipo 2	(-1.003,6.359,-0.245)	3.169	7
$\hat{\mathbf{x}}_R$	sela tipo 2	(1.003,6.359,-0.245)	3.169	4
$\hat{\mathbf{x}}_S$	máximo	(-2.322,6.036,1.607)	2.808	3
$\hat{\mathbf{x}}_T$	máximo	(2.322,6.036,1.607)	2.808	3
$\hat{\mathbf{x}}_E$	máximo	(-2.150,-2.354,-1.713)	2.660	3
$\hat{\mathbf{x}}_F$	máximo	(2.150,-2.354,-1.713)	2.660	3
$\hat{\mathbf{x}}_U$	sela tipo 2	(-2.146,6.113,1.212)	2.629	4
$\hat{\mathbf{x}}_V$	sela tipo 2	(2.146,6.113,1.212)	2.629	4
$\hat{\mathbf{x}}_{GH}$	sela tipo 2	(0,-1.376,-1.613)	1.768	3
$\hat{\mathbf{x}}_I$	sela tipo 2	(0,1.268,-0.778)	1.625	2

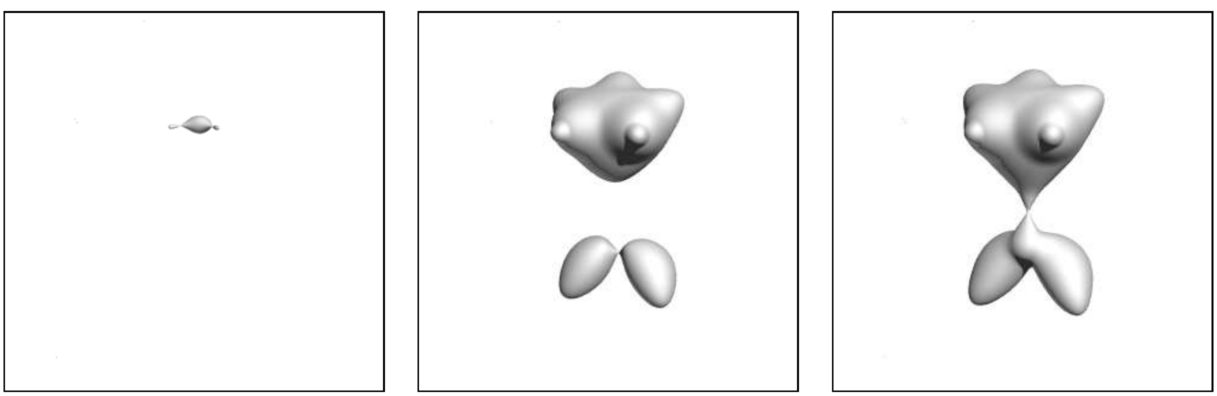


Figura 5.8: Configuração de 22 primitivas, com $c = 3.169$ (esquerda), $c = 1.768$ (meio) e $c = 1.625$ (direita).

Como o limiar utilizado (0.9) é inferior ao menor valor crítico encontrado (1.625), a superfície resultante apresenta um único componente. A Figura 5.8 apresenta as superfícies criadas quando são escolhidos limiares iguais a alguns dos valores críticos obtidos.

Capítulo 6

Conclusões

Este capítulo apresenta as considerações finais desta dissertação, apresentando as contribuições à área de estudo com base nos resultados obtidos e discutindo propostas para a continuidade deste trabalho.

6.1 Contribuições

Foi proposto um novo modelo implícito que incorpora uma série de propriedades que o tornam adequado para ser manipulado interativamente. Em especial, este modelo é constituído por primitivas com suporte local e apresenta baixo custo computacional.

Com base nos exemplos apresentados, podemos afirmar que este modelo possui boa expressividade, a despeito de empregar somente primitivas esféricas.

Em seguida foi feita uma extensa análise das possíveis configurações do modelo adotado, identificando situações representativas para a topologia da superfície implícita associada. Particularmente, foi possibilitada a construção de estimativas estreitas para a determinação numérica dos pontos críticos da função implícita. Foram também caracterizados os quatro tipos de pontos críticos existentes.

