Tese de Doutorado

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial

Reconstrução 3D a partir de Imagens de Profundidade baseada em Modelos Deformáveis

Autora: **Rosana Marques da Silva**

Orientadora: **Profa. Dra. Wu, Shin-Ting**

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi
Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo
Prof. Dr. Geovan Tavares dos Santos
Prof. Dr. Mário Fernando Montenegro Campos

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de **Doutor em Engenharia Elétrica**.

03 de dezembro de 1999

Resumo

Este trabalho objetiva a reconstrução de modelos tridimensionais a partir de imagens de profundidade. O método proposto consiste na deformação de uma superfície inicial, triangulada e fechada, até seu ajuste aos dados contidos em uma imagem de profundidade. O método combina as boas propriedades da técnica do balão (controle da precisão, estabilidade e simplicidade) com as vantagens do paradigma de triangulação adaptativa no domínio da malha (exclusão de auto-interseções). Adicionalmente, ele faz a utilização máxima das informações contidas em cada imagem de profundidade e supera a restrição dos modelos deformáveis onde o modelo reconstruído deve ser homeomorfo ao modelo inicial. Finalmente, diferentemente dos trabalhos existentes, a precisão de ajuste do nosso método é controlada por um parâmetro de tolerância local. Mostramos, com base na Teoria de Aproximação, que a sequência de malhas triangulares geradas pelo nosso método converge para os dados da imagem dada. E, com base na Teoria de Morse, demonstramos que através dos pontos críticos de uma imagem de profundidade pode-se estimar o limite inferior do gênero da superfície a ser reconstruída.

Abstract

The goal of this work is the reconstruction of three-dimensional models from range images. The proposed method consists in the deformation of the initial surface, closed and triangulate, and adjusting it correctly to the sample points in the range image data. The method combines the good properties of the ballon technique (controllable accuracy, stability and simplicity) with the advantage of the important features of the adaptative triangulation on domain mesh (self-intersection exclusion). Furthermore, it does the maximal usage of the available data in each range image and overcomes the restriction of the deformable models where the reconstructed model must be homeomorphic to the initial model. Finally, diferently from other existent works, its adjust precision is controlable by only one tolerance parameter. We show, based on approximation theory, that the triangular mesh sequence created by our method converges to the image data. And, based on Morse theory, we demostrated that we can estimate the inferior limit genus of the surface to be reconstructed through the critical points of a range image.

Agradecimentos

- À Profa. Dra. Wu Shin-Ting, pela orientação, amizade, dedicação e incentivo durante a realização deste trabalho.
- À minha familia, Francisco Antonio e Ricardo, pela compreensão e apoio incondicional.
- Ao Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi pelas sugestões e comentários sempre valiosos.
- Aos colegas do Grupo de Computação Gráfica e Modelagem Geométrica pela colaboração durante toda a realização deste trabalho. Em especial a Marcelo Malheiros pela sua ajuda com o Linux e na visualização dos modelos através do OpenGl, a Mercedes R. Gonzales Márquez pela colaboração na implementação e a Luiz Gonzaga pelas informações no uso do TDM.
- A todos os colegas do Departamento de Matemática e Estatística/CCT/UFPB que tornaram possível a realização deste trabalho, propiciando as condições necessárias para a sua conclusão. Em especial, agradeço ao professor Francisco Antonio pela sua paciência em ler e criticar o texto, ao professor Luiz Mendes pela presteza no esclarecimento de algumas dúvidas e aos professores Miriam Costa e Alcionio Saldanha pelo incentivo e desprendimento em resolver os "galhos" locais durante o meu afastamento.
- Aos meus professores do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial/FEEC/UNICAMP, a professora Sueli Costa do Departamento de Matemática/IMECC/UNICAMP e ao professor Mário Toyataro Hattori (in memoriam) do Departamento de Sistemas e Computação/CCT/UFPB, por terem contribuído com sugestões e comentários sempre construtivos.
- Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial/FEEC/UNICAMP e do Departamento de Matemática e Estatística/CCT/UFPB que sempre prestaram seu auxílio, trabalhando com seriedade e ao mesmo tempo simpatia.
- À CAPES/PICD pelo financiamento durante a realização deste trabalho.

Ao meu marido *Francisco Antonio*,

ao meu filho *Ricardo* e

aos meus pais *Alvaro e Terezinha*.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

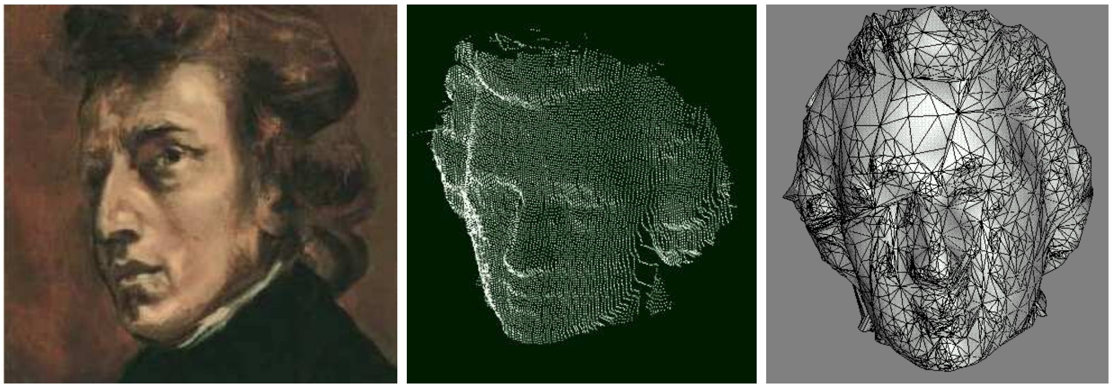
A reconstrução automática de modelos tridimensionais, ou modelos 3D, a partir de imagens tridimensionais consiste na criação de uma superfície fechada, representada por uma malha poligonal obtida através da interpolação de pontos amostrados, procurando capturar de forma mais fiel possível as informações contidas nas imagens [8]. A obtenção dessas malhas poligonais tem despertado muito interesse nas últimas décadas na comunidade envolvida com visão computacional. Em parte, o interesse é devido ao seu amplo campo de aplicação. Encontramos trabalhos envolvendo este tema com aplicações em mapeamento de terrenos [60, 30, 42, 48]; arqueologia [10, 42]; comunicação e entretenimento [83, 84]; medicina [4] e robôs inteligentes em geral [10, 42, 12]. Também, paralelamente à aplicação prática imediata, o problema tem despertado interesse científico devido ao seu caráter interdisciplinar. Podemos citar, de imediato, além de visão computacional, modelagem geométrica, topologia combinatorial, topologia algébrica, geometria diferencial, análise numérica, dentre outras.

O presente trabalho apresenta um algoritmo de reconstrução parcial de um modelo 3D, usando como entrada uma imagem tridimensional do objeto a ser reconstruído e obtendo como resultado uma malha triangulada fechada, topologicamente equivalente à superfície do objeto. Neste capítulo introdutório apresentaremos uma visão geral do trabalho, precedida de uma descrição suscinta das técnicas de reconstrução conhecidas, para facilitar a sua colocação dentro do tema reconstrução automática de superfícies fechadas.

1.1 Motivação

Conceitualmente, o tema reconstrução automática de superfície pode ser dividido em dois enfoques, dependendo dos dados iniciais e da aplicação final. O primeiro consistindo na criação de um modelo geométrico representado pelas propriedades geométricas intrínsicas da superfície amostrada em imagens bidimensionais, tais como orientação, profundidade e curvatura, obtendo assim o que é conhecido como a forma da superfície, ou simplesmente a forma 3D [3]. De acordo com a característica que uma imagem representa, ela é denominada de mapa ou imagem de orientações, de profundidade e de contornos. O segundo enfoque concentra-se na construção de um modelo 3D, convertendo informações extraídas de imagens tridimensionais em uma malha poligonal, estabelecendo uma estrutura combinatorial consistente com o objeto amostrado nas imagens [64, 82].

Figura 1.1 ilustra a reconstrução de superfícies, mostrando os dois enfoques mencionados. Em (a) temos uma imagem de intensidade, em (b) temos uma imagem de profundidade, que pode ser o resultado da determinação do valor da coordenada z para cada ponto (x,y) de uma imagem de intensidade, e em (c) temos um modelo 3D obtido a partir de uma imagem de profundidade.



(a) (b) (c)

Figura 1.1: (a) Imagem de intensidade. (b) Imagem de profundidade. (c) Modelo 3D.

A obtenção da forma 3D a partir de imagens bidimensionais (ou imagens 2D), que são imagens de intensidade, requer uma transformação do espaço bidimensional no espaço tridimensional. A dificuldade básica nesta transformação consiste no fato da imagem 2D ser uma projeção de uma cena 3D e a transformação geométrica 2D$\rightarrow$3D ser indeterminada (não inversível). Consequentemente, as estruturas tridimensionais perdidas na aquisição dos dados podem ser totalmente ou apenas parcialmente recuperadas no processo de reconstrução, fazendo uso de outras informações como textura, tonalização e sequência de contornos, etc. Várias técnicas têm sido desenvolvidas nesse sentido. Essas técnicas são denominadas *shape from X* por Aloimonos [3]. Dentre essas técnicas temos *shape from contour* [76, 77, 79, 13], *shape from motion* [11], *shape from texture* [7, 25, 39], *shape from stereo* [57], *shape from shading* [38, 32, 24] ou uma combinação delas [70, 19, 26]. Apesar da importância desse enfoque, as técnicas envolvidas não fazem parte do escopo deste trabalho. Para maiores informações, a tese de doutorado de Hasegawa [32] é um bom ponto de partida.

A construção de um modelo 3D, convertendo informações extraídas de imagens tridimensionais em uma malha poligonal, gera uma superfície poliédrica que deve aproximar melhor a superfície do objeto imageado. Entendemos por superfícies poliédricas aquelas definidas por um conjunto de faces planares e delimitadas pelos vértices e arestas. Uma superfície poliédrica e a superfície do objeto imageado são topologicamente equivalentes, se elas podem ser deformadas uma na outra por uma bijeção contínua, sem cortes ou emendas. Matematicamente, nestes casos, dizemos que existe um homeomorfismo entre elas.

1.1.1 Classificação das técnicas de reconstrução 3D

A criação de modelos tridimensionais tem recebido grande atenção nas últimas décadas e inúmeras propostas metodológicas têm sido desenvolvidas de acordo com o tipo de informação tridimensional disponível. Dentre essas propostas, destacam-se as técnicas que usam imagens de profundidade. Essa atenção se deve, em parte, ao avanço tecnológico, possibilitando o surgimento de sensores 3D cada vez mais rápidos e precisos, denominados *range scanners*, que obtêm imagens de profundidade, as quais descrevem os objetos em coordenadas cartesianas ou cilíndricas, na forma de uma matriz $m \times n$, cuja entrada é a altura e as outras duas coordenadas podem ser determinadas pelos índices da matriz ou por outras matrizes associadas [62, 36, 5].

Poucos objetos são simples o suficiente para permitir sua descrição completa através de uma imagem de profundidade, obtida de um único ponto de vista (ou *vista*) do mesmo. Então, para obter uma descrição completa de objetos complexos, são necessárias imagens de várias vistas distintas. Essas imagens devem ser combinadas em uma única representação [23, 22, 6, 50, 14]. A determinação das transformações rígidas que alinham as imagens em um sistema de referencial comum é denominada *registro* de imagens, enquanto o processo de associar uma única representação espacial a várias amostras de um mesmo ponto é conhecido como *integração* de imagens. No contexto de reconstrução de um modelo completo de objetos complexos, podemos classificar as técnicas conhecidas em três abordagens distintas (Figura 1.2), a saber:

i. Abordagem segmentada, ou da "costura" [75, 35];

ii. Abordagem volumétrica [14, 9, 50, 20, 22];

iii. Abordagem deformável [72, 73, 15].

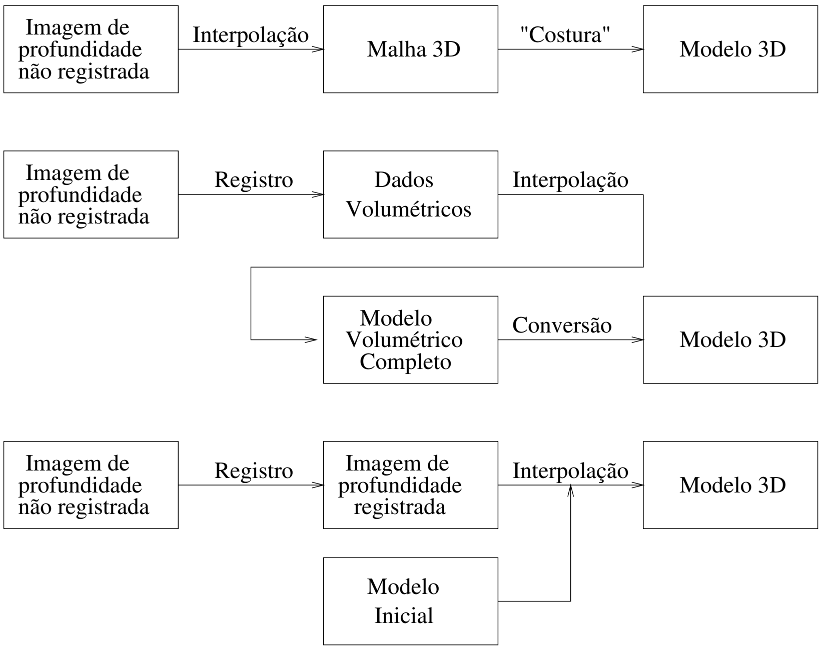


Figura 1.2: Esquemas de reconstrução.

Na abordagem da "costura", para cada imagem de profundidade dada é criada uma malha poligonal, e então as malhas obtidas são unidas (isto é, "costuradas") para construir uma superfície fechada. O resultado final depende da eficácia dos algoritmos, tanto de geração de malhas como de integração, sem "fendas", dessas malhas obtidas separadamente. Quanto à integração de malhas, podemos destacar ainda dois paradigmas para solucionar regiões de ambiguidade, onde ocorre sobreposição das imagens obtidas. Um considera as informações de cada uma das malhas na região superposta para determinar uma posição relativa para cada vértice nessa região [75], e o outro, despreza estas informações obtidas separadamente e gera uma nova malha na região [35].

Na abordagem volumétrica [37, 9, 20], os métodos estão fundamentados no esquema de representação denominado enumeração espacial, onde as células cúbicas (*voxel*) são classificadas de acordo com a função distância com sinal em relação à posição do sensor e os pontos amostrados. Desta forma, para obter a representação da superfície 3D, faz-se necessário somente um algoritmo de conversão, como por exemplo, o algoritmo *marching cubes* [47].

Na abordagem deformável, o modelo 3D é obtido pela deformação de uma superfície fechada, estimada com base nas imagens de profundidade previamente registradas. O processo de deformação emula o comportamento físico de uma membrana elástica sob a ação de forças externas e internas. A forma inicial é considerada como um objeto elástico simples sujeito a ação de forças externas e internas, estimadas a partir das imagens [30]. A forma do objeto é então dinamicamente deformada, até que seja encontrado o estado de equilíbrio. Podemos destacar duas direções de pesquisa. Uma direção reduz o problema para o que podemos chamar de minimização de um funcional, cuja função-objetivo representa o ajuste dos pontos da imagem com a superfície elástica de energia mínima [72, 73, 67]. Nesse caso, a forma inicial deve ser similar ao modelo a ser reconstruído. A outra direção está baseada na idéia de deformar discretamente a forma inicial [16, 15]. Em vez da minimização de um funcional, uma correspondência entre os vértices da malha e os pontos da imagem de profundidade deve ser estabelecida durante o processo de crescimento.

1.1.2 Propriedades de um algoritmo de reconstrução 3D

Segundo Curless e Levoy [20], é desejável que todas as técnicas de reconstrução de modelos 3D, independentes da abordagem, satisfaçam as seguintes propriedades:

- *Utilização máxima dos dados.* Toda a informação de cada imagem disponível deve ser usada para construir de maneira robusta um modelo total ou parcialmente. No caso de dispor de poucos dados, toda a informação contida nesses dados deve ser contemplada no objeto parcialmente reconstruído, e no caso de ter informações redundantes, essas informações devem ser usadas para um controle maior do ruído nos dados.

- *Eficiência com relação a espaço de armazenamento e tempo de execução.* Objetos complexos devem requerer muitas imagens para permitir a criação de um modelo preciso, o que significa um número muito grande de pontos amostrados. Uma malha desejável é aquela que contemple todas as informações disponíveis nas imagens, seja reconstruido com um tempo aceitável e apresente um número reduzido de vértices.

- *Robustez.* Ruídos e distorções nos dados podem levar levar a reconstrução errôneas do modelo. Um algoritmo robusto deve ser capaz de manusear essas situações sem gerar fendas ("buracos") ou auto-interseções.

- *Irrestrição à topologia do objeto*[1]. O algoritmo não deve depender da topologia do objeto a ser reconstruído.

- *Habilidade em ajustar buracos na reconstrução.* Alguns objetos não podem ser amostrados de forma completa, pois partes dele podem ser inacessíveis ao sensor (oclusões). O algoritmo deve ser capaz de cobrir esses "buracos" de forma a reconstruir uma superfície fechada válida, produzindo um modelo preciso com relação aos dados disponíveis e aceitável esteticamente.

- *Adaptação incremental.* Esta propriedade permite a reconstrução parcial de modelos que podem ser refinados à medida em que novas informações são disponibilizadas.

Segue uma breve análise das abordagens descritas na Seção 1.1.1 com relação a essas propriedades.

A abordagem segmentada tem como uma de suas características a obtenção de malhas que representam cada uma das imagens disponíveis, o que leva à utilização máxima dos dados e à adaptação incremental do modelo de forma natural, mas a integração de malhas construídas separadamente ainda é de difícil tratamento – especificamente, para objetos complexos. Isso se deve aos problemas relacionados com oclusões. A tentativa de resolver essa deficiência levou a várias propostas com restrições à topologia do objeto [75, 35].

[1]A topologia de um objeto se refere ao número de componentes disjuntos (pedaços) e o gênero (número de buracos) de cada componente do objeto

Na abordagem volumétrica, os resultados obtidos geralmente apresentam uma malha muito fina ou são pouco robustos com relação à topologia do objeto reconstruído e ao ajuste de buracos. Resultados recentes [20], entretanto, mostram que o procedimento de ajustar “buracos” nesta abordagem é mais natural do que na abordagem segmentada, preservando a independência à topologia do objeto amostrado como também possibilitando a adaptação incremental. Já existem resultados mostrando a possibilidade de se obter bons resultados com malhas menos densas [56].

A abordagem deformável tem a vantagem sobre as demais por não apresentar nenhum problema com o ajuste de buracos e gera malhas fechadas menos densas. Mas, em contrapartida, tem restrições quanto à topologia dos objetos a serem reconstruídos, que dependem da topologia do modelo inicial dado. Nos métodos que usam minimização de um funcional para o ajuste global do modelo aos dados, o modelo inicial deve ser bem próximo da geometria do objeto amostrado, requerendo, portanto, o conhecimento prévio de todas as informações do objeto a ser modelado, o que dificulta a adaptação incremental. Entretanto, são robustos com relação a auto-interseções. Nos modelos de deformação discreta, por sua vez, encontram-se boas propriedades para um método de reconstrução, tais como simplicidade e precisão localmente controlável. As propostas encontradas na literatura [15] requerem ainda o conhecimento da topologia do objeto a ser reconstruído e apresentam ainda problemas de auto-interseções.

1.1.3 Problema

Dentre as abordagens analisadas, entendemos que a deformação discreta apresenta propriedades importantes para um método de reconstrução 3D, tais como simplicidade, maneira natural de manusear regiões ocultas do objeto amostrado, estabilidade e precisão local controlável. Mas, ainda apresenta deficiências como requerer o conhecimento prévio da topologia do objeto a ser reconstruído, poder gerar auto-interseções na superfície reconstruída e não permitir adaptação incremental. Estamos propondo neste trabalho um método alternativo de reconstrução 3D, que incorpora aos modelos de deformação discreta as características necessárias para torná-los competitivos com a abordagem volumétrica, com a vantagem de apresentar uma malha menos densa e com um eficiente controle de precisão local.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar um método de reconstrução de uma malha triangulada fechada, que represente as informações contidas nos dados amostrados em uma imagem de profundidade não registrada, baseando-se nas técnicas de modelos deformáveis com deformações discretas [15].

A técnica proposta usa a teoria da convergência para ajustar uma malha triangulada fechada, geometricamente simples, a uma imagem de profundidade dada, de uma forma robusta, empregando a técnica de triangulação no domínio da malha, para estabelecer de uma forma eficiente a correspondência entre os dados e os vértices da malha reconstruída. O modelo inicial é posicionado no centro de crescimento radial, convenientemente escolhido, definindo um ângulo sólido de crescimento, e seus vértices se deslocam radialmente na direção dos dados, com um passo determinado dinamicamente, durante o processo, até se ajustarem a estes, de acordo com uma tolerância dada. O centro de crescimento radial poderá mudar durante o processo, de acordo com os dados. O esquema da técnica proposta (Figura 1.3) sugere um esquema para a adaptação incremental, onde o modelo parcialmente

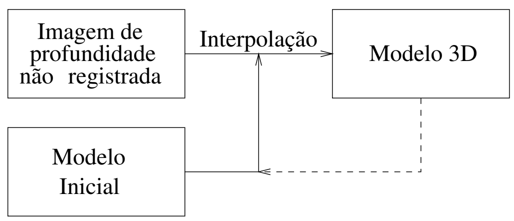


Figura 1.3: O esquema de reconstrução proposto.

reconstruído em uma etapa é usado como o modelo inicial para o refinamento do ajuste nas etapas posteriores, quando novas imagens forem incorporadas ao processo. O nosso modelo, denominado de *modelo do fluxo radial*, apresenta as seguintes características, somadas àquelas apresentadas pelo modelo de deformação discreta:

- Não ter nenhuma restrição (geométrica ou topológica) à forma inicial, ou seja, o processo é inicializado com uma forma geométrica simples homeomorfa à esfera e, ao longo do processo, se adapta à geometria e à topologia do objeto;
- Evitar auto-interseções na malha reconstruída, obtendo uma malha final topologica-

mente equivalente ao objeto amostrado e com as suas caracteísticas geométricas;

- Utilizar todas as informações dadas em uma imagem de profundidade, permitindo a reconstrução parcial máxima de objetos a partir de uma única imagem de profundidade;
- Permitir que a precisão pontual da reconstrução seja avaliada a partir de um parâmetro de tolerância global. A adoção da precisão local para determinar o erro de reconstrução faz com que a superfície final fique mais próxima dos pontos amostrados do que aquela obtida simplesmente com uma precisão global.

1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2 mensionamos alguns conceitos e definições necessários para facilitar o entendimento do desenvolvimento do nosso modelo de reconstrução.

No Capítulo 3 fazemos uma explanação dos trabalhos já existentes, com ênfase nos trabalhos relacionados com o ajuste de imagens de profundidade usando modelos deformáveis.

No Capítulo 4 apresentamos as idéias básicas do método proposto, *modelo do fluxo radial*, a implementação do algoritmo e uma análise detalhada dos pontos chaves dessas idéias. Mostramos na Seção 4.3 que o método deve ajustar inteiramente o modelo 3D reconstruído aos dados de entrada, sem violar as propriedades geométricas e topológicas dos mesmos. Além disso, mostramos que a precisão do ajuste local é feita a partir de um único parâmetro global de tolerância. Mostramos, também, que a nossa técnica de inflação, baseada na geometria dos dados, permite mudança na topologia do modelo inicial.

Em seguida, no Capítulo 5, apresentamos alguns resultados experimentais obtidos pela aplicação do algoritmo a imagens sintéticas e reais.

Finalmente, no Capítulo 6 fazemos alguns comentários conclusivos, além de sugestões para trabalhos futuros.

Os programas (código-fonte completo em linguagem C) e este texto (no formato pdf) encontram-se disponíveis na página do projeto Modelo do Fluxo Radial [85].

.

Capítulo 2

Considerações Preliminares

Neste capítulo serão apresentados, de forma sucinta, alguns conceitos básicos necessários para compreensão do nosso modelo e algumas técnicas que utilizamos na implementação deste modelo.

2.1 Imagem de profundidade

Uma imagem digital pode ser representada por uma matriz bidimensional, onde cada elemento representa a característica de um ponto da imagem. Estes elementos são conhecidos como pixels. O número de linhas e o número de colunas definem a sua resolução. Um modelo matemático natural para descrever uma imagem digital é uma função $i = f(x, y)$, conhecida como função-imagem e definida em uma região bidimensional. Dependendo da natureza da imagem, esta função representa a intensidade, a profundidade, a curvatura ou a orientação espacial de cada pixel.

Como várias características de imagens são modeladas através de valores numéricos, a representação de uma imagem através da função-imagem é conveniente para processamentos digitais. Em muitas situações isso nos permite reduzir o problema de manipulação de imagens a manipulações aritméticas [29], como ilustram os seguintes exemplos:

- Uma imagem de intensidade (imagem colorida) é uma matriz $m \times n$, onde o valor da função em cada pixel representa a cor do pixel, que, por sua vez, é normalmente discretizada através de três valores reais, R, G e B (vermelho(*Red*), verde(*Green*) e azul(*Blue*) - sistema de cores aditivo).

- Uma imagem de profundidade é representada por uma matriz $m \times n$, onde $f(x,y)$ é um valor real que representa a profundidade da imagem e as coordenadas x e y são determinadas pelos índices da matriz ou por um conjunto de matrizes $m \times n$ associadas, uma contendo como entrada a função $f(x,y)$ e outras determinando as coordenadas x e y. A profundidade é calculada com base na distância entre o observador e o objeto amostrado. A função $f(x,y)$ é, de fato, uma função-altura discretizada. A imagem pode ser representada em coordenadas cartesians ou em coordenadas cilíndricas [62, 36, 5].

2.2 Topologia

Segundo Elon Lages de Lima [45], topologia, em matemática, é uma disciplina bastante extensa e geral e se ocupa da noção de função contínua. O seu âmbito de atuação é a categoria de todos os espaços topológicos. Devido à variedade de espaços topológicos, para se ter um resultado deve-se impor restrições ao tipo de espaço considerado. Podem-se destacar os seguintes ramos da topologia conforme a natureza das restrições e ao tipo de instrumento utilizado:

- **Topologia Geral**. Aqui as restrições impostas aos espaços topológicos consistem em acrescentar um ou mais axiomas que se referem diretamente aos conjuntos abertos do espaço, ora garantindo a existência de um número suficientemente grande deles (axiomas de separação), ora evitando que existam abertos demais (compacidade). De qualquer maneira, o que caracteriza a Topologia Geral é que os espaços que ela estuda não possuem outra estrutura senão a de espaço topológico, nem são empregados novos instrumentos de trabalho, senão aqueles provenientes da Teoria dos Conjuntos;

- **Topologia Combinatória**. Aqui são estudados tipos especiais de espaços topológicos, os *poliedros*. Um poliedro é uma reunião finita de vértices (pontos), arestas (segmentos de retas), faces (triângulos, tetraedros, etc.), objetos genericamente designados com o nome de *simplexos*, os quais se acham regularmente dispostos, como num poliedro comum do espaço Euclidiano. Considerando-se, num certo sentido, a topologia de um *simplexo* do espaço Euclidiano como trivial. A noção básica na topologia de poliedros é o conceito de *incidência* ou *adjacência* (Tal segmento é lado de quais faces?, Tal triângulo é face de quais poliedros?), mediante o qual passa-se de um poliedro para seu esquema abstrato, formado por um número finito de objetos, ligados por uma relação única, de incidência. O estudo deste esquema é, então, um problema combinatório, de onde o nome deste ramo da Topologia;

- **Topologia Algébrica**. O que distingue a Topologia Algébrica da Topologia Geral e da Topologia Combinatória (bem como da Topologia Diferencial, que será apresentada a seguir), não é a natureza dos espaços que ela considera, nem as estruturas adicionais que existam ou deixam de existir nesses espaços, mas antes de tudo, o método de trabalho. A Topologia Algébrica é, às vezes, mais geral do que a Topologia Geral pois nela se consegue demostrar teoremas não triviais que se aplicam a todos os espaços topológicos. Por outro lado (e aqui reside o motivo do paradoxo acima), a Topologia Algébrica não é exatamante um ramo da topologia, mas um método de transição desta para a Álgebra. A idéia básica é a seguinte: as estruturas algébricas são, em geral, mais simples do que as estruturas topológicas. Então, todo o processo que permita substituir, sistematicamente, espaços topológicos por grupos (por exemplo) e funções contínuas por homomorfismos, adquire grande interesse. Um processo desse tipo é o que se chama um *functor* definido numa categoria topológica, com valores numa categoria algébrica. A topologia algébrica ocupa-se do estudo desses *fuctores*, cujos exemplos mais conhecidos são os grupos de homologia e de homotopia.

- **Topologia Diferencial**. Este ramo da topologia caracteriza-se pela estrutura adicional dos espaços topológicos de que se ocupa (variedades diferenciáveis) e, consequentemente, pelos métodos de trabalho, que são, inicialmente, aqueles do cálculo diferencial e integral clássico, coadjuvados pelos resultados da Topologia Algébrica. Trata-se aqui de um retorno às origens do assunto, pois, como se sabe, na primeira das memórias em que Poincaré desenvolveu as bases da moderna topologia, os espaços topológicos considerados eram subvariedades do espaço Euclidiano, *homeomorfismo* era o que chama-se hoje de *difeomorfismo*, e o espírito com que Poincaré escreveu essas memórias, motivado sem dúvida por problemas de Análise, é o precursor do espírito atual da Topologia Diferencial.

Alguns conceitos de Topologia relevantes para este trabalho são apresentados a seguir [65, 46].

Uma *métrica* é uma função $d : X \to I\!R$, que associa a cada par $(a, b) \in X$ um número real $d(a, b)$, chamado *distância* de a a b, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(a, b) \geq 0 \forall a, b \in X, \ d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2. $d(a, b) = d(b, a)$;
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \ \forall a, b, c \in X$.

Um *espaço métrico* é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X. Em geral, omite-se d e dizemos simplesmente o espaço métrico X. O espaço Euclidiano $I\!R^n$ é um importante exemplo de espaço métrico, com $d(a, b) = ||b - a||$.

A *bola aberta* de centro $\mathbf{x} \in I\!R^n$ e raio r é o conjunto $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$ dos pontos $y \in I\!R^n$ cuja distância ao ponto $\mathbf{x}$ é menor do que r. Enquanto uma *bola fechada* é formada pelos pontos que estão a uma distância menor ou igual do que r do ponto $\mathbf{x}$.

Seja o conjunto $X \subset I\!R^n$.

- X é um *aberto* de R^n, se $\forall p \in X$ existir uma bola aberta $\mathcal{B}_r(p) \subset X$, $r > 0$.
- Uma *vizinhança* de um ponto $p \in X$, é um aberto que contém p.
- Um ponto $p \in X$ é um *ponto interior*, se existir uma vizinhança V de p tal que $V \subset X$.
- O *interior* de X é o conjunto formado por todos os seus pontos interiores.
- A *borda* de X, ∂X, é formada pelos pontos $b \in I\!R^n$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $X^c = I\!R^n - X$.
- Um ponto p é um *ponto limite* de X ou *aderente* a X, se toda vizinhança de p tem pontos de X.
- X é *fechado*, se contém todos os seus pontos limites.
- X é *limitado*, se existe $\mathcal{B}_R$, $R > 0$, que contém X.
- X é *compacto*, se for limitado e fechado.

Dois conjuntos $M, N \subset \mathbb{R}^n$ são *homeomorfos*, se existir uma aplicação bijetiva contínua $f : M \to N$, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. A aplicação f é chamada de *homeomorfismo*. Em outras palavras, dois conjuntos são homeomorfos ou topologicamente equivalentes, se um pode ser obtido a partir do outro através de deformações contínuas, ou seja, cada ponto de um objeto corresponde a apenas um ponto do outro, e dois pontos vizinhos em um corresponde a dois pontos vizinhos no outro.

Uma *topologia* num conjunto X é uma familia Γ de partes de X, com as seguintes propriedades:

i. $\emptyset$ e X pertencem a Γ,

ii. A união das partes de uma subfamília de Γ é uma parte de Γ e

iii. A interseção de partes de Γ é uma parte de Γ.

O conjunto X é chamado o espaço da topologia Γ e Γ é a topologia de X. O par (X, Γ) é um *espaço topológico* [46].

Uma *variedade topológica* de dimensão n é um espaço topológico X, tal que todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança aberta, homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Isto equivale a dizer que cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola unitária de dimensão n.

Dadas duas variedades M e N. Uma aplicação injetiva $f : M \to N$ é uma *imersão topológica*, se é um homeomorfismo de M sobre sua imagem $f(M)$. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(u) = (x(u), y(u), z(u))$, é uma imersão topológica de uma curva em $\mathbb{R}^3$ (curva paramétrica) e a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é uma imersão topológica de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ (superfície paramétrica).

2.3 Superfícies

A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $f(X) = 0$, é uma representação implícita de uma superfície S. Esta superfície pode ser também representada por um conjunto de equações paramétricas $S = \phi(u, v) \in \mathbb{R}^3$, onde u, v variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. A aplicação $\phi : U \to S$ é uma imersão topológica, ou uma *parametrização*, de S. A função implícita f pode ser obtida de ϕ pela eliminação dos parâmetros u e v.

S é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \in I\!R^3$ e a parametrização $x : U \to V \cap S$ tal que:

1. x é diferenciável, ou seja, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, as funções x_1, x_2 e x_3 tem derivadas parciais de todas as ordens em U.
2. x é um homeomorfismo .
3. Para cada $q \in U$, a diferencial $dx_q : I\!R^2 \to I\!R^3$ é bijetiva, ou seja, cada ponto da superfície admite um plano tangente.

Fixando um ponto $q = (u_0, v_0) \in U$ as curvas $x(u, v_0)$ e $x(u_0, v)$ são chamadas *curvas coordenadas* de S em $p = x(q)$. Os vetores $x_u(q)$ e $x_v(q)$ são vetores tangentes às curvas coordenadas em $p \in S$ e geram o *espaço tangente*, $T_p(S)$.

O *vetor normal* unitário N à S em p é definido por

$$N(p) = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}(p).$$

O vetor N ortogonal ao plano tangente $T_p(S)$ induz em $T_p(S)$ uma orientação. Logo, $T_p(S)$ tem exatamante duas orientações, induzidas por N e seu simétrico [21].

A superfície S é dita *orientável*, se o plano tangente em cada ponto $p \in S$ só tem uma orientação. Neste caso, é possível escolher para cada $p \in S$ uma orientação em $T_p(S)$ que varie continuamente em p. Em outras palavras, se existir uma aplicação diferenciável $N : S \to I\!R^3$ que leva seu valor na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \to S^2$, assim definida, é chamada a *aplicação de Gauss* (ou mapa de Gauss) de S. O campo de vetores normais N define a orientação de S (Figura 2.1).

A aplicação diferencial $dN(p)$ é uma uma aplicação linear em $T_p(S)$. $dN(p)$ mede quão rápido N varia a partir de $N(p)$ em uma vizinhança de p.

Dada uma direção arbitrária $\vec{v} \in T_p(S)$ unitário, existe pelo menos uma curva que passa por p com reta tangente na direção de $\vec{v}$ e cujo vetor normal principal em p tem a direção de $N(p)$. A curva interseção de S com o plano que passa por p e normal ao vetor $N(p) \times \vec{v}$ é chamada *seção normal* de S em p (Figura 2.2). Em uma vizinhança de p, a

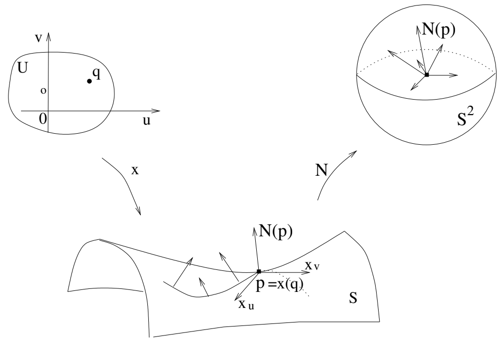


Figura 2.1: Aplicação de Gauss de S.

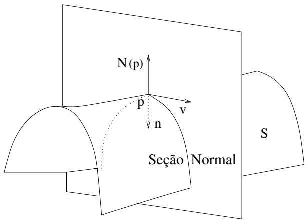


Figura 2.2: Seção normal

seção normal de S em p é uma curva plana regular em S cujo vetor normal em p é $\pm N(p)$ ou 0(zero).

2.3.1 Curvaturas principais

A *curvatura* num ponto de uma curva qualquer mede o grau de variação do ângulo que as retas tangentes, em uma vizinhança do ponto, fazem com a reta tangente nesse ponto. Em uma curva no espaço, existem infinitos vetores normais que passam por um dado ponto p da curva. Chama-se *normal principal* o vetor normal unitário com orientação para o centro de curvatura em p.

A curvatura normal em um ponto p de uma curva α sobre uma superfície S é dada por $k_n = k\cos\theta$, onde k é a curvatura de α em p e θ o ângulo entre o vetor normal principal e o vetor normal à S em p. Portanto, a curvatura da *seção normal* de S em p é igual ao valor absoluto da curvatura normal ao longo de $\vec{v}$ em p. Assim, para analisar as curvaturas normais em $p \in S$, basta estudar as curvaturas das seções normais. O sinal de k_n vai depender da concavidade da curva em p (no sentido de $N(p)$ ou no sentido oposto). Todas as curvas em S que contêm o ponto p e possuem a mesma reta tangente em p tem a mesma curvatura normal.

A aplicação linear $dN(p)$ é auto-adjunta, ou seja, para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$, onde k_1 e k_2 são os valores máximo e mínimo da curvatura normal em p. As direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas *direções principais* de S em p.

Define-se $K = k_1 k_2$ e $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ como a *curvatura Gaussiana* e a *curvatura média* de S em p, respectivamente. De acordo com o valor dessas curvaturas um ponto $p \in S$ é denominado (Figura 2.3):

1. elíptico, se $K > 0$ (k_1 e k_2 com o mesmo sinal);
2. hiperbólico, se $K < 0$ (k_1 e k_2 com sinais contrários);
3. parabólico, se $K = 0$ e $H \neq 0$ (k_1 ou k_2 nula, mas não ambas);
4. planar, se $K = H = 0$ ($k_1 = k_2 = 0$);
5. umbílico, se $K \geq 0$ ($k_1 = k_2$).

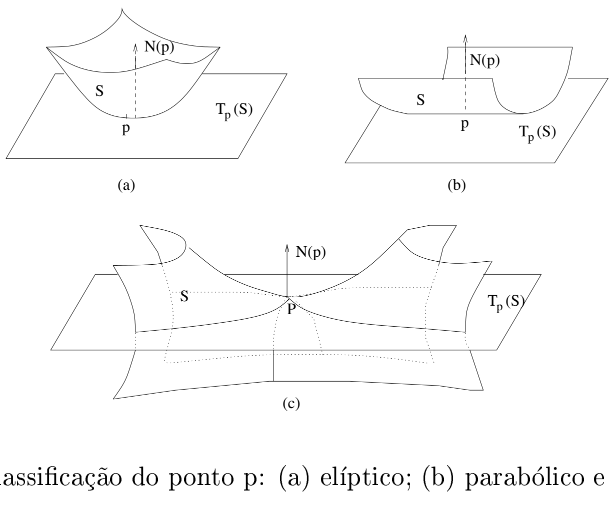


Figura 2.3: Classificação do ponto p: (a) elíptico; (b) parabólico e (c) hiperbólico.

Carmo mostra em [21] que se $p \in S$ é um ponto elíptico de S, então existe uma vizinhança V de p em S tal que todo ponto em V pertence ao mesmo lado do plano tangente $T_p(S)$. Se $p \in S$ é um ponto hiperbólico de S, então para cada vizinhança de p em S existem pontos de S em ambos os lados de $T_p(S)$.

2.3.2 Característica de Euler

Uma superfície é dita *conexa* por caminho se, dados dois pontos quaisquer na superfície, existe um caminho (na superfície) que os une [46]. Essencialmente, uma superfície é *simplesmente conexa*, se ela é formada por um único "pedaço" e desconexa se ela possui mais de um "pedaço". Os "pedaços" de uma superfície desconexa são chamados *componentes* conexos da superfícies ou *componentes* topológicos da superfície.

Um componente de um espaço topológico é um subconjunto *maximamente conexo*, isto é, um subconjunto conexo que não está contido em nenhum outro subconjunto conexo. Se um espaço é conexo ele é formado por um único componente.

Uma superfície é *fechada*, se ela é compacta e sem bordas. As superfícies fechadas e orientáveis são as superfícies que podem ser imersas em $\mathbb{R}^3$.

Qualquer superfície conexa e campacta contida em $\mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com g alças, onde g é o número de gêneros da superfície (Figura 2.4). O número de gênero

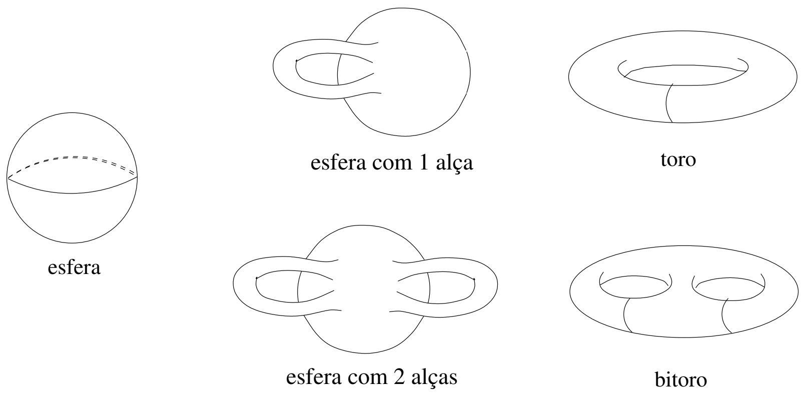


Figura 2.4: Superfícies orientáveis em $\mathbb{R}^3$.

de uma superfície é um invariante topológico e está relacionado com a característica de Euler de S, $\chi(S)$, através da expressão [44, 49]

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Ainda mais, se S é uma superfície triangulada com V vértices, E arestas e F faces, é válida a igualdade

$$\chi(S) = V - E + F.$$

Note que se removermos uma aresta e uma face ou um vértice e as arestas e faces adjacentes, a característica de Euler não é alterada, pois ela é um invariante topológico e não depende da subdivisão escolhida, para triangular a superfície [49].

2.4 Cirurgia topológica

Sejam S_1 e S_2 duas superfícies disjuntas. A *soma conexa* [49], denotada por $S_1 \sharp S_2$ é obtida pela extração de um pequeno disco ("corte") em cada superfície seguida da junção ("costura") das duas superfícies pelas bordas dos discos. Em outras palavras, escolhe-se dois subconjuntos $D_i \subset S_i$, tal que D_i seja um disco fechado, $i = 1, 2$, e um homeomorfismo h da borda de D_1 na borda de D_2. Em seguida, faz a identificação dos pontos x e $h(x)$ para todos os x na borda de D_1 e $h(x)$ na borda de D_2. Pode ser provado que a topologia de $S_1 \sharp S_2$ independe da escolha dos discos D_i, $i = 1, 2$, e do homeomorfismo h [49].

A soma conexa de duas superfícies orientáveis é orientável. Se S_1 ou S_2 não é orientável, então a soma conexa é não-orientável [49].

Denominamos *cirurgia topológica* a realização de duas somas conexas entre duas superfícies disjuntas, ou seja, uma cirurgia topológica consiste em um "corte" e em uma "costura" na superfície, onde o "corte" corresponde a remoção de duas regiões disjuntas gerando duas bordas orientadas e a "costura" na união dessas bordas pela escolha de um homeomorfismo entre elas, resultando na junção de uma alça a uma superfície orientada e fechada (Figura 2.5).

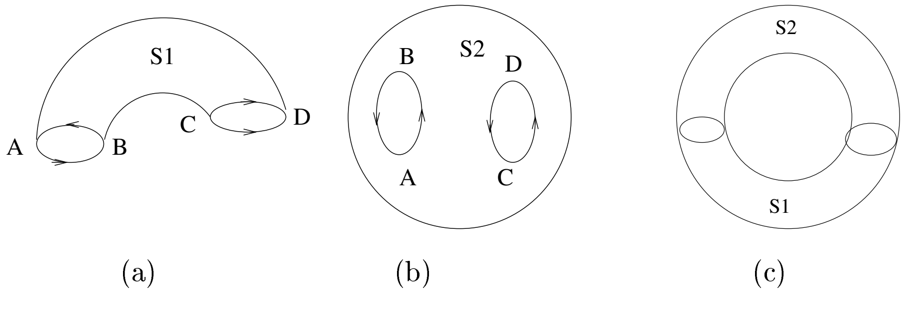


Figura 2.5: A costura de uma alça (a) e uma superfície esférica (b) resulta no toro (c).

Em uma superfície fechada triangulada o corte pode ser realizado pela remoção de duas faces não adjacentes, gerando dois contornos orientados, e a costura pode ser vista como uma retriangulação entre os vértices dos contornos, resultando em uma superfície com o número de gêneros incrementado de um [49]. Isso significa que a caracterísitca de Euler da superfície é alterada numa cirurgia topológica.

2.5 Homotopia

Sejam X e $Y \subset I\!R^n$, e $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é *homotópico* a g se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$. A aplicação H é chamada de homotopia entre f e g. Intuitivamente, uma homotopia H é uma deformação contínua em X de f em g, onde f e g são caminhos em X, e durante a deformação as extremidades $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ permanecem fixas [46].

Uma aplicação contínua $H : X \to Y$ é chamada de *equivalência homotópica* se existir a aplicação homotópica inversa de H. Dois conjuntos são *homotopicamente equivalentes* se tem o mesmo tipo de homotopia [49]. Dois conjuntos tem o mesmo tipo de homotopia quando têm o mesmo número de buracos e de componentes topológicos.

2.6 Pontos críticos

Um *ponto crítico* da função de valores reais h é um ponto $\hat{\mathbf{x}}$ onde o gradiente se anula, ou seja,

$$\nabla h(\hat{\mathbf{x}}) = (h_x(\hat{\mathbf{x}}), h_y(\hat{\mathbf{x}}), h_z(\hat{\mathbf{x}})) = 0.$$

O valor $h(\hat{\mathbf{x}})$ da função nos pontos críticos é chamado de *valor crítico.*

Na classificação dos pontos críticos é usada a forma quadrática Hessiana de h que é definida como o jacobiano do gradiente e independe do sistema de coordenadas escolhido.

$$H(\mathbf{x}) = J(\nabla h(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} h_{xx}(\mathbf{x}) & h_{xy}(\mathbf{x}) \\ h_{yx}(\mathbf{x}) & h_{yy}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Um valor λ, para o qual $(H - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ tem uma solução $\mathbf{x} \neq 0$ é chamado um *autovalor* ou *valor característico* de $H(\mathbf{x})$. As soluções correspondentes $\mathbf{x} \neq 0$ são chamadas *autovetores* ou *vetores característicos* de $H(\mathbf{x})$.

Cada ponto crítico pode ser classificado pela análise dos autovalores de $H(\mathbf{x})$. Dado um ponto crítico $\hat{\mathbf{x}}$, obtemos dois autovalores $l_1 \leq l_2$ de $H(\hat{\mathbf{x}})$. Se pelo menos um deles for nulo, o ponto é dito *degenerado*. Por outro lado, eles são chamados *não-degenerados* e podemos classificá-los pelo sinal de l_i, $i \in \{1, 2\}$.

l_1	l_2	classificação
-	-	máximo
+	-	sela
-	+	sela
+	+	mínimo

O índice do ponto crítico p é dado pelo número de autovalores negativos $H(p)$, ou seja, o índice de p é a maior dimensão de um subespaço vetorial de R^n, restrita ao qual a forma quadrática Hessiana é definida negativa.

Nos pontos críticos não degenerados, o comportamento da função é completamente determinado por meio do índice, como mostra o Lema de Morse [44, 52]

Seja p um ponto crítico não degenerado, de índice k, da função $f : A \to I\!R$, com $f(p) = c$. Então existe um sistema de coordenadas locais $z^1, \cdots, z^n$, na vizinhança de p, em relação ao qual as coordenadas de p são $(0, ..., 0)$ e f tem a forma

$$f(z_1, ..., z_n) - c = -z^1 z^1 - ... - z^k z^k + z^{k+1} z^{k+1} + ... + z^n z^n.$$

2.7 Função altura

Seja S uma superfície regular e $\vec{v} \in I\!R^3$ uma direção. A *função altura*, $h(p) : S \to I\!R$, na direção de $\vec{v}$ é a projeção de S em uma reta nessa direção [68, 31]. O valor da função altura nos pontos p de S é dado pelo produto interno de $\vec{v}$ por p (Figura 2.6)

$$h(p) = < \vec{v}, p > .$$

Um *conjunto de nível* de S na direção $\vec{v}$ em uma altura c é o conjunto $\{p = h^{-1}(c), p \in S\}$, ou seja, é a imagem inversa da função h em c pertencente a S induzida pela direção $\vec{v}$. Por exemplo, qualquer plano no espaço pode ser considerado o conjunto de nível de uma função altura na direção perpendicular ao plano.

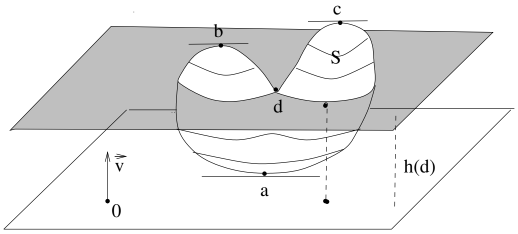


Figura 2.6: Função altura

A relação entre um ponto crítico de S e o tipo de homotopia de S é estabelecida pela teoria de Morse. Para maiores detalhes consultar [44, 52]. Uma interpretação geométrica de seus teoremas é dado em [31].

Quando a função h atinge um valor crítico, uma das seguintes condições deve ocorrer em S (Figura 2.7):

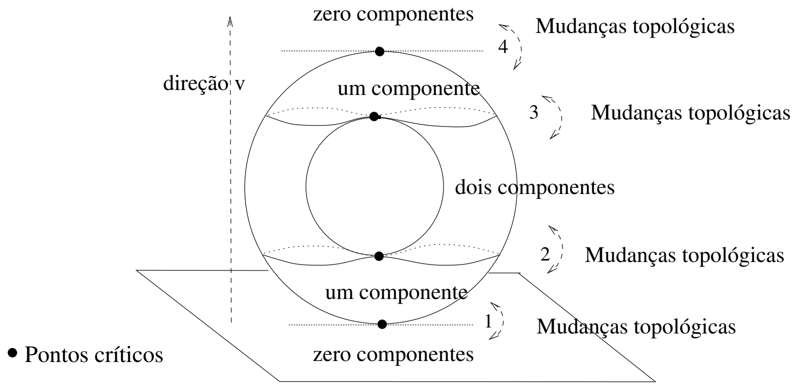


Figura 2.7: Função altura na direção v e seus pontos críticos.

1. Aparece um componente (mínimo local);
2. Um componente divide-se em dois componentes (sela);
3. Dois componentes unen-se em um componente (sela) e
4. Um componente desaparece (máximo local).

Além disso, através do número de pontos críticos de h pode-se determinar a característica de Euler de S por

$$\chi(S) = n_{max} + n_{min} - n_{sela},$$

onde n_{max}, n_{min} e n_{sela} denotam, respectivamente, número de máximos, número de mínimos e número de pontos de sela. Particularmente, se S é homeomorfo à esfera, temos $\chi(S) = 2$ (um ponto de máximo e um ponto de mínimo). Em uma superfície de gênero g temos pelo menos 2g pontos de sela [52, 44].

2.8 Ângulo sólido

Seja A um conjunto de pontos tridimensional formado por uma região fechada simples. A projeção radial do conjunto A sobre a esfera unitária com centro em O determina um *cone*, de vértice O e base A. Esse cone pode ser visto como o sólido formado pelo conjunto de todas as semi-retas do espaço tridimensional com origem em O, passando por pontos do conjunto A (Figura 2.8). O ângulo sólido, com centro em O, determinado pelo cone generaliza para o espaço tridimensional a noção de ângulo entre duas retas da geometria plana [29, 58].

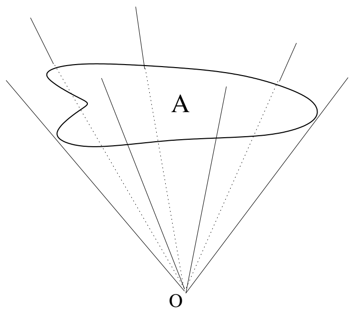


Figura 2.8: O cone de vértice O e base A

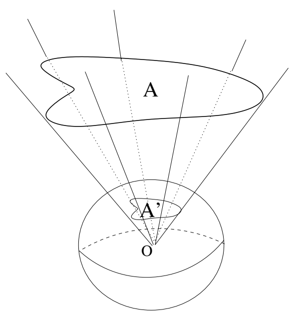


Figura 2.9: A medida de um ângulo sólido

Para quantizar matematicamente o ângulo sólido gerado por A com centro em O, considera-se a esfera unitária S com centro em O e a projeção radial, A', do conjunto A sobre S. A área da região A' é a medida do ângulo sólido gerado por A (Figura 2.9).

2.9 Algoritmos

Nesta seção listaremos alguns algoritmos conhecidos, usados na implementação do modelo proposto.

2.9.1 Operadores gradiente

A maneira mais comum de detectar determinadas características em uma imagem digital é usar uma subimagem retangular, conhecida como máscara, centrada no ponto de interesse (Figura 2.10).

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

Figura 2.10: Uma máscara 3×3

O resultado da aplicação da máscara em um ponto da imagem é dado por

$$R = w_1 z_1 + W_2 z_2 + ... + W_9 z_9 = \sum_{i=1}^{9} w_i z_i,$$

onde z_i é o conteúdo do pixel associado com o coeficiente w_i da máscara. Para determinar se o ponto testado possui ou não a característica de interesse, o valor obtido R é comparado com um *limiar* de controle, previamente determinado. A precisão dos resultados depende da boa determinação desse limiar.

A detecção de bordas em uma imagem é uma forma de detectar descontinuidades na função-imagem, onde as bordas segmentam a imagem em regiões com características distintas. A idéa mais usual nas técnicas de detecção de borda é a aplicação do operador gradiente nos pontos da imagem, também conhecido como filtros da primeira derivada, gerando uma imagem com a mesma dimensão da imagem original contendo somente os seus pontos de descontinuidade.

Denomina-se de gradiente de uma imagem $f(x,y)$ o vetor $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ que determina a direção de variação máxima de f em (x,y).

Os operadores gradientes mais comuns são os operadores de Sobel e de Prewitt, onde as derivadas S_x e S_y são determinadas, respectivamente, por:

$$\text{Sobel:} \quad S_x = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3),$$

$$S_y = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7),$$

$$\text{Prewitt:} \quad S_x = (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3),$$

$$S_y = (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7).$$

As máscaras de Sobel (Figura 2.11(b)) e de Prewitt (Figura 2.11(c)) avaliadas em cada ponto da imagem dada produzem uma imagem contendo as estimativas das derivadas primeiras da função imagem, ou seja, uma imagem das bordas da imagem dada.

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

(a)

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

(b)

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

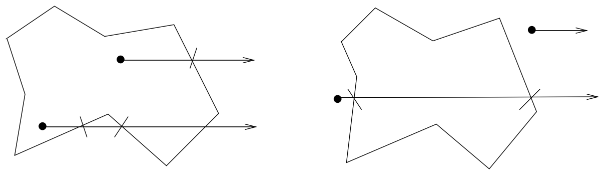
(c)

Figura 2.11: (a) Uma região da imagem, (b) máscaras de Sobel, (c) máscaras de Prewitt.

2.9.2 Classificação de pertinência

Testar quando um ponto pertence ao interior de um polígono, convexo ou não convexo, é uma operação muito usada em nosso trabalho. O algoritmo *Crossings Test* [33], é um algoritmo rápido e eficiente para testar a pertinência de um ponto em um polígono geral.

Nesse algoritmo, o teste de pertinência é realizado da seguinte forma: Dado o ponto a ser testado e os vértices do polígono, uma reta l é traçada na direção positiva do eixo dos x, a partir do ponto de teste. Se o número de interseções dessa reta l com as arestas do polígono for ímpar, então o ponto pertence ao interior do polígono. Caso contrário, o ponto está fora do polígono (Figura 2.12).



(a) (b)

Figura 2.12: O algoritmo crossing test: (a) número impar e (b) número par de interseções.

Quando se trata de polígonos planares o teste pode ser reduzido a simples comparações das coordenadas x e y dos vértices e dos pontos de interseção da reta l com as arestas do polígono, considerando as posições das coordenadas y dos vértices adjacentes a cada aresta do polígono em relação a reta. Se as coordenadas y estão em lados opostos da reta l então

- se as coordenadas x dos vértices adjacentes a aresta do polígono, em relação ao ponto de teste, estão a direita, então ocorre uma interseção, ou
- se a coordenada x de apenas um dos vértices está à direita do ponto de teste e o ponto de interseção da aresta com a reta l tem coordenada x à direita do ponto de teste, então ocorre uma interseção.

2.9.3 Centróide de um polígono

As coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centróide de uma região plana R, com borda C, parcialmente suave e com densidade uniforme são determinadas por:

$$\overline{x} = \frac{\int\int_R x\,dx\,dy}{A} = \frac{\mu_x}{A},$$

$$\overline{y} = \frac{\int\int_R x\,dx\,dy}{A} = \frac{\mu_y}{A},$$

onde A é a área de R, μ_x e μ_y são os primeiros momentos de R ao longo das coordenadas x e y, respectivamente [41].

Considerando que existem funções M e N contínuas com derivadas parciais contínuas em R, então pelo teorema de Green tem-se

$$\int_C (M dx + N dy) = \int\int_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dx\, dy.$$

Tomando $M = -y$ e $N = x$, a área de R é dada por

$$\frac{1}{2}\int_C (x\, dy - y\, dx) = \int\int_R dx\ dy,$$

e os primeiros momentos podem ser determinados por

$$\mu_x = \frac{1}{2}\int_C x^2 dy = \int\int_R x\, dx\, dy,$$

$$\mu_y = -\frac{1}{2}\int_C y^2 dx = \int\int_R y\, dx\, dy.$$

Se R é um polígono definido pelos pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, ..., n$, com $x_0 = x_n$ e $y_0 = y_n$, e sua borda é uma curva poligonal fechada, suave por partes, então a sua área e os primeiros momentos podem ser determinados pela soma das integrais em cada uma das arestas da poligonal, obtendo assim as expressões [33]:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} a_i, \quad \text{onde} \quad a_i = x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i, \\ \mu_x &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)\, a_i \qquad \text{e} \\ \mu_y &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} + y_i)\, a_i. \end{aligned}$$

As coordenadas do centróide e a área, com sinais positivo, de polígonos planares, convexos ou não convexos, são determinados tomando os vértices ordenados no sentido anti-horário no plano xy. Caso contrário, o sinal da área e dos primeiros momentos serão negativos.

2.9.4 Algoritmo de Newell

Martin Newell [63] desenvolveu uma técnica para a determinação da equação do plano

$$ax + by + cz = d$$

que melhor aproxime uma região poligonalizada (Figura 2.13), onde $n = (a, b, c)$ é o vetor

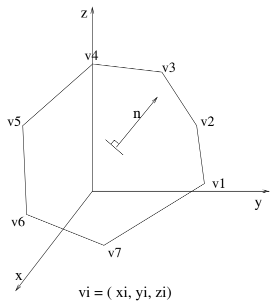


Figura 2.13: Região poligonal plana no espaço $3D$

normal ao plano. A equação do plano obtida é exata para região poligonais planas e uma melhor aproximação para os demais casos.

Os coeficientes a, b e c e d da equação são determinados por:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_j) - (z_i - z_j) \\ b &= \sum_{i=1}^{n}(z_i - z_j) - (x_i - x_j) \\ c &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_j) - (y_i - y_j) \\ d &= -(a\,x_k + b\,y_k + c\,z_k), \end{aligned}$$

onde $j = 1$ se $i = n$ e $j = i + 1$ nos demais casos e (x_k, y_k, z_k) é um ponto do plano.

A técnica é equivalente a determinar o vetor normal n pelo cálculo da média dos vetores normais, em cada vértice do polígono, determinados pelo produto vetorial das arestas adjacentes.

Capítulo 3

Trabalhos Relacionados

Este capítulo apresenta uma visão geral dos métodos de reconstrução de modelos 3D, a partir de imagens de profundidade, com o objetivo de fornecer uma retrospectiva a respeito do desenvolvimento das técnicas de reconstrução de modelos 3D nas últimas décadas.

Os métodos estão agrupados de acordo com a abordagem que cada um utiliza, seguindo a classificação dada no Capítulo 1, a saber, modelos segmentados, modelos volumétricos e modelos deformáveis.

3.1 Modelos segmentados

Na abordagem de modelos segmentados, um modelo 3D é criado pela união ("costura") de um conjunto de malhas poligonais, cada qual é gerada a partir de uma imagem de profundidade dada. Portanto, podemos analisar os modelos propostos considerando dois estágios de reconstrução: a geração de malhas abertas (com borda) e o processo de integração dessas malhas em uma malha fechada.

No que diz respeito à geração de malhas, duas técnicas se destacam: *triangulação no domínio da malha* e *malha regular*. A primeira técnica considera a malha como o gráfico de uma função discreta de profundidades e a imagem de profundidade como a projeção da malha sobre seu domínio. Esta técnica é uma forma simples e eficiente de gerar malhas explorando a estrutura contida nos dados para estabelecer a topologia da malha e usando o valor da função de profundidade, em cada ponto amostrado, para estabelecer a geometria do objeto de interesse. A segunda técnica, por sua vez, gera uma malha uniforme, com o número de vértices predeterminado, a partir da triangulação adaptativa de uma esfera, tomada bem próxima aos pontos amostrados.

Quanto à integração de malhas, os métodos conhecidos diferem no tratamento dado às regiões da malha que se sobrepõem durante a "costura". Segundo Schütz et al. [66], podemos distingui-los em dois grupos: métodos com erosão parcial e métodos com retriangulação completa. Nos métodos que usam a técnica de erosão parcial, a área da malha sobreposta é erodida até que a sobreposição desapareça e a partir daí duas malhas triangulares adjacentes são unidas pelas bordas. Nos métodos que usam a técnica de retriangulação, as informações das malhas previamente criadas são desprezadas em toda a região de sobreposição e uma nova triangulação é feita nessa região, considerando o grau de certeza dos dados redundantes nas imagens envolvidas.

Turk e Levoy [75] propuseram o método, conhecido como *zippering-algorithm*, que usa triangulação no domínio da malha (imagem) para gerar cada uma das malhas poliédricas tridimensionais. A cada conjunto de quatro pontos vizinhos na imagem, pertencentes a linhas e colunas adjacentes, existem duas possíves formas de conexão destes pontos (Figura 3.1). A configuração mais provável é determinada pela menor diagonal entre os quatro pontos. Cada um desses triângulos só pertencerá, porém, à malha se as suas arestas

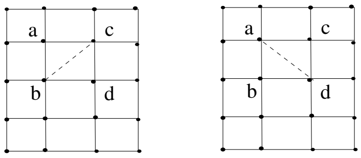


Figura 3.1: Possíveis conexões entre quatro pontos adjacentes.

não excederem um determinado limiar de comprimento, evitando com isso a ligação entre vértices separados por descontinuidades de profundidade. A geração de malhas, através dessa técnica, cria malhas sem auto-interseções e bem representativas do objeto amostrado. Porém, a densidade dessas malhas é comparável com a dos pontos amostrados.

Para gerar a superfície fechada, o método ainda registra e integra ("cola") as malhas trianguladas de forma incremental (duas a duas) usando o algoritmo iterativo do ponto mais próximo (*iterated closed-point* - ICP [6]). Esse algoritmo se fundamenta no princípio de minimização do erro entre a distância de cada vértice de uma malha aos vértices da malha adjacente, determinando os pares de vértices mais próximos em cada par de malhas adjacentes. A "colagem" entre as malhas registradas faz uso da técnica da erosão, onde novos vértices são criados e outros removidos, de forma que as duas malhas sejam unidas sem sobreposição. Neste processo podem aparecer fendas, como também vértices que não correspondem a pontos amostrados na imagem, proporcionando uma possível perda de detalhes geométricos da superfície. Para minimizar esses efeitos indesejáveis, é realizado um processamento posterior à "costura" de todas as malhas, onde é determinada a posição média de cada vértice em relação às imagens em que ele aparece amostrado, na direção do vetor normal à superfície, e então o vértice é deslocado para essa posição.

O método desenvolvido por Turk e Levoy [75] apresenta bons resultados quando existe um número grande de imagens disponíveis, gerando uma malha muito densa, onde praticamente todos os pontos amostrados são transformados em vértices da malha final. Mesmo assim, nas regiões com grande curvaturas, o algoritmo apresenta problemas com fendas ("buracos") na união de malhas que representam regiões com pequenos detalhes.

A malha obtida por Turk e Levoy [75] é uniforme no domínio da malha (imagem). As variações geométricas dos pontos amostrados não são utilizados para obter malhas menos densas. Tanaka [69] aperfeiçoou a técnica de triangulação no domínio da malha, usando propriedades locais do objeto amostrado, tais como profundidade, orientação, curvatura e cor, a fim de obter uma triangulação hierárquica. A técnica aperfeiçoada gera, inicialmente, uma malha regular grosseira, que é subdividida recursivamente de acordo com propriedades locais observadas em cada vértice. Uma subdivisão é feita quando dois vértices vizinhos não possuem a mesma propriedade local especificada. Além disso, Tanaka apresenta em seu trabalho um método eficiente para calcular a precisão local da reconstrução em cada ponto amostrado, que é baseado na curvatura estimada da superfície a ser reconstruída.

O critério de precisão é dado como a razão entre o comprimento de arco $L(R_i)$ e a aproximação linear $L(D_i)$ da curva C_i, que possui a curvatura estimada da superfície a ser reconstruída entre dois pontos dados, satisfazendo a equação (Figura 3.2)

$$\frac{L(R_i)}{L(D_i)} \leq Acc = \frac{m}{\pi}\mathrm{sen}(\frac{\pi}{m}),$$

onde Acc é o limiar de erro admissível e m denota o m-ésimo setor circular de um círculo unitário. O refinamento da malha é realizado até que todas as faces satisfaçam o critério de precisão dado.

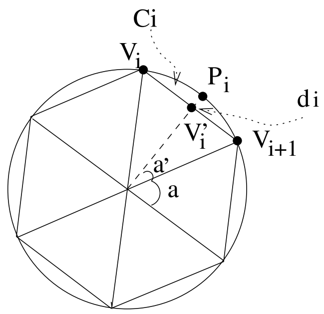


Figura 3.2: O m-ésimo setor circular de um círculo unitário, onde a=$\frac{2\pi}{m}$ e a'=$\frac{\pi}{m}$.

Schütz et al. [66] simplificaram a forma de costura proposta por Turk e Levoy [75] através da combinação das técnicas de erosão e retriangulação. Durante a junção das malhas, a região de sobreposição é simplesmente descartada (erodida) e os vértices mais próximos entre cada par de malhas adjacentes são conectados, gerando uma "ponte" triangulada. Apesar de necessitar de um número de imagens menor para reconstruir uma superfície fechada, a malha triangulada final ainda é muito densa, com o número de vértices próximo ao número de pontos amostrados.

Higuchi et al. [35] apresentam um método baseado em imagens esféricas (*spherical attribute image* - SAI). As imagens esféricas representam a curvatura estimada de cada vértice das malhas a serem registradas. Cada malha é regular com uma quantidade predeterminada de vértices, o que facilita o registro de imagens, sem o conhecimento prévio das posições das vistas. No registro, a transformação relativa entre as malhas é determinada pela comparação entre suas imagens esféricas correspondentes, de forma similar ao algoritmo ICP (*iterated closed-point* [6]).

Higuchi et al. [35] utiliza como sua malha inicial o dual de uma esfera triangulada cujo número de faces é igual ao número predeterminado de vértices (Figura 3.3). Dessa malha fechada com facetas pentagonais são extraídas as facetas que aproximam os dados de uma imagem para definir uma malha aberta. Ajustes pequenos são feitos nesta malha aberta para que seja a menor possível a sua distância em relação aos pontos amostrados. Este procedimento é repetido para cada imagem separadamente. A "costura" entre duas malhas é realizada pela técnica da erosão, que associa cada vértice de uma malha ao vértice mais próximo na outra malha com auxílio de SAIs. Heung [34] aperfeiçoou o processo

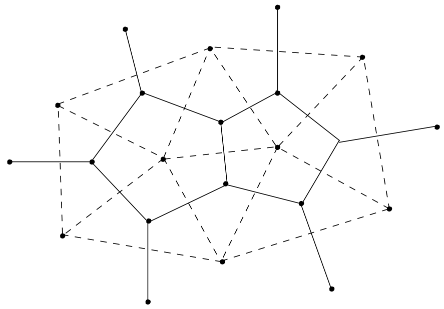


Figura 3.3: Malha dual triangulada.

de integração do método de Higuchi et al. [35] fazendo uma reamostragem dos pontos para estabelecer uma correspondência biunívoca com os vértices das malhas nas múltiplas vistas. Recentemente, Adan et al. [1] melhorou a eficiência do método, fazendo um rearranjo no processo iterativo de deformação da malha, através da definição de uma nova estrutura de dados.

O método apresentado por Higuchi tem a propriedade de não necessitar de informações sobre a topologia entre os pontos amostrados para gerar a malha, o que facilita a adaptação incremental de qualquer vista. As imagens esféricas facilitam o registro sem o conhecimento prévio da posição dessas vistas. Em contrapartida, esse método tem a limitação de gerar apenas modelos suaves, topologicamente equivalentes à esfera (superfícies de gênero 0), e representados por uma malha regular e densa que não leva em conta as características da superfície modelada.

A reconstrução de superfícies complexas, sem fendas e sobreposições, através da "colagem" de malhas ainda é um problema aberto. Os métodos que empregam modelos volumétricos tratam desse problema de uma forma mais natural.

3.2 Modelos volumétricos

Na abordagem volumétrica [37, 9, 20], os métodos estão fundamentados em um esquema de representação denominado de enumeração espacial, onde um volume 3D é particionado em células cúbicas (conhecidas como voxels). Esses métodos definem uma função suave $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de tal forma que $f(X) = 0$, para todo X na superfície, $f(X) > 0$, para todo X dentro da superfície e $f(X) < 0$, para todo X fora da superfície. A função f, geralmente, é uma função distância com sinal determinada com relação à posição do sensor dos pontos amostrados, e é calculada em cada vértice da célula cúbica (voxel). Se a função f é negativa para alguns vértices de uma célula, e positiva para outros, então a superfície deve passar através da célula. O problema é então determinar como a superfície interseciona cada célula, ou seja, determinar os pontos da superfície que intersecionam cada aresta cujos vértices possuem sinais opostos – *pontos de interseção* – e determinar a conexão entre estes pontos. Dentre os procedimentos de conversão de modelos volumétricos para os modelos de superfície, o algoritmo *marching cubes* é o mais utilizado [47].

O algoritmo *marching cubes* foi aplicado, inicialmente, na reconstrução de superfícies fechadas amostradas por seções transversais[1] de imagens médicas. Esse algoritmo cria cubos (voxels) com os vértices em seções adjacentes e determina como a superfície interseciona cada cubo. Ele rotula primeiramente os vértices com sinais positivos ou negativos. Baseado no fato de que a superfície somente interseciona os cubos que tiverem vértices com sinais opostos, Lorensen e Cline [47] concluiram que existem ao todo 256 formas de uma superfície intersecionar um cubo. Ainda mais, pela simetria do cubo, este número é reduzido a 14 casos (Figura 3.4), A geometria da superfície, por sua vez, é determinada por uma interpolação trilinear (interpolação linear ao longo de cada aresta da célula cúbica) entre os pontos de interseção em cada uma das células cúbica. O maior problema desse algoritmo é a

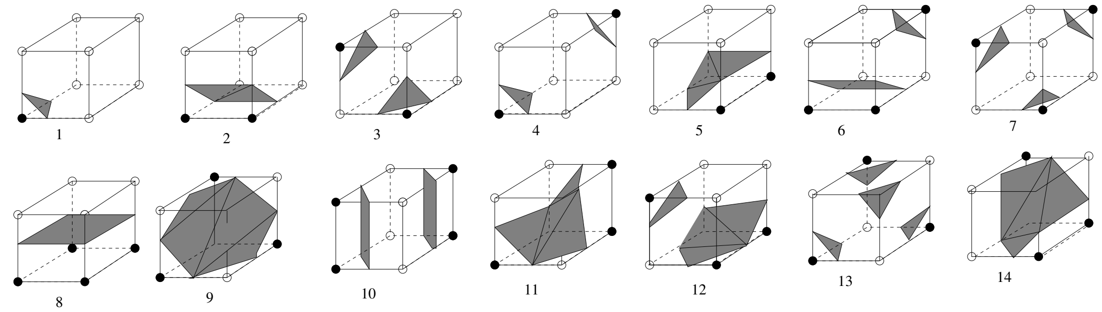


Figura 3.4: Tabela dos cubos com topologias distintas.

ambiguidade topológica da superfície que interseciona um cubo. Quando este contém uma diagonal com um par de vértices com o mesmo rótulo, a conexão incorreta entre os pontos de interseção pode gerar formas topologicamente erradas e possíveis falsas descontinuidades (Figura 3.5).

[1]Seções transversais são amostras de contornos de um objeto obtidas através da interseção do objeto por uma coleção de planos não necessariamente paralelos entre si [59].

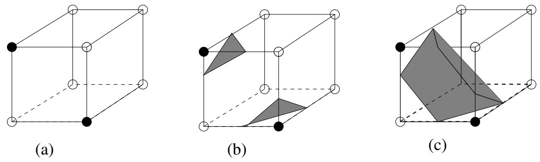


Figura 3.5: Superfícies com topologias distintas (b) e (c) geradas a partir da mesma situação (a).

Bloomenthal [9] mostra que a poligonalização de superfícies implícitas, considerando dados volumétricos, pode ser obtida sem ambiguidade topológica. A ambiguidade nas células cúbicas pode ser resolvida usando técnicas de decomposição das células em sub-células não ambiguas. Essa decomposição pode ser obtida com refinamento das células através de uma reamostragem dos dados e o particionamento das células cúbicas ambíguas em sub-células cúbicas não ambíguas. A aplicabilidade desta técnica depende da viabilidade de reamostragem dos dados e da resolubilidade da malha final. Outra técnica de decomposição de células mais geral é a técnica da tetraedralização das células cúbicas, o refinamento é feito sem requerer nenhum novo vértice à célula, esta é decomposta em 5 ou 6 novas células tetraédricas, onde as novas faces são determinadas pela introdução de diagonais às faces dos cubos. Em um tetraedro os vértices positivos são separados dos negativos através de um plano, não permitindo ambiguidades. Com a tetraedralização das celulas cúbicas, novas arestas diagonais são introduzidas, elevando com isso a resolução da malha final (maior número de faces).

Nas aplicações onde não é possivel realizar uma reamostragem, ou que o número de faces da malha deve ser considerado, as técnicas de decomposição de células não são adequadas. Nestes casos o algoritmo *marching cubes* é o mais utilizado. Existem várias versões do algoritmo *marching cubes* com o objetivo de eliminar as ambiguidades topológicas.

Dentre eles cabe destacar o trabalho de Hoppe et al. [37] que define a função distância com sinal a partir da estimativa do plano tangente a cada um dos pontos dados. A conexão entre os vértices é decidida a partir da orientação do plano tangente definido em cada vértice.

Gelder e Wilelms [27] usam informações externas à célula, através da estimativa do gradiente nos vértices das faces das células cúbicas, incorporando a cada vértice informações dos pontos vizinhos à face. A partir dessas informações define-se uma função quadrática, assumindo que uma função desse tipo permite uma representação local satisfatória para a superfície e permite identificar a existência de pontos hiperbólicos (pontos de sela. Isso possibilita uma decisão mais segura sobre a topologia da superfície, ao considerar a curva determinada pelos zeros da função quadrática no plano de cada face das células. Essa curva descreve uma seção cônica. Baseada na topologia induzida por esta seção, é determinada a conexão correta entre os pontos de interseção daquela face.

Natarajan [53] considera que a decisão sobre a topologia da superfície em uma célula cúbica não deve ser tomada baseada apenas em informações sobre as faces dessa célula, mas também sobre o seu interior. Apresenta, então, um método para determinar a topologia de cada célula, através da identificação eficiente dos pontos de sela no seu interior. A consistência topológica é assegurada pela identificação dos pontos de sela de uma função interpolante trilinear por partes, no interior e nas faces de cada célula. O valor da função nesses pontos é usado para inferir a topologia da superfície amostrada. Este método consegue assegurar a consistência topológica, construindo uma malha triangulada menos densa do que a obtida pelos métodos anteriores.

Procurando atribuir aos modelos volumétricos a capacidade de adaptação incremental, Curless e Levoy [20] apresentam um método incremental para reconstruir superfícies sem "buracos", processando as imagens de profundidade uma a uma. Cada imagem de profundidade é triangulada e um peso é atribuído a cada um dos vértices do modelo correspondente, com base no grau de certeza do processo de aquisição. Então a função distância com sinal, $D_{i+1}(v)$, definida para cada vértice v do modelo é atualizada na integração de $(i+1)$-ésima imagem de profundidade através da expressão

$$D_{i+1}(v) = \frac{W_i(v)D_i(v) + w_{i+1}(v)d_{i+1}(v)}{W_i(v) + w_{i+1}(v)},$$

onde $w_{i+1}(v)$ e $d_{i+1}(v)$ são, respectivamente, o peso e a distância do ponto v da $(i+1)$-ésima imagem de profundidade e $W_i(v)$ e $D_i(v)$ são o pesos das funções peso e distância acumuladas após a integração da i-ésima imagem de profundidade e

$$W_{i+1}(v) = W_i(v) + w_{i+1}(v).$$

Adicionalmente, um algoritmo de ajuste de "buracos" é usado para interpolar as regiões não visíveis da superfície.

3.3 Modelos deformáveis

Na abordagem de modelos deformáveis, o modelo 3D é obtido a partir da deformação dinâmica de um modelo inicial mais simples, topologicamente equivalente ao objeto a ser reconstruído. Esta abordagem tem a vantagem de evitar o problema de fendas ("buracos") naturalmente, uma vez que o processo inicia com uma superfície simples e fechada. Se nenhum "corte" na malha for efetuado durante o processo de deformação, o resultado do processo será uma superfície fechada homeomorfa ao modelo inicial dado.

Como já mencionamos no Capítulo 1, existem pesquisas em duas direções. Uma direção é no sentido de reduzir o problema para a minimização de um funcional *global*, usando a teoria de regularização, cujo objetivo é o ajuste de uma superfície elástica com energia mínima aos pontos da imagem. A outra direção está baseada em informações *locais* para, dinamicamente, dar uma forma ao modelo inicial [15], onde nenhuma técnica de minimização é explicitamente empregada. Esta última técnica tem a vantagem, sobre a anterior de não necessitar de nenhuma análise preliminar global nos dados, para garantir a convergência a uma solução correta.

3.3.1 Deformação contínua

Modelos deformáveis com deformação contínua foram propostos originalmente por Terzopoulos [71, 72]. Ele considera que a reconstrução de uma superfície inclui estimar a sua posição espacial, a sua orientação, e também suas descontinuidades. Assumindo uma projeção paralela no plano da imagem, a distância a partir do observador da superfície visível é dada por $z = Z(x, y)$, que pode ser vista como uma função-altura nas coordenadas da imagem (x, y). Esta função é contínua na maior parte dos pontos. Somente nas quinas, nas regiões "enrrugadas" e nas regiões oclusas ocorrem descontinuidades de profundidade e de orientação. Os ruídos, que corrompem a forma estimada da superfície (restrições), podem ser expressos por

$$c_i = \mathcal{L}_i[Z(x, y)] + \epsilon_i, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{L}_i$ é um funcional aplicado a $Z(x, y)$ e ϵ_i denota a medida do erro associado. Desta forma, o problema de reconstrução de superfícies visíveis reduz-se ao problema de determinacão da função de profundidade $Z(x, y)$ sujeita a um conjunto de restrições c_i.

Terzopoulos mostra em [71] que a formulação matemática do problema da reconstrução de superfícies visíveis é um problema pertencente à categoria de problemas matemáticos inversos, os quais tendem a ser matematicamente mal postos (problemas onde a existência, unicidade e estabilidade da solução não pode ser assegurada, sem a imposição de algumas restrições). Esses problemas, de uma forma geral, devem ser remodelados para se tornarem solúveis. Ele optou pelas teorias de regularização, como os métodos de regularização de Tikhonov [71], que usam princípios do cálculo variacional para oferecer a base teórica na transformação de um problema mal posto em um problema tratável (solúvel).

Considerando $\mathcal{H}$ o espaço das funções $Z(x,y)$ admissíveis e $\mathcal{S}(v)$ um funcional estabilizante que mede o suavidade das funções $v \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{P}(v)$ uma função de penalização que mede a distância entre as restrições dadas c_i e v, o problema de reconstrução de uma superfície visível consiste em encontrar $u \in \mathcal{H}$ tal que [71]

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{v \in \mathcal{H}} \mathcal{E}(v), \tag{3.2}$$

onde o funcional energia $\mathcal{E}(v) = \mathcal{S}(v) + \mathcal{P}(v)$.

Quando existe uma solução para a equação (3.2), esta solução satisfaz a equação de Euler-Lagrange, que expressa a condição necessária para a existência de um mímino, quando a primeira derivada variacional δ_u do funcional da energia se anula

$$\delta_u \mathcal{E}(u) = \delta_u \mathcal{S}(u) + \delta_u \mathcal{P}(u) = 0.$$

A função de suavização $\mathcal{S}(v)$ mantém controle local sobre a continuidade da solução, possibilitando que o problema seja regularizado enquanto preserva as descontinuidades de profundidade e de orientação. Ela é dada por

$$\mathcal{S}(v) = \int_\Omega \rho(x,y)\{\tau(x,y)(v_{xx}^2 + 2v_{xy}^2 + v_{yy}^2) + [1 - \tau(x,y)](v_x^2 + v_y^2)\}\, dx\, dy,$$

onde $\Omega \subset I\!R^2$ é o domínio da imagem, $\rho(x,y)$ e $\tau(x,y)$ são funções de ponderação, variando em $[0,1]$. Assumindo condições de contorno livres em $\delta\Omega$, a derivada variacional de $\mathcal{S}(v)$, no interior de Ω, é dada por

$$\delta_u \mathcal{S}(v) \;=\; \frac{\delta^2}{\delta x^2}(\mu v_{xx}) + 2\frac{\delta^2}{\delta x \delta y}(\mu v_{xy}) + \frac{\delta^2}{\delta y^2}(\mu v_{yy}) - \frac{\delta}{\delta x}(\eta v_x) - \frac{\delta}{\delta y}(\eta v_y),$$

onde

$$\mu(x,y) \;=\; \rho(x,y)\tau(x,y) \quad \text{e}$$

$$\eta(x,y) \quad = \quad \rho(x,y)[1-\tau(x,y)].$$

As funções ρ e τ representam explicitamente as descontinuidades de profundidade e de orientação, respectivamente, sobre Ω. Os valores das funções ρ e τ em $(x,y) \in \Omega$ determinam a continuidade local de $u(x,y)$, a saber:

- $\lim_{\tau(x,y)\to 0} \mathcal{S}(v)$ caracteriza, localmente, uma membrana *spline* (uma superfície C^0 contínua);
- $\lim_{\tau(x,y)\to 1} \mathcal{S}(v)$ caracteriza, localmente, um *thin-plate spline* (uma superfície C^1 contínua);
- $\lim_{\rho(x,y)\to 0} \mathcal{S}(v)$ caracteriza, localmente, uma superfície descontínua;
- Valores intermediários de ρ e τ caracterizam superfícies C^1 sob a ação de uma força de tensão, onde ρ é a variação espacial da coesão superficial e $(1-\tau)$ é a variação espacial da tensão da superfície.

A função $\mathcal{P}(v)$ é a norma Euclidiana ponderada

$$\mathcal{P}(v) = \frac{1}{2}\sum_i \alpha_i(\mathcal{L}_i[v]-c_i)^2, \tag{3.3}$$

onde α_i é um parâmetro de restrição não negativo. Um ótimo valor para esse parâmetro é $\alpha_i = \frac{1}{\lambda\sigma_i^2}$, onde λ é um fator de proporcionalidade e σ_i^2 é a variância da distribuição do erro com média zero [72].

O funcional $\mathcal{L}_i$ para reconstrução de superfície pode ser dado pela derivada de $k-$ésima ordem em um ponto,

$$\mathcal{L}_i[v] \quad = \quad (\frac{\delta^k v}{\delta x^j \delta y^{k-j}}) \mid_{(x_i,y_i)\in\Omega} \quad \text{para } j=0,1,...,k.$$

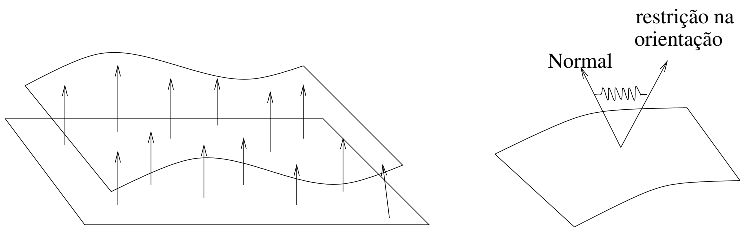
Então, o funcional de ordem zero, $\mathcal{L}_i[v(x,y)] = v(x_i,y_i)$ modela o conjunto de restrições locais, $c_i = v(x_i,y_i)+\epsilon_i = d_{(x_i,y_i)}$, para $i \in D$. A orientação local da superfície é determinada pelos componentes da normal à superfície, $\mathbf{n}(x_i,y_i) = [v_x(x_i,y_i), v_y(x_i,y_i), -1]$, representada pelas derivadas de primeira ordem do funcional $\mathcal{L}_i[v(x,y)]$. Isto produz expressões análogas para restrições de orientações locais: $c_i = v_x(x_i,y_i)+\epsilon_i = p_{(x_i,y_i)}$, para $i \in P$ e $c_i = v_y(x_i,y_i)+\epsilon_i = q_{(x_i,y_i)}$, para $i \in Q$.

A função de penalização resultante é expressa por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(v) = \; & \frac{1}{2} \sum_{i \in D} \alpha_{d_i} [v(x_i, y_i) - d_{(x_i,y_i)}]^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i \in P} \alpha_{p_i} [v_x(x_i, y_i) - p_{(x_i,y_i)}]^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i \in Q} \alpha_{q_i} [v_y(x_i, y_i) - q_{(x_i,y_i)}]^2,\end{aligned}$$

onde o parâmetro α_i na equação 3.3 é agora decomposto em α_{d_i}, α_{p_i} e α_{q_i}.

Podemos interpretar esse modelo como uma superfície elástica cuja energia de deformação, $\mathcal{S}(v)$, leva sua forma a variar suavemente quase em toda parte (menos nas descontinuidades). As restrições são representadas pelas forças aplicadas na direção de $z - Z(x, y)$ que desviam a forma da superfície a partir do estado de repouso; a função de penalização $\mathcal{P}(v)$ representa a energia de deformação do conjunto de pontos fixos nas restrições. As restrições de profundidades determinam as deflexões $u = u(x, y)$ da superfície elástica em equilíbrio. A tensão em cada restrição é controlada pela rigidez associado α_{d_i} (Figura 3.6).



(a) (b)

Figura 3.6: O modelo físico. (a) Superfície sobre tensão e restrição de profundidade. (b) Influência local da restrição de orientação

Terzopoulos [74] usou o seu modelo regularizado para gerar formas quase simétricas, a partir de um modelo inicial com um eixo de simetria, denominado *modelo quasi-simétrico*. Mais especificamente, reconstruiu objetos a partir de contornos e uma sequência de pares de imagens binoculares. Os objetos são deformados como corpos elásticos, sujeitos à ação de forças intrínsicas (referentes às restrições próprias do modelo deformável, como coerência de superfícies e simetrias, extraídas das informações de contornos de múltiplas imagens) e extrínsicas (referentes às forças externas ao modelo). A formulação matemática desse modelo é dada pela equação do movimento de uma membrana elástica, sob a ação de uma força externa $f(\mathbf{v})$,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = f(\mathbf{v}), \tag{3.4}$$

onde $\mathbf{v}$ é a superfície parametrizada do modelo inicial, ρ é a densidade de massa do corpo deformável, γ é a viscosidade do ambiente, $\mathcal{E}(v)$ é o funcional energia que caracteriza o material deformável e $\partial\mathcal{E}$ é a derivada variacional do funcional energia e representa a força elástica interna do corpo. A superfície 3D reconstruída, representada por $\mathbf{u}$, é aquela que tem energia elástica mínima, ou seja, $\partial\mathcal{E}(\mathbf{u}) = 0$.

Weiss [80] observou que as técnicas baseadas em teoria de regularização não conseguem reconstruir adequadamente superfícies que possuem bordas ou cantos abruptos, uma vez que elas suavizam as variações abruptas. Isso pode resultar na perda de importantes informações sobre a forma do objeto a ser reconstruído. Para atenuar esse problema, Weiss considera toda a superfície representada por uma malha finita de pontos e descreve as áreas onde há trocas bruscas com mais pontos e as mais suaves com menos pontos, caracterizando, desta forma, as áreas com rápidas mudanças nas direções dos vetores normais com maior precisão. Essa adaptação nos pontos da malha é feita automaticamente, de acordo com um princípio de otimização, usando uma analogia com o modelo físico da mola.

No início desta década, Terzopoulos e Metaxas [73] apresentaram um novo método, o qual satisfaz simultaneamente os requisitos de reconstrução e de reconhecimento usando imagens de profundidade. Nesse método, as superquádricas deformáveis (superelipsóide) são usadas como o modelo inicial que se deforma sob a ação de forças elásticas estimadas a partir das imagens até atingir o estado de energia elástica mínima. Koh, Metaxas e Badler [40] aperfeiçoaram a técnica, incorporando ao método uma subdivisão adaptativa da malha, baseada em um critério de precisão (distância) entre os vértices do modelo e os dados da imagem, gerando dessa forma uma malha com um número reduzido de vértices. A estratégia usada na subdivisão, denominada *operações conforme*, seleciona os triângulos que devem ser subdivididos e bisseca-os pelo seu maior lado. Em seguida, os triângulos são bissecados ou trissecados para manter a topologia triangular da malha (Figura 3.7). Recentemente, superquádricas deformáveis têm sido usadas para segmentar imagens de profundidade [43].

Chia e Medioni [16] melhoraram o problema de eficiência do método com relação ao

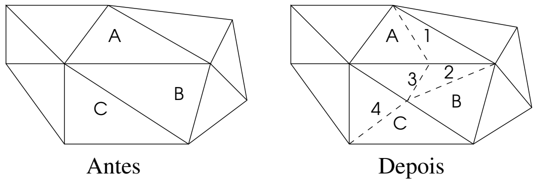


Figura 3.7: Propagação da subdivisão da malha nas faces adjacentes.

tempo de execução e ao espaço de armazenamento, usando o algoritmo de minimização de Powell [61]. O algoritmo de Powell facilita o desdobramento do problema de reconstrução de superfícies em um conjunto de problemas lineares de ajuste de contornos, onde os contornos são obtidos usando o princípio das curvas de energia mínima, denominados de *B-snake* [17].

As técnicas que usam modelos deformáveis necessitam de uma forma inicial ajustada grosseiramente ao objeto a ser reconstruído, necessitando portanto de um preprocessamento. Algorri e Schmidt apresentam em [2] uma inicialização robusta para métodos de deformação *global*. O método proposto gera automaticamente uma superfície "simplicial" (superfície poliédrica), a partir de um conjunto de pontos tridimensionais, dos quais não se tem nenhum conhecimento sobre a sua topologia. O algoritmo é baseado na decomposição espacial e usa o algoritmo *marching cubes* para gerar uma aproximação grosseira da superfície. Neuenschwander [55] também apresenta um modelo inicial para o ajuste de superfícies através dos métodos de energia mínima. O modelo inicial é determinado a partir de pontos fixos da imagem, onde a localização e orientação exatas são conhecidas. Uma superfície inicial é calculada através desses pontos, usando, por exemplo, retalhos cúbicos de Bezier ou de B-*splines*.

Para ser menos dependente da inicialização, e dar uma estimativa inicial simples, Cohen e Cohen [18] introduziram o *modelo do balão*. Eles desenvolvem uma técnica a partir de elementos de bordas tridimensionais, extraídos de um conjunto de células cúbicas de intensidade e usando forças de inflação adicional que atuam na superfície do modelo inicial, fazendo com que ele infle, como se tivesse introduzido ar em seu interior e levando-o para os pontos da imagem, permitindo com isso maior flexibilidade na escolha do modelo inicial. Embora eles assumam que os modelos reconstruídos sejam suaves e homeomorfos à esfera, a idéia é relevante. É a primeira proposta de modelos deformáveis cuja forma inicial independe dos dados amostrados. A técnica foi aplicada em segmentação de imagens de ressonância magnéticas. Cohen e Cohen mostraram também que o problema de reconstrução pode ser ainda simplificado, como já observado por Chia e Medioni [16], se ele for visto como sucessivos problemas de reconstrução de *snakes* [17].

3.3.2 Deformação discreta

Baseados nas idéias de Cohen e Cohen [18], Chen e Medioni [15] apresentam um versão discreta do *modelo do balão* – conhecido como *modelo do balão inflável* – para um conjunto de imagens de profundidade previamente registradas [14]. O método não é baseado em formulações de minimização *global*, mas em forças de inflação que dirigem, com base em medidas *locais*, uma malha triangulada fechada para os pontos da imagem, pela sua subdivisão adaptativa. Vários problemas de instabilidade numérica e de convergência são melhorados, mas a falta da visão global da imagem dada pode levar a auto-interseções na superfície reconstruída.

No modelo do balão inflável a estimativa inicial é uma malha triangulada, representando uma superfície fechada, definida a partir dos vértices de um icosaedro. O modelo inicial é colocado no interior da imagem do objeto a ser reconstruído e o método faz um mapeamento direto dos vértices do modelo inicial aos dados da imagem registrada. A malha sofre a ação de uma força de inflação, uniforme em cada um dos seus vértices, que o desloca na direção normal à superfície do modelo até que este encontre um ponto da imagem (Figura 3.8). Neste caso, o vértice é chamado ancorado.

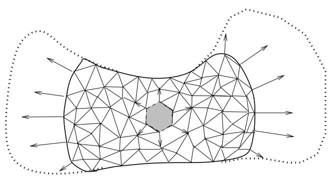


Figura 3.8: O modelo do balão inflável.

É interessante notar que à medida em que a malha se deforma, a direção do vetor normal dos seus vértices pode variar e, portanto, os potenciais pontos nos quais eles ancorariam. A busca por um provável ponto correspondente na direção normal $\vec{l}$ de um vértice P faz uso do método iterativo de Newton-Raphson [41] considerando a projeção do vértice, Q_i, sobre a imagem S na direção da vista como a estimativa inicial (Figura 3.9).

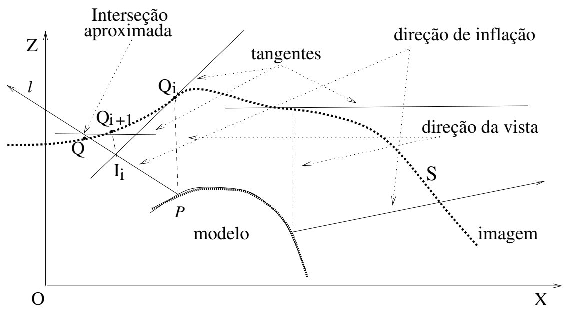


Figura 3.9: A correspondência dos pontos no modelo do balão inflável.

A interseção I_i, do plano tangente em Q_i e $\vec{l}$ é projetado novamente sobre S em Q_{i+1}. Se a distância entre I_i e Q_{i+1} for suficientemente pequena, Q_{i+1} é o ponto procurado. Caso contrário, substitui-se Q_i por Q_{i+1} e repete-se o processo.

O movimento de cada vértice é governado pelas equações clássicas do movimento de uma partícula

$$m_j \ddot{v}_j + r_j \dot{v}_j + \vec{g_j} = \vec{f_j}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{3.5}$$

onde m_j e r_j são a massa e o coeficente de amortecimento do j-ésimo elemento, respectivamente, v_j, $\dot{v}_j$ e $\ddot{v}_j$ denotam sua posição, velocidade e aceleração, respectivamente, $\vec{f_i}$ representa a soma das forças internas (a tensão entre os vértices adjacentes) e $\vec{g_i}$ representa a soma das forças externas (força de inflação). Em consideração ao desempenho, Chen e Medioni [15] simplificaram convenientemente esta expressão, considerando um sistema com inércia nula, o que é adequado ao processo de reconstrução, onde as forças envolvidas dependem apenas do modelo inicial dado e não dos dados de entrada, e todos os pontos dados são uniformemente considerados.

Durante o processo de inflação, os triângulos são subdivididos adaptativamente, criando novos vértices a partir de um ponto de vista físico imaginário, onde a rigidez da força de tensão entre os vértices adjacentes deve manter-se constante. Durante o processo de crescimento, os triângulos tornam-se naturalmente maiores em tamanho, e a força de tensão entre os vértices adjacentes cresce, agindo contra a força de inflação. Também, quando os vértices alcançam a superfície do objeto, a força de tensão em seus vizinhos adjacentes cresce e as subdivisões devem aliviar essas reações. Chen e Medioni transportam essa condição física do modelo para um parâmetro de tolerância geométrico, a área máxima permitida à face triangular. Quando um triângulo tem sua área maior do que seu limite, ele é bissecado em sua maior aresta. A partir do ponto de vista geométrico, a subdivisão de triângulos permite ao modelo se adaptar à geometria local da imagem dada sem afetar outras regiões do modelo.

A subdivisão de triângulos é realizada somente nos conjuntos maximamente conexos de faces com vértices não-ancorados, denominados *frentes de crescimento*. Isto permite que a malha triangular se adapte localmente à superfície do objeto mantendo a posição dos vértices ancorados.

.

Capítulo 4

Modelo do Fluxo Radial

Este capítulo descreve o *Modelo do Fluxo Radial*, um método de reconstrução iterativo que gera uma sequência de malhas convergentes para os dados, representados por uma imagem de profundidade não registrada, a partir de uma malha inicial, fechada e geometricamente simples. Esse método pode ser classificado como um método de deformação discreta, que incorpora as boas propriedades do *modelo do balão inflável* [15], tais como fechamento, precisão controlável, estabilidade e simplicidade. Além disso, ele emprega as características da triangulação adaptativa no domínio da imagem [69, 20], para, de uma forma robusta, monitorar as auto-interseções durante o processo de subdivisão da malha. Mais ainda, ele é capaz de detectar durante o processo de deformação da malha as necessárias cirurgias topológicas a serem feitas no modelo a partir das informações topológicas contidas na imagem.

4.1 Construção da sequência de malhas

O processo inicia com uma malha inicial $\mathcal{M}^0$, que deve ser coberta espacialmente pelos dados amostrados, e em cada estágio k de crescimento gera uma nova malha $\mathcal{M}^k$ a partir daquela gerada no estágio anterior $\mathcal{M}^{k-1}$, de tal forma que essa malha se situe entre a imagem de profundidade dada e a malha previamente reconstruída, obtendo uma sequência de malhas que se ajusta aos dados amostrados.

Essa sequência de malhas é gerada com a restrição de que todos os seus vértices possuam um ponto correspondente na imagem de profundidade dada, induzindo uma segmentação da imagem em regiões que correspondem univocamente às faces da malha em cada estágio de reconstrução. Uma face da malha $\mathcal{M}^k$ é considerada ancorada quando ficar suficientemente próxima dos pontos da região correspondente, desconsiderando o resto da subsequência de malhas que leva a face a todos os pontos da região associada. Quantitativamente, a noção de proximidade é expressa pelo parâmetro de tolerância para o erro de reconstrução, τ, que deve ser especificado pela aplicação *a priori*. Se uma face apresentar um erro maior que τ, ela é subdividida e deformada até satisfazer a condição de parada ou esgotar as possibilidades de subdivisão na direção de crescimento predeterminada. Neste caso, a topologia de $\mathcal{M}^k$ é reavaliada em relação à topologia inferida através dos pontos amostrados e, se necessário, novas direções de crescimento são determinadas. O processo é repetido enquanto o erro de reconstrução for maior que a tolerância dada, τ.

Considerando o não conhecimento *a priori* da topologia do objeto a ser reconstruído, identificamos quatro problemas relacionados a este procedimento simples e intuitivo:

1º) Como garantir a correspondência biunívoca entre os dados amostrados e toda a malha reconstruída, $\mathcal{M}^k$?

2º) Como determinar o erro de ajuste?

3º) Como subdividir as faces?

4º) Como detetar as cirurgias topológicas necessárias?

Sem perda de generalidade, consideramos neste trabalho que as imagens de profundidade estejam no formato *.txt* utilizado em MSU/WSU [78]. Este formato descreve uma imagem de profundidade como um conjunto de imagens cartesianas I_i, $n \times m$, $i = 0, 1, 2, 3$, onde I_0 é uma imagem binária que determina as entradas válidas, I_i, $i = 1, 2, 3$, contém as coordenadas x, y, z, respectivamente, de cada ponto amostrado.

4.1.1 Inicialização

Como o modelo inicial é alterado dinamicamente, de acordo com os pontos correspondentes aos seus vértices, qualquer malha fechada pode ser usada como a malha inicial

$\mathcal{M}^0$. Optamos pela estrutura de um decaedro inscrito em uma esfera de raio r^0 e centro c^0, determinados da seguinte forma:

Centro $c^0 = (x_0, y_0, z_0)$, cujas coordenadas são determinadas por

$$x_0 = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \quad y_0 = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}, \quad z_0 = 0,$$

onde x_{max} e y_{max}, x_{min} e y_{min} são os pontos máximos e mínimos das coordenadas x e y, respectivamente, dos pontos amostrados que não pertencem à borda da imagem de profundidade dada $\mathcal{R}$, e a coordenada z, que representa a altura do plano xy, é fixada em zero.

Raio $r^0 = \min \{\| p_i - c^0 \|, \forall p_i \in \mathcal{R}\}$, onde p_i representa as coordenadas cartesianas do i-ésimo ponto amostrado em $\mathcal{R}$.

Associamos cada um dos vértices v_i, $(i = 0, ..., 6)$ da malha inicial $\mathcal{M}^0$ da seguinte forma (Figura 4.1): O vértice v_0 ao centro c^0 e os cinco vértices adjacentes a v_0, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

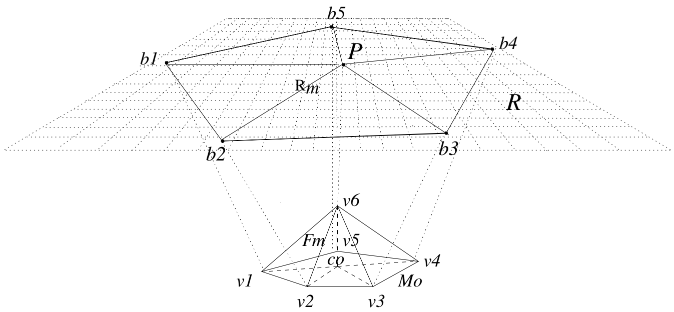


Figura 4.1: Correspondência inicial.

a cinco pontos distintos b_i na borda de $\mathcal{R}$ e o vértice v_6, a um ponto P interior a $\mathcal{R}$.

Esta associação estabelece o primeiro fluxo radial de crescimento, o qual permanecerá fixo até que o modelo atinja todos os pontos da imagem ou sejam esgotadas as possibilidades de crescimento.

As projeções de b_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sobre o plano xy são aproximadamente espaçados de 72^o e o ponto P é o ponto mais próximo de v_6 na direção de $\mathrm{c}^0 v_6$.

Observe que as conexões entre v_i induzem um grafo planar em $\mathcal{R}$, onde os pontos b_i e P definem os vértices (nós) e suas ligações definem as arestas (as ramificações) do grafo

(Figura 4.1). Estabelecendo, assim, uma correspondência biunívoca entre as faces em $\mathcal{M}^0$ e as regiões em $\mathcal{R}$.

Por clareza, vamos definir algumas notações que serão usadas ao longo do texto. O ângulo centrado em c^0, que cobre maximamente a imagem de profundidade, será chamado de ângulo sólido inicial e denotado por $\mathcal{S}^{0,1}$, onde o primeiro índice superescrito indica o estágio da reconstrução e o segundo, o elemento no conjunto de ângulos sólidos. Durante o processo de crescimento, em cada estágio de reconstrução k poderá surgir mais de um ângulo sólido, cada qual, referenciado por $S^{k,h}$, é associado a um conjunto A_h de faces do modelo $\mathcal{M}^k$. Para preservar a consistência da notação, será usado $C^{k,h}$ para denotar o centro do ângulo sólido $S^{k,h}$. Denotaremos por $L^{k,h}$ o comprimento máximo permitido à aresta dentro do ângulo sólido $\mathcal{S}^{k,h}$.

Considerando que os N pontos na imagem de profundidade $\mathcal{R}$ sejam enumerados de 0 até $N-1$, usaremos os índices i ou j para denotar um determinado ponto $p \in \mathcal{R}$. Considerando, também, que as regiões em $\mathcal{R}$, determinadas pelas faces F de $\mathcal{M}$, sejam enumeradas, usaremos o índice m para indicar uma determinada face e sua região correspondente $R_m \in \mathcal{R}$. Por exemplo, o vértice $v_i \in F_m$ tem como correspondente $p_i \in R_m$. O erro de reconstrução de um vértice v_i será denotado por ϵ_i e o erro de reconstrução de uma face F_m em relação a um ponto $p_j \in R_m$ por ϵ_{mj}.

4.1.2 Erro de reconstrução

Como já mencionamos, o erro de reconstrução ou erro de ajuste é uma medida quantitativa para denotar a precisão de reconstrução desejada. Em termos de sequência de malhas, ele corresponde ao resto da sequência que pode ser desprezada. Quanto menor for o valor do parâmetro de tolerância τ, melhor será a aproximação desta malha aos pontos amostrados, e dependendo das características geométricas dos pontos, maior será a sequência a ser considerada na nossa reconstrução para chegar à malha final. No limite, para $\tau = 0$, teremos, em geral, uma malha densa interpolando todos os pontos amostrados.

Definimos o erro de reconstrução de um vértice $v_i \in \mathcal{M}^k$, denotado por ϵ_i, como a distância entre o vértice v_i e o seu ponto correspondente na imagem e o erro de uma face $F_m \in \mathcal{M}^k$ em relação a um ponto $p_i \in R_m$, denotado por ϵ_{mi}, como a distância entre o plano que contém a face e o ponto $p_i \in R_m$. Quando $\epsilon_i < \tau$, v_i é marcado como *ancorado* (no seu correspondente) e quando o erro de reconstrução de F_m em relação a pelo menos uma percentagem de χ pontos amostrados em R_m for menor que τ e os vértices de F_m estiverem ancorados, dizemos que F_m está *ancorada* (na sua região correspondente).

O valor de χ é empírico. Ele deve ser escolhido de acordo com a natureza da imagem. Para imagens ruidosas, um valor pequeno de χ ajuda a filtrar os ruídos, eliminando variações grandes na curvatura do modelo reconstruído. Por outro lado, para imagens com baixo ruído, recomendamos o uso de um valor alto de χ para evitar perda de detalhes geométricos.

Para monitorar o ancoramento dos vértices e das faces do modelo, durante o processo de crescimento, calculamos em cada estágio o erro de reconstrução para cada um dos vértice e cada uma das face do modelo.

Ancoramento. Um vértice v_j está ancorado em seu correspondente p_j, quando a distância radial entre eles é menor do que a tolerância dada. Para determinar a distância radial, exploramos o fato de estarmos calculando a distância entre dois conjuntos de pontos discretos e finitos, fazendo a diferença entre as coordenadas esféricas ρ dos pontos envolvidos, ou seja, $\| \rho_{p_j} - \rho_{v_j} \| < \tau$.

Uma face está ancorada, na sua região associada, em um determinado ângulo sólido de crescimento $\mathcal{S}^{k,h}$, quando a distância radial dos pontos p_j, pertencentes ao ângulo sólido de procura, determinado pela face, contido na região correspondente, e o plano que contém a face é menor do que a tolerância dada (Figura 4.2). Para calcularmos a distância entre

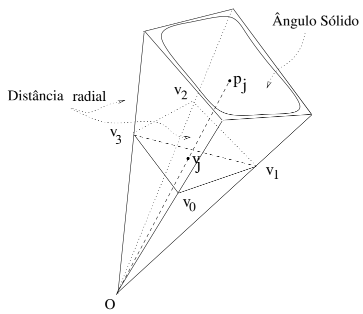


Figura 4.2: Ângulo sólido de procura do correspondente.

os pontos amostrados p_j na direção radial, consideramos que a distância radial determina o deslocamento necessário, do modelo, para que cada ponto p_j seja alcançado pela face associada. Para determinar o deslocamento, calculamos a distância entre o ponto p_j e o ponto onde o raio $\vec{p}_j$ corta o plano que contém a face, ou seja, $\| (1-t)p_j \| = \| p_j \| - \| t\, p_j \|$, onde $\| t\; p_j \|$ é um ponto do plano que contém a face. Se $\| (1-t)\, p_j \| < \tau$, para pelo menos $\chi\%$ dos pontos, a face é considerada ancorada. Observe que se $\| (1-t)\, p_j \| < 0$, o modelo ultrapassa o ponto da imagem p_j.

Quando todas as faces em um determinado ângulo sólido estão ancoradas, ou não tiverem mais pontos correspondentes na direção radial, consideramos o ângulo sólido ancorado e recalculamos o erro de reconstrução, de cada face do modelo, determinando a diferença de profundidade entre cada ponto p_j, pertencente à região associada a faces e os pontos de interseção da reta, l, que passa por p_j na direção da vista (eixo z), com o plano que contém a face, da seguinte forma:

Seja $n = (n_x, n_y, n_z)$ o vetor normal ao plano que contém a face F_m, $p_j = (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz}) \in R_m$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$ o ponto de interseção da reta l com o plano determinado pela face F_m, então a diferença de altura é igual a diferença entre as coordenada z, ou seja, $(p_{jz} - v_z)$, onde $v_z = \frac{<p_j^{'} p_j, n>}{n_z}$ e $p_j^{'} = (p_{jx}, p_{jy}, 0)$.

4.1.3 Subdivisão adaptativa

Em cada estágio k, as faces da malha $\mathcal{M}^k$ contidas no ângulo sólido $\mathcal{S}^{k,h}$ são subdivididas e seus vértices deslocados até que elas ancorem nas suas regiões correspondentes. O refinamento da malha será feito iterativamente, enquanto o comprimento das arestas da malha $\mathcal{M}^k$ for maior do que $L^{k,h}$, de forma a ter uma certa uniformidade na distribuição dos vértices na malha.

As faces são subdivididas de acordo com o número de novos vértices nas suas arestas, escolhendo a configuração que favoreça o crescimento no ângulo sólido, bissecando (Figura 4.3), trissecando (Figura 4.4) e tetrassecando (Figura 4.5), sendo 15 o número total de

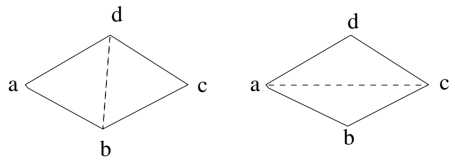


Figura 4.3: Configurações possíveis para bissecar uma face.

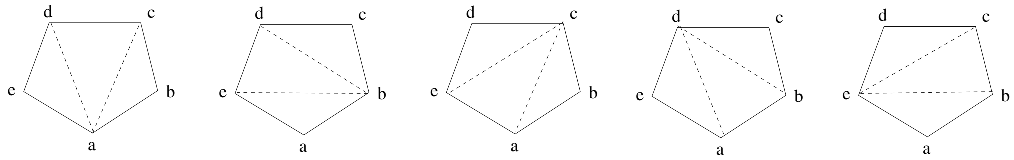


Figura 4.4: Configurações possíveis para trissecar uma face.

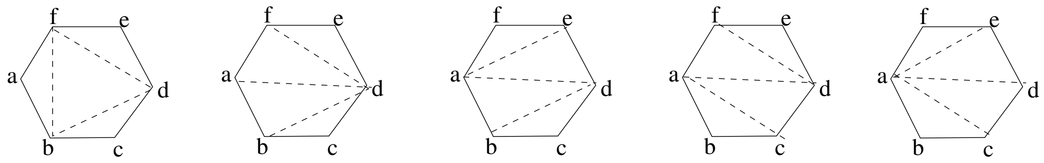


Figura 4.5: Tipos de configurações para tetrassecar uma face.

configurações possíveis para tetrassecar uma face.

Para garantir, porém, que a malha refinada esteja sempre entre a malha previamente reconstruída e a imagem de profundidade dada, subdivisões adicionais, em pontos interiores a face, podem ser necessárias (Figura 4.6).

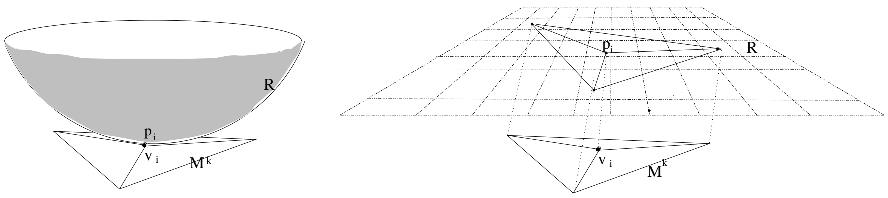


Figura 4.6: Ajustando a subdivisão.

Vale ressaltar que, para ajustar o modelo aos pequenos detalhes, o valor de $L^{k,h}$ deve ser recalculado dinamicamente para assegurar que sempre ocorra crescimento adaptativo em cada ângulo sólido de crescimento $S^{k,h}$ enquanto existir, na direção de crescimento corrente, pontos correspondentes para as faces não ancoradas.

O novo comprimento máximo, permitido a cada aresta pertencente à $S^{k,h}$, é determinado como o comprimento médio das n_a arestas das faces de $S^{k,h}$ ainda com erro

$$L^{k,h} = \frac{\sum \{\| v_i - v_j \|, \ \forall v_i \neq v_j \in \mathcal{S}^{k,h}\}}{n_a}. \tag{4.1}$$

4.1.4 Costuras topológicas

Quando se esgotam as possibilidades de crescimento numa direção, são determinados os conjuntos de faces não ancoradas maximamente conexas de $\mathcal{M}^k$, denotados por $\mathcal{A}_h$. Para cada conjunto $\mathcal{A}_h$ é , então, determinado um novo ângulo sólido de crescimento. Se existirem dois conjuntos, $\mathcal{A}_{h_a}$ e $\mathcal{A}_{h_b}$, cujas regiões correspondentes em $\mathcal{R}$ sejam adjacentes, então os conjuntos $\mathcal{A}_{h_a}$ e $\mathcal{A}_{h_b}$ devem ser unidos. Esta união é realizada através de uma cirurgia topológica. A cirurgia topológica pode ser realizada pela remoção das faces em cada um dos conjuntos $\mathcal{A}_{h_a}$ e $\mathcal{A}_{h_b}$ e pela conexão de suas bordas através de uma retriangulação entre elas. Esta retriangulação pode ser vista como uma soma conexa entre um tubo poligonalizado de gênero zero, cujas faces que serão removidas para a costura, contém o mesmo número de vértices das faces removidas na malha (Figura 4.7). Para realizar a cirurgia topológica

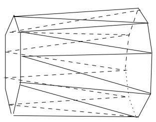


Figura 4.7: Conexão entre as bordas na cirugia topológica.

pode ser necessário um reajuste nas correspondências dos pontos envolvidos pertencentes à borda da imagem, assim como uma rerotulação das faces envolvidas.

Para cada conjunto resultante de uma cirurgia topológica, um novo ângulo sólido é determinado. O procedimento de união é repetido até extinguirem todos os pares de conjuntos com regiões correspondentes adjacentes em $\mathcal{R}$. O resultado final do procedimento consiste em vários conjuntos de faces não ancoradas que definem novos ângulos sólidos (Figura 4.8).

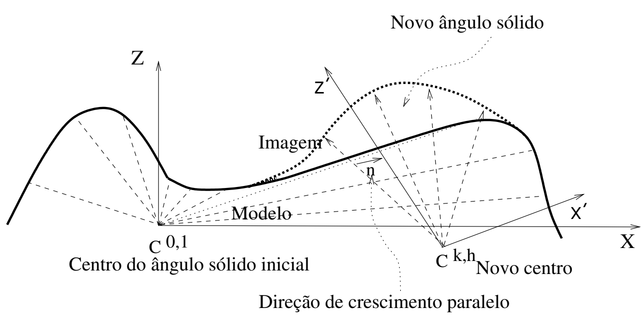


Figura 4.8: Determinação de um novo ângulo sólido.

4.1.5 Correspondência Biunívoca

O crescimento radial adotado em nosso modelo pode levar a associações ambíguas aos novos vértices determinados durante o ajuste. Chamamos de associação ambígua a correspondência estabelecida a dois vértices adjacentes do modelo a um ou dois pontos pertencentes a regiões não adjacentes na imagem. Para evitar essas situações foram usadas duas estruturas para as imagens dadas.

1. A estrutura da imagem cartesiana. Nesta estrutura é explorada a conectividade entre os pontos da imagem, ou seja, esta imagem é usada para estabelecer a correspondência entre os vértices pertencentes a uma vizinhança no modelo e seus correspondentes a uma vizinhança na imagem.
2. A estrutura da imagem esférica. Aqui é explorada a continuidade nas direções de crescimento, ou seja, todo ponto associado a um novo vértice deve pertencer ao ângulo sólido determinado pelas faces adjacentes a aresta subdividida.

Usando essas duas estruturas, determinamos com segurança, um ponto correspondente na imagem. O ponto escolhido deve, ainda, satisfazer as seguintes restrições:

- ser o ponto mais próximo do modelo, na direção de crescimento escolhida, quando se trata de pontos interiores da imagem;
- ser o ponto com direção de crescimento radial mais próxima daquela determinada pelo ponto candidato a novo vértice do modelo, quando se trata de pontos da borda da imagem.

A primeira estratégia evita que o modelo ultrapasse os pontos amostrados da imagem e a segunda garante que o modelo tente "fluir" para a borda da imagem. Vale ressaltar aqui que a segunda estratégia só se aplica para imagens de pontos simplesmente conexos.

Para evitar auto-interseções na malha reconstruída, em cada nova inserção de um vértice v_j em uma aresta, o ponto correspondente $p_j \in \mathcal{R}$ é procurado somente na região correspondente às duas faces adjacentes à aresta e para garantir a não ambiguidade na direção radial o ponto deve pertencer ao interior do ângulo sólido determinado pelas faces adjacentes (Figuras 4.2 e 4.9). E na inserção de um novo vértice no interior de uma face

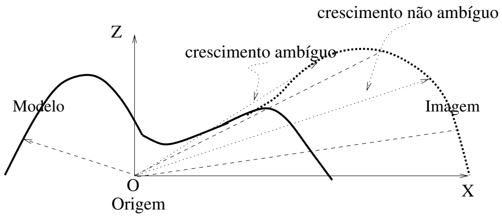


Figura 4.9: Direção ambígua de crescimento.

F_m, o ponto correspondente será buscado somente na região R_m petencente ao ângulo sólido gerado pela face.

Para evitar o aparecimento de faces distorcidas, quando as direções de crescimento radiais dos pontos interiores a uma face não são favorecidas, ou seja, essas direções tendem à direção paralela ao plano que contém a face, rotulamos a face como face paralela (Figura 4.8).

Faces paralelas. Em nosso modelo, para determinar o paralelismo de uma face, consideramos o vetor normal $\vec{n}$, do plano que contém o triângulo determinado pelos pontos da imagem correspondentes aos vértices da face e à direção de crescimento do centróide da face, $\vec{opm}$ e verificamos se

$$\frac{< \vec{opm}, \vec{n} >}{\| \vec{opm} \|} < 0.5,$$

ou seja, verificamos se o ângulo formado pelos dois vetores $\vec{opm}$ e $\vec{n}$ é maior do que 60°. Segundo Medione [15], quando os pontos estão dispostos em um ângulo de 45°, a associação é mais uniforme e o crescimento mais regular e nossos experimentos confirmam essa observação, ou seja, o crescimento radial não é favorecido em um ângulo maior do que 45° e as distorções nas faces da malha se acentuam à medida que o ângulo de crescimento se aproxima de 90°. Observamos que a escolha de 60° como ângulo máximo de crescimento radial permite a reconstrução de uma malha com o mínimo de distorções.

A face é marcada como paralela ou não paralela no momento de sua criação e não será subdividida durante o processamento nesse ângulo sólido de crescimento. Com exceção das faces de borda, onde a sua aresta de borda será subdividida, quando seus vértices ancorarem, permitindo, desta forma, um ajuste nas bordas com faces paralelas, sem causar subdivisões exessivas.

Ângulo sólido de crescimento. Estabelecer convenientemente a correspondência entre os vértices do modelo $\mathcal{M}^{k+1}$ e os pontos amostrados da imagem está intimamente relacionado com a determinação do ângulo sólido de cada frente de crescimento radial, ou seja, a determinação do centro e do eixo central de crescimento radial (Figura 4.8).

O centro $C^{k+1,h}$ da direção radial em cada conjunto $\mathcal{A}_h$ de $\mathcal{M}^{k+1}$, deve ser tal que o plano determinado pelo centro e normal ao eixo central de crescimento tenha a região $\mathcal{A}_h$ no seu lado positivo. A direção do eixo central de crescimento radial de cada frente de crescimento é determinada por $n_h = O_h - B_h$, onde B_h é o centróide do polígono planar descrito pelos vértices da borda de $\mathcal{A}_h$, que melhor se aproxima de $\mathcal{A}_h$ e O_h é um ponto da região da imagem associada a $\mathcal{A}_h$. A determinação do ponto O_h deve ser tal que favoreça o crescimento do modelo nas direções dos pontos preferenciais (pontos de descontinuidades de profundidade e pontos de máximos) e também dos pontos de borda contidos na região da imagem associada a $\mathcal{A}_h$. Este procedimento permite que todos os pontos que determinam as características geométricas do objeto amostrado, pertencentes ao ângulo sólido de crescimento $\mathcal{S}^{k+1,h}$ sejam alcançados pelo ângulo sólido de procura do ponto correspondente dos novos vértices do modelo (Figura 4.2).

O centro $C^{k+1,h}$ é determinado sobre a reta que passa por O_h e B_h, de tal forma que o ângulo sólido gerado pelos vértices da borda de $\mathcal{A}_h$ seja menor que $45°$. Para determinar o centróide das regiões planas usamos o procedimento descrito na Seção 2.9.3 e para determinar a melhor aproximação para o polígono planar, $\mathcal{P}_h$, descrito pelos vértices da borda de $\mathcal{A}_h$ usamos o algoritmo de *Newell* [63], descrito na Seção 2.9.4.

Crescimento inicial das novas frentes. Podemos pensar que as novas direções radiais de crescimento formam uma calota esférica, facilitando, dessa forma, as associações entre pontos do modelo e da imagem. Para simular esta situação, deve-se ter um conjunto de faces convexas formando a nova frente, e essa situação geralmente não ocorre, devido às diferentes velocidades de crescimento de cada vértice em cada iteração de crescimento. A velocidade de crescimento de cada vértice depende da tensão exercida pelos vértices adjacentes ancorados, determinado pela expressão

$$f_i = (1 - \frac{g}{\frac{\chi}{100}G}),$$

onde G é o número de vértices adjacentes e g é o número de vértices adjacentes ancorados.

Para não polarizar o crescimento nas novas frentes e simular uma calota esférica pelas novas direções radiais de crescimento, permitimos que todas as arestas de A_h, não pertencentes à borda, que possuam pontos correspondentes na imagem e tenham os vértices adjacentes ancorados ou comprimento superior ao limiar sejam subdivididas. As coordenadas dos vértices não ancorados são adaptados de forma a simular uma calota esférica e não ultrapassar a imagem no primeiro passo de crescimento do novo ângulo sólido. Para isso calculamos a menor distância entre os pontos amostrados, pertencente à região associada às faces adjacentes aos vértices não ancorados, e o novo centro de crescimento, ou seja, determinamos, para cada vértice v_i não ancorado,

$$d_i = \min \{\| \mathrm{p}_i - \mathrm{C}^{k+1,h} \|, \ \forall p_i\}, \tag{4.2}$$

onde p_i representa as coordenadas cartesianas do i-ésimo ponto amostrado pertencentes às regiões associadas as faces adjacentes ao vértice v_i e, então, a posição de cada um dos vértices v_i, não ancorado, é atualizada tomando a sua coordenada esférica $\rho = d_i$.

4.2 Um Algoritmo

Para simplificar várias operações de comparação e adaptação em cada passo do processo, mantemos as coordenadas cartesianas e esféricas em cada ponto de $\mathcal{R}$ e nos vértices de $\mathcal{M}^k$. O custo adicional é mais espaço de armazenamento e a conversão das representações, as quais envolvem funções trigonométricas simples.

Dadas as coordenadas cartesianas (x, y, z) de um ponto, calculamos suas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) a partir de

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
\phi &= \text{arc cos } (\frac{z}{r}), \\
\theta &= \begin{cases} \text{arc tg } (\frac{y}{x}), & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ \text{arc tg } (\frac{y}{x}) + \pi, & \text{se } x < 0 \text{ e } y \neq 0 \\ \text{arc tg } (\frac{y}{x}) + 2\pi, & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0 \\ 0, & \text{se } x = y = 0 \\ \pi & \text{se } x = 0 \text{ e } y = \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

As coordenadas cartesianas são obtidas das coordenadas esféricas por

$$x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi, \qquad z = r\cos\phi.$$

Uma vez determinandas as coordenadas esféricas para cada ponto amostrado de $\mathcal{R}$, construimos a sequência de malhas que se ajustam à imagem de profundidade dada, seguindo o fluxograma dado na Figura 4.10.

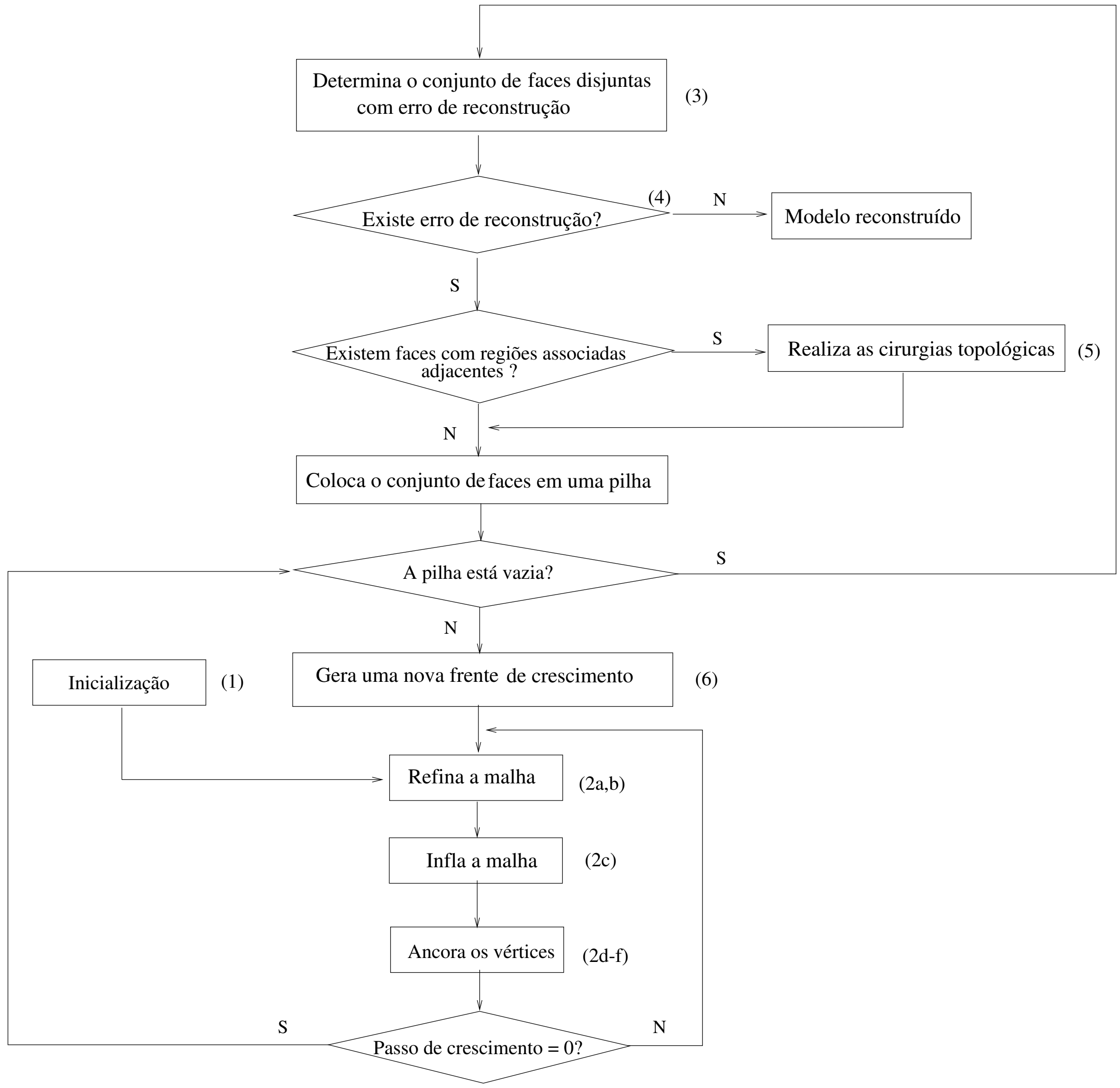


Figura 4.10: Fluxograma.

Apresentamos, a seguir, um algoritmo detalhado para o nosso método.

1. Inicialização.

   (a) Determinar o contorno de $\mathcal{R}$ e os pontos com descontinuidade de profundidade e de orientação (máximos e mínimos), utilizando um algoritmo de deteção de bordas (por exemplo, o algoritmo de Sobel (Seção 2.9.1)).

   (b) Construir uma malha inicial $\mathcal{M}^0$, como exposto na Seção 4.1.

   (c) Fixar o centro $\mathcal{C}^{0,1}$ das direções radiais como o centro da esfera que circunscreve $\mathcal{M}^0$ e o seu raio como o comprimento máximo permitido a cada aresta $L^{0,1}$ em $\mathcal{S}^{0,1}$.

   (d) Fixar as regiões R_m correspondentes às faces F_m da malha $\mathcal{M}^0$.

2. Para cada ângulo sólido $\mathcal{S}^{k,h}$.

   (a) Subdividir, em um vértice v_i, cada aresta $v_{i1}v_{i2}$ de $\mathcal{S}^{k,h}$, cujas faces adjacentes possuam regiões correspondentes em R e as seguintes condições forem satisfeitas:

      i. O seu comprimento é maior que $L^{k,h}$.

      ii. Possui pelo menos uma das faces adjacentes não ancoradas.

      iii. O vértice v_i possui um ponto correspondente p_i pertencente às regiões associadas as faces adjacentes. O ponto p_i é escolhido de acordo com a seguinte lista de prioridades.

         1. Ser um ponto de descontinuidade de profundidade.

         2. Ser um ponto de mínimo ou de máximo.

         3. Ser um ponto cuja direção de crescimento radial esteja mais próxima da direção determinada por $\mathbf{C}^{k,h}$ v_i. No caso da aresta $v_{i1}v_{i2}$ pertencer à borda da imagem o ponto p_i é procurado na projeção, no plano xy, dos pontos da borda associados a face que contém a aresta $v_{i1}v_{i2}$.

   (b) Subdividir as faces

      i. pelas arestas, segundo os critérios dados na Seção 4.1.3.

      ii. por um ponto interior, quando esta ultrapassar a imagem.

   (c) Determinar o passo de crescimento radial $t = \min\ \{\epsilon_m, \forall F_m \in \mathcal{S}^{k,h}\}$, onde F_m são faces não ancoradas e $\epsilon_m = \min\ \{\epsilon_{mi}\}$, ϵ_{mi} é o erro radial de F_m em relação a cada ponto p_i pertencente a região associada R_m.

(d) Para todo v_i em $\mathcal{S}^{k,h}$ que não está ancorado

i. Contar o número de vértices adjacentes, denotando por G, e o número de vértices ancorados, denotado por g.

ii. Atualizar sua coordenada ρ, onde $\rho_{v_i} = \rho_{v_i} + f_i s$ e $f_i = (1 - \frac{g}{\frac{\chi}{100}G})$.

iii. Se $\| \rho_{p_i} - \rho_{v_i} \| \leq \tau$, então o vértice v_i é marcado como ancorado.

iv. Atualizar as coordenadas cartesianas de v_i.

(e) Atualizar as coordenadas dos vértices ancorados com as coordenadas dos seus correspondentes em $\mathcal{R}$.

(f) Marcar como ancoradas as faces de $\mathcal{M}^k$ com erro de reconstrução $\epsilon_{mi} < \tau$ para pelo menos $\chi\%$ dos pontos amostrados pertencentes a região correspondente em $\mathcal{R}$ e com os seus vértices ancorados.

(g) Se existem vértices v_i de $\mathcal{M}^k$ não ancorados seguir para (2a).

(h) Se $t = 0$

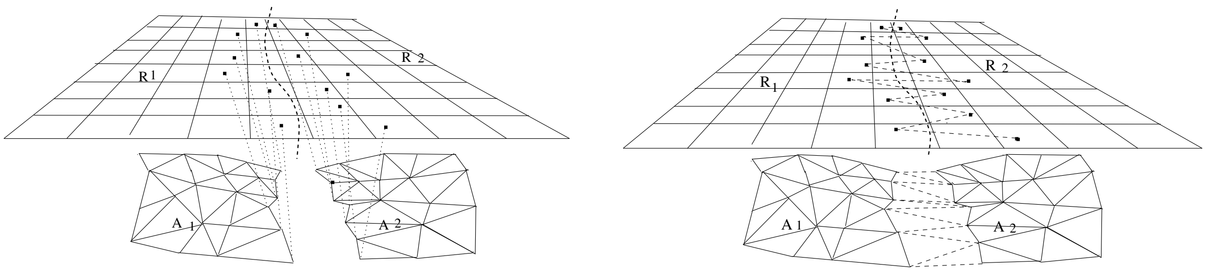
i. e não há erro radial, segue para (3).

ii. determinar o novo comprimento para $L^{k,h}$ e segue para (2a).

3. Agrupar as faces não ancoradas em conjuntos maximamente conexos.

4. Se o número de conjuntos maximamente conexos for zero, seguir para (8)

5. Unir cada par de conjuntos, cujas regiões correspondente em $\mathcal{R}$ são adjacentes, pela remoção de suas faces, seguida pela união de suas bordas com uma "ponte" triangulada, conforme explicado na Seção 4.3.3 (Figura 4.11).



(a) (b)

Figura 4.11: Cirurgia topológica do modelo 3D. (a) O Corte e (b) A "Costura".

6. Para cada conjunto $\mathcal{A}_h$ de faces não ancoradas.

(a) Encontrar a direção central n_h e a origem $C^{k+1,h}$ do novo ângulo sólido que o contém, como explicado na Seção 4.1.5.

(b) Para cada vértice não ancorado v_i.

i. Atualizar suas coordenadas esféricas θ e ϕ de acordo com a nova direção radial $\mathrm{C}^{k+1,h}\mathrm{p}_i$.

ii. Atualizar sua coordenada esférica ρ através da equação (4.2).

iii. Atualizar as coordenadas cartesianas de v_i.

(c) Determinar $L^{k+1,h}$ de acordo com a equação (4.1).

(d) Subdividir as arestas pertencentes ao interior $\mathcal{A}_h$ que possuam os vértices adjacentes ancorados ou comprimento maior que $L^{k+1,h}$.

(e) Atualizar a coordenada esférica ρ, de cada um dos novos vértices, através da equação (4.2).

7. Seguir para (2);

8. Fim.

4.3 Análise do algoritmo

Dedicamos esta seção à demonstração de alguns pontos importantes do nosso algoritmo relativos à convergência da malha, à precisão, e à topologia do objeto a ser reconstruído.

4.3.1 Convergência

Para cada ponto amostrado p_i é gerada uma sequência de distâncias d_i^k, do ponto a cada uma das malhas $\mathcal{M}^k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Essas sequências são monótonas e limitadas pela tolerância dada τ,

$$d_i^0 \geq d_i^1 \geq d_i^2 \cdots \geq d_i^k \geq d_i^{k+1} \cdots \geq d_i^n, \quad d_i^k \geq \tau, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Portanto, a sequência de malhas $\mathcal{M}^k$ converge para a superfície que interpola suavemente esses dados. Para mostrar que o modelo reconstruído é uma boa aproximação dos dados de profundidade, devemos mostrar que a distância de qualquer ponto de profundidade p_i para o modelo $\mathcal{M}^k$ é maior do que a referida distância para o modelo $\mathcal{M}^{k+1}$.

Como os pontos da borda de $\mathcal{R}$ são trabalhados de forma distinta da forma dos pontos internos de $\mathcal{R}$, a análise é dividida em duas partes.

Primeiramente, consideramos um ponto p_i interno a $\mathcal{R}$. Nessa construção, o refinamento ocorre somente em $\mathcal{S}^{k,h}$, $\forall h$, em cada estágio k. A malha $\mathcal{M}^k$ difere de $\mathcal{M}^{k+1}$ somente nas posições dos vértices $v_i \in \mathcal{S}^{k,h}$, $\forall h$. Em outras palavras, $d^{k+1} = d^k$, $\forall p_i$ fora de $\mathcal{S}^{k,h}$. Então, é suficiente mostrar que, para $p_i \in \mathcal{S}^{k,h}$, $\forall h$, $d^{k+1} \leq d^k$. Isto é equivalente a mostrar que as faces de $\mathcal{M}^{k+1} \cap \mathcal{S}^{k,h}$ estão entre os dados de profundidade e as faces de $\mathcal{M}^k \cap \mathcal{S}^{k,h}$.

Além disso, na nossa notação, a malha $\mathcal{M}^k$ refere-se, em cada estágio, a uma lista de malhas. A malha inicial de $\mathcal{M}^{k+1}$ corresponde à final de $\mathcal{M}^k$. E cada iteração J do estágio k a malha $\mathcal{M}_J^k$ difere daquela da iteração $J-1$, $\mathcal{M}_{J-1}^k$, na posição de seus vértices e no número de faces. Ou seja, em cada estágio k temos uma sequência de malhas

$$\mathcal{M}^k = \mathcal{M}_0^k \subset \mathcal{M}_1^k \subset \ldots \subset \mathcal{M}_J^k \subset \ldots \subset \mathcal{M}_{NJ}^k = \mathcal{M}^{k+1},$$

onde NJ é o número de iterações realizadas no referido estágio.

O vértice $v_i \in \mathcal{M}_J^k \cap \mathcal{S}^{k,h}$ move-se ao longo da direção $\mathbf{C}^{k,h}v_i$ até p_i. O tamanho do passo $\mathbf{s}$ é calculado em cada iteração J, de tal forma que $\rho_{v_i} \leq \rho_{p_i}$, $\forall p_i \in \mathcal{S}^{k,h}$ e a distância de qualquer $p_i \in \mathcal{S}^{k,h}$ para $\mathcal{M}_J^k$ seja maior ou igual a zero.

O procedimento de subdivisão somente troca o número de faces de $\mathcal{M}_J^k$, para cada k e J. Portanto, a geometria e a característica de Euler das malhas $\mathcal{M}_J^k$ são mantidas durante as iterações em cada estágio. Logo, se a malha inicial M^0 possuir a topologia adequada, o processo converge.

Proposição 4.1 *A malha inicial $\mathcal{M}^0$ é limitada pela imagem de profundidade dada $\mathcal{R}$.*

Prova: Isto segue imediatamente pelo fato de que, por construção, a malha inicial está inscrita em uma esfera, cujo centro c^0, está no interior da imagem dada e tem raio $r^0 = \min\{\| p_i - c^0 \|, \forall p_i \in \mathcal{R}\}$. $\triangle$

Proposição 4.2 *Sejam $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ os dados de profundidade amostrados em $\mathcal{S}^{k,h}$, $\mathcal{T}_J$ sua interpolação linear , e $\mathbf{s}$ o passo aplicado em cada vértice v_i em $\mathcal{T}_J$. Então a malha resultante, $\mathcal{T}_{J+1}$, é limitada por $\mathcal{T}_J$ e $\mathcal{B}$.*

Prova: Como cada vértice v_i é transladado ao longo da direção $\mathbf{C}^{k,h}v_i$ com um deslocamento $f_i\mathbf{s} \geq 0$, e como já foi colocado na seção 4.2, a distância de v_i, em cada iteração $J+1$, ao seu correspondente p_i é no máximo igual à sua distância na iteração J, então, $\mathcal{T}_{J+1}$ é limitado inferiormente por $\mathcal{T}_J$.

Por outro lado, como o deslocamento de cada vértice v_i e calculado por $f_i\mathbf{s}$, com $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i\,\mathbf{s} \leq \mathbf{s} = \min\ \{\parallel p_j - F_m \parallel,\ \forall p_j \text{ e } F_m\}$, onde p_j e F_m representam, respectivamente, um ponto amostrado em $\mathcal{B}$ e uma face em $\mathcal{T}_J$, isto significa que $\mathcal{T}_{J+1}$ não ultrapassa $\mathcal{B}$. Em outras palavras, $\mathcal{T}_{J+1}$ é limitado superiormente por $\mathcal{B}$. $\triangle$

Considerando agora os pontos na borda da imagem dada, $\partial\mathcal{R}$, devemos mostrar que o algoritmo de reconstrução garante que as arestas de $\mathcal{M}^{k+1}$ que correspondem à borda de $\mathcal{R}$ estão mais próximas de $\partial\mathcal{R}$ do que as arestas de $\mathcal{M}^k$. Como os dados de entrada são pontos (x, y, z), onde z representa as alturas acima do plano xy. Então é suficiente mostrar que a projeção ortográfica das arestas de $\mathcal{M}^{k+1}$ no plano xy está mais próxima da borda do que a projeção ortográfica das arestas de $\mathcal{M}^k$.

Analogamente aos pontos interiores, a demonstração ao comportamento das arestas de borda em duas malhas sucessivas pode ser restrito a , $\mathcal{M}^k$ e $\mathcal{M}^{k+1}$.

Proposição 4.3 *Sejam $\partial\mathcal{B}$ a borda da imagem de profundidade não registrada em $\mathcal{S}^{k,h}$, $\mathcal{C}_J$ sua interpolação linear, e* $\mathbf{s}$ *o tamanho do passo a ser aplicado em cada vértice em $\mathcal{C}_J$. Então a projeção ortográfica da malha resultante, $\mathcal{C}_{J+1}$, é limitada pela projeção ortográfica de $\mathcal{C}_J$ e pela projeção ortográfica de $\partial\mathcal{B}$.*

Prova: Por construção, cada vértice v_i move-se para p_i com um deslocamento dado por $f_i\mathbf{s} \geq 0$; assim como sua projeção ortográfica. Então a projeção ortogáfica de $\mathcal{C}_J$ é o limite inferior de $\mathcal{C}_{J+1}$. Como $\mathbf{s} \leq \min\ \{\text{distância}\ (P_i, \mathcal{C}_J),\ \forall p_i \in \mathcal{B}\}$, onde P_i representa a projeção ortográfica de $p_i \in \mathcal{B}$, então a projeção de $\mathcal{B}$ é um limite superior da projeção de $\mathcal{C}_{J+1}$. $\triangle$

4.3.2 Controle da precisão

A precisão da reconstrução depende de dois tipos de erro. Um deles é o erro dos dados de entrada, os quais dependem da tecnologia dos *scanners* usados para a obtenção das imagens de profundidade ou dos métodos *Shape from X*. O outro é o erro de reconstrução propriamente dito, o qual é controlável e reflete os desvios do modelo reconstruído a partir dos dados de profundidade. O primeiro tipo de erro é efetivamente resolvido através da utilização de pesos nas imagens de profundidade, e o segundo tipo deve ser controlado pelo monitoramento da distância entre os dados e o modelo reconstruído. Aqui a discussão está restrita à precisão de reconstrução.

A maioria dos algoritmos de reconstrução melhora a sua precisão minimizando a soma dos quadrados das distâncias dos dados ao modelo. Consequentemente, eles filtram as variações abruptas, produzindo formas suavizadas. Ao passo que, com base no mapeamento ponto a ponto, a abordagem adotada por Tanaka [69] permite qualquer nível de precisão local especificado, *Acc*, conforme descrito na Seção 3.1. Mostramos que *Acc* tem um papel similar ao nosso parâmetro de precisão τ (Figura 3.2).

Proposição 4.4 *Se* $\frac{L(R_i)}{L(D_i)} \to 1 \ \ \forall i$, *então a distância* d_i, *entre o ponto* p_i, *que bisseca* $\mathcal{C}_i$, *e o modelo tende a zero.*

Prova: De acordo com [69] o critério de precisão é dado pela razão entre o comprimento de arco de uma curva na superfície com curvatura local estimada e sua aproximação linear dada por $\frac{L(R_i)}{L(D_i)} = \frac{\frac{\pi}{m}}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{m})}$, onde m especifica a precisão. Seja v_i' o ponto do modelo mais próximo de p_i. A distância de p_i para o modelo reconstruído é dada por

$$d_i = p_i - v_i' = 1 - \cos(\frac{\pi}{m}).$$

Portanto, se $$\lim_{L(R_i) \to L(D_i)} \frac{L(R_i)}{L(D_i)} = \lim_{\frac{\pi}{m} \to \mathrm{sen}(\frac{\pi}{m})} \frac{\frac{\pi}{m}}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{m})} = \lim_{\frac{\pi}{m} \to 0} \frac{\frac{\pi}{m}}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{m})} = 1,$$

então $$\lim_{\frac{\pi}{m} \to 0} di = \lim_{\frac{\pi}{m} \to 0} (1 - \cos(\frac{\pi}{m})) = 0. \qquad \triangle$$

Vários trabalhos, com base em modelos deformáveis [72, 73, 67], reduzem o problema do cálculo do erro de ajuste a um problema de otimização, onde o erro de ajuste é minimizado. Embora não seja possível afirmar que o erro da malha reconstruída pelo método proposto seja mínimo, é possível controlar o percentual, χ de erro a partir da tolerância dada.

Proposição 4.5 *Existem no máximo* $(100-\chi)\%$ *de pontos amostrados em* $\mathcal{R}$ *com distância maior do que* τ *no nosso modelo reconstruído.*

Prova: Segue imediatamente do fato de que cada face da malha $\mathcal{M}^k$ é considerada ancorada somente se mais de $\chi\%$ dos pontos amostrados em sua região correspondente em $\mathcal{R}$ tem o erro de ajuste inferior a τ. $\triangle$

Portanto, o algoritmo garante o refinamento da malha enquanto o percentual de pontos amostrados, com erro inferior a τ, necessário para o ancoramanto das faces, não for atingido.

Proposição 4.6 *Sempre existirá uma subdivisão em* $\mathcal{S}^{k,h}$*, se existirem faces não ancoradas.*

Prova: Como $L^{k,h}$ é dado pela equação (4.1) e toda aresta em $\mathcal{S}^{k,h}$ cujo comprimento é maior do que $L^{k,h}$ é subdividido, a proposição segue imediatamante. $\triangle$

4.3.3 Consistência topológica

Para assegurar a consistência topológica entre os dados de profundidade e a malha reconstruída, e permitir o ajuste entre eles, duas situações devem ser evitadas:

- Auto-interseções; e
- Número incompatível de gêneros topológicos.

Mostraremos a seguir que o nosso algoritmo manuseia corretamente essas duas situações.

Proposição 4.7 *Não existem auto-interseções em* $\mathcal{M}^k$.

Prova: No algoritmo a planaridade do grafo induzido em $\mathcal{R}$ não é destruído quando um novo vértice ou uma nova aresta são inseridos. Isto porque o ponto amostrado, correspondente a um novo vértice a ser inserido em uma face da malha, é pesquisado na região correspondente à face, e um ponto correspondente a um novo vértice de uma aresta, é pesquisado na região correspondente às faces adjacentes à aresta. Considerando $\mathcal{R}$ como uma projeção ortográfica do modelo reconstruído, então nenhuma auto-interseção deve ocorrer no modelo (Figura 4.12). $\triangle$

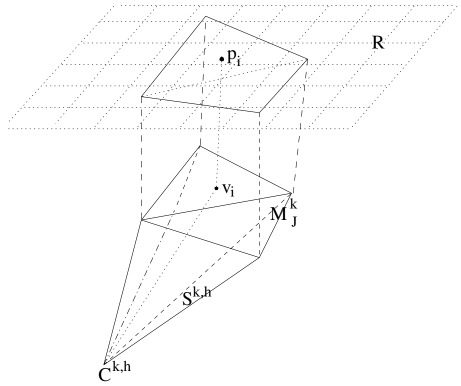


Figura 4.12: Região possível para correspondência.

A capacidade do nosso algoritmo em detectar a necessidade de uma mudança topológica, e em realizar as cirurgias topológicas na malha reconstruída, está baseada no fato de considerarmos a imagem $\mathcal{R}$ como uma versão discretizada da projeção da malha $\mathcal{M}$ na direção da vista. Mostraremos que, se considerarmos o modelo reconstruído como uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R}$ uma imagem de profundidade não ambigua (veja Observação 1 logo após a proposição seguinte), podemos mostrar que existe uma correspondência entre os pontos críticos, do objeto amostrado, estimados a partir da imagem de profundidade e os pontos críticos do modelo reconstruído.

Proposição 4.8 *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{R}$ uma superfície regular e sua imagem de profundidade, não ambigua, obtida na direção λ, respectivamente. Sejam p_M um ponto de $\mathcal{M}$ e p_R o seu correspondente em $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ com valores alturas contínuos em uma vizinhança de p_R onde $\mathcal{M}$ está definido. Sejam f_h e g_h funções altura de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. O ponto p_R é um ponto crítico de g_h se, e somente se, p_M é um ponto crítico de f_h.*

Prova: O Lema de Morse [52, 31] estabelece que cada ponto crítico p não degenerado da função altura f_h, em uma vizinhança adequada, pode ser localmente representado por uma função quadrática. Ou seja, em um sistema de coordenadas locais (u, v)[1] com origem em p podemos escrever f na vizinhança de (0,0) ($f(0,0) = p$) em uma das seguintes formas:

1. $f(u, v) = u^2 + v^2$ (mínimo local);
2. $f(u, v) = -u^2 - v^2$ (máximo local), ou

[1] $\vec{u}$ e $\vec{v}$ correspondem às direções das duas curvaturas principais em p.

3. $f(u,v) = u^2 - v^2$ ou $f(u,v) = v^2 - u^2$ (ponto de sela).

Sem perda de generalidade, consideremos que

- $\lambda = (\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w)$ seja definido em um sistema de coordenadas locais,
- λ está contido no plano definido por $\vec{w}$ e o vetor normal do plano de projeção, e
- o plano de projeção contém $\vec{w}$.

Neste caso, os pontos $(u,v,w) \in \mathcal{M}, w = f(u,v)$ terão as seguintes coordenadas na imagem $\mathcal{R}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u + \beta v \\ -\beta u + \alpha v \\ w \end{bmatrix},$$

onde $$\alpha = \frac{\lambda_u}{\sqrt{{\lambda_u}^2 + {\lambda_v}^2 + {\lambda_w}^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\lambda_v}{\sqrt{{\lambda_u}^2 + {\lambda_v}^2 + {\lambda_w}^2}}.$$

Os valores alturas expressos por $\alpha u + \beta v$ são contínuos sobre (u,v), onde $\mathcal{M}$ está definido.

Com isso, para cada uma das três formas listadas acima temos:

$f(u,v) = u^2 + v^2$ **(mínimo local):** ou seja, (u,v,u^2+v^2) são os pontos na vizinhança de p_M em $\mathcal{M}$. Estes pontos correspondem aos pontos $(\alpha u+\beta v, -\beta u+\alpha v, w)$ na direção da projeção λ. Assim, para cada ponto $(-\beta u + \alpha v, w) \in \mathcal{R}$, temos $w = v^2 + u^2$, com u^2 real não negativo; portanto, $w \geq v^2$. Isso equivale a dizer que, na vizinhança de r_R, $\mathcal{R}$ é, em termos de v e w, limitada inferiormente pela curva $w = v^2$ (mínimo local) e a profundidade de cada ponto, dada por $\alpha u + \beta v$, é contínua (Figura 4.13.a).

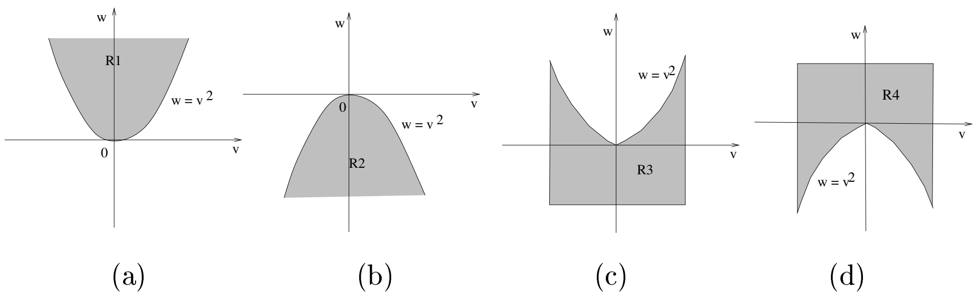


Figura 4.13: Projeções dos (a) mínimos; (b) máximos; (c) e (d) pontos de sela.

$f(u,v) = -u^2 - v^2$ **(máximo local):** ou seja, $(u, v, -u^2 - v^2)$ são os pontos na vizinhança de p_M em $\mathcal{M}$, que correspondem aos pontos $(\alpha u+\beta v, -\beta u+\alpha v, w)$ na direção da projeção λ. Análogo ao caso anterior, para cada ponto $(-\beta u + \alpha v, w) \in \mathcal{R}$, temos $w = -v^2 - u^2$, com u^2 real não positivo. Isso equivale a dizer que $w \leq v^2$, ou seja, $\mathcal{R}$ é limitada superiormente pela curva $w = -v^2$ na vizinhança de p_R em termos de v e w (máximo local). E $\mathcal{R}$ não tem descontinuidade de profundidade nesta vizinhança, uma vez que a profundidade é dada por $\alpha u + \beta v$ (Figura 4.13.b).

$f(u,v) = u^2 - v^2$ **ou** $f_h(u,v) = v^2 - u^2$ **(ponto de sela):** ou seja, $(u, v, -u^2 + v^2)$ ou $(u, v, +u^2 - v^2)$ são os pontos na vizinhança de p_M em $\mathcal{M}$. Olhando para a projeção de cada um desses casos, considerando, sem perda de generalidade, que a direção $\vec{u}$ seja a direção de curvatura principal positiva:

1. $(u, v, -u^2+v^2)$: Os pontos $(-\beta u+\alpha v, w) \in \mathcal{R}$ terão a forma $(-\beta u+\alpha v, v^2+k)$. Como $\vec{u}$ é a direção de curvatura positiva, k deve ser uma função real não positiva. Isso significa que $\mathcal{R}$ é limitada superiormente pela