Finalmente, foi apresentado um procedimento geral para a determinação dos pontos críticos, dada uma configuração de primitivas. Ao contrário de outras técnicas existentes, este algoritmo utiliza informações sobre o arranjo local das primitivas, o que possibilita que a procura por pontos críticos seja feita de forma mais eficiente que com uma busca global. Além disso, o procedimento mostrou-se seletivo, evitando o exterior das regiões de influência, e robusto, sendo capaz de distinguir pontos críticos próximos.

6.2 Extensões e Trabalhos Futuros

Apesar da análise e do algoritmo resultante terem sido efetuados para uma classe de funções com mesmo peso, acreditamos que tal procedimento pode ser também utilizado para pesos positivos. Supomos que seriam necessárias pequenas mudanças no cálculo das estimativas iniciais dos pontos críticos para levar tais pesos em consideração.

É de interesse estender a análise para primitivas mais complexas, particularmente com formas elipsoidais, e de suporte infinito.

Em especial, planejamos integrar o algoritmo proposto na técnica de construção de aproximações poligonais já desenvolvida, de forma a garantir que a malha resultante tenha a mesma topologia da superfície implícita desejada.

Referências Bibliográficas

[Auren84] F. Aurenhammer e H. Edelsbrunner. An Optimal Algorithm for Constructing the Weighted Voronoi Diagram in the Plane. *Pattern Recognition*, 17(2):251–257, 1984.

[Auren91] Franz Aurenhammer. Voronoi Diagrams – A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3):345–405, setembro de 1991.

[Blanc95] Carole Blanc e Christophe Schlick. Extended Field Functions for Soft Objects. *Procedings of Implicit Surfaces '95*, 21–32, abril de 1995.

[Blinn82] James F. Blinn. A Generalization of Algebraic Surface Drawing. *ACM Transactions on Graphics*, 1(3):235–256, julho de 1982.

[Bloom88] Jules Bloomenthal. Polygonization of implicit surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 5(4):341–355, novembro de 1988.

[Bloom90] Jules Bloomenthal e Brian Wyvill. Interactive Techniques for Implicit Modeling. *Computer Graphics (1990 Symposium on Interactive 3D Graphics)*, 24(2):109–116, março de 1990.

[Bott96] Andrea Bottino, Wim Nuij e Kees van Overveld. How to Shrinkwrap through a Critical Point: an Algorithm for the Adaptive Triangulation of Iso-Surfaces with Arbitrary Topology. *Procedings of Implicit Surfaces '96*, 53–73, outubro de 1996.

[Chris78] Henry N. Christiansen e Thomas W. Sederberg. Conversion of Complex Contour Line Definitions into Polygonal Element mosaics. *SIGGRAPH 78 Conference Procedings*, 12(3):187–192, agosto de 1978.

[Cres98] Benôit Crespin, Pascal Guitton e Christophe Schlick. Efficient and Accurate Tessellation of Implicit Sweep Objects. *Constructive Solid Geometry '98*, abril de 1998.

[Desb95a] Mathieu Desbrun, Nicolas Tsingos e Marie-Paule Gascuel. Adaptive Sampling of Implicit Surfaces for Interactive Modeling and Animation. *Computer Graphics Forum*, 15(5):319–325, dezembro de 1996.

[Desb95b] Mathieu Desbrun e Marie-Paule Gascuel. Animating Soft Substances with Implicit Surfaces. *SIGGRAPH 95 Conference Procedings*, 287–290, agosto de 1995.

[Fig92] Luiz Henrique de Figueiredo, Jonas Gomes, Demetri Terzopoulos e Luiz Velho. Physically-Based Methods for Polygonization of Implicit Surfaces. *Procedings of Graphics Interface '92*, 250–257, maio de 1992.

[Fig96] Luiz Henrique de Figueiredo e Jonas Gomes. Sampling implicit objects with physically-based particle systems. *Computers and Graphics*, 20(3):365–375, maio de 1996.

[Flor95] Leila de Floriani e Enrico Puppo. Hierarchical Triangulation for Multiresolution Surface Description. *ACM Transactions on Graphics*, 14(4):363–411, outubro de 1995.

[Galin98] Eric Galin e Samir Akkouche. Incremental Techniques for Implicit Surface Modeling. *Procedings of Computer Graphics International '98*, 312–321, junho de 1998.

[Gasc97] Marie-Paule Cani-Gascuel e Mathieu Desbrun. Animation of Deformable Models using Implicit Surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer*, 3(1):39–50, janeiro de 1997.

[Gnuplot] Gnuplot Team. `http://www.gnuplot.org/`

[Gomes92] Jonas de M. Gomes e Luiz Velho. *Implicit Objects in Computer Graphics*, Monografias de Matemática nº 53, IMPA, 1992.

[Hart97] John C. Hart. Morse Theory for Implicit Surface Modeling. *Procedings of Visualization and Mathematics '97*, 1997.

[Hart98] John C. Hart, Antoine Durr e Douglas Harsh. Critical Points of Polynomial Metaballs. *Procedings of Implicit Surfaces '98*, 69–76, junho de 1998.

[Malh97] Marcelo de G. Malheiros e Wu, Shin-Ting. A Hierarchical Skeleton-based Implicit Model. *Procedings of SIBGRAPI '97 (Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing)*, IEEE Computer Press, 65–70, outubro de 1997.

[Mey92] David Meyers, Shelley Skinner e Kenneth Sloan. Surfaces from Contours. *ACM Transactions on Graphics*, 11(3):228–258, julho de 1992.

[Miln63] John Milnor. Morse Theory. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 51, Princeton University Press, 1963.

[Nish85] Hitoshi Nishimura, Makoto Hirai, Toshiyuki Kawai, Toru Kawata, Isao Shirakawa e Koichi Omura. Object Modeling by Distribution Function and a Method of Image Generation (in Japanese). *Trans. of IECE Japan*, J68-D(4):718–725, abril de 1985.

[Nish94] Tomoyuki Nishita e Eihachiro Nakamae. A Method for Displaying Metaballs by using Bézier Clipping. *Eurographics '94 Procedings*, Computer Graphics Forum, 13(3):271–280, setembro de 1994.

[OverW93] C.W.A.M. van Overveld e Brian Wyvill. Shrinkwrap: An adaptive algorithm for polygonizing an implicit surface. *Tech. Rep. 93/514/19, University of Calgary*, março de 1993.

[POV] POV-Ray Team. `http://www.povray.org/`

[Sher98] Andrei Sherstyuk. Fast Ray Tracing of Implicit Surfaces. *Procedings of Implicit Surfaces '98*, 145–153, junho de 1998.

[Stand97] Barton T. Stander e John C. Hart. Guaranteeing the Topology of an Implicit Surface Polygonization for Interactive Modeling. *SIGGRAPH 97 Conference Procedings*, 279–286, agosto de 1997.

[Turk91] Greg Turk. Generating Textures on Arbitrary Surfaces Using Reaction-Diffusion. *SIGGRAPH 91 Conference Procedings*, Computer Graphics, 25(4):289–298, julho de 1991.

[Wit94] Andrew P. Witkin e Paul S. Heckbert. Using Particles to Sample and Control Implicit Surfaces. *SIGGRAPH 94 Conference Procedings*, 269–278, julho de 1994.

[Wolf] Wolfram Research, Inc. `http://www.wolfram.com/`

[Wyv86a] Geoff Wyvill, Craig McPheeters e Brian Wyvill. Data structure for soft objects. *The Visual Computer*, 2(4):227–234, agosto de 1986.

[Wyv86b] Brian Wyvill, Craig McPheeters e Geoff Wyvill. Animating soft objects. *The Visual Computer*, 2(4):235–242, agosto de 1986.

[Wyv98] Brian Wyvill, Andrew Guy e Eric Galin. Extending the CSG Tree - Warping, Blending and Boolean Opoerations in an Implicit Surface Modeling System. *Procedings of Implicit Surfaces '98*, 113-122, junho de 1998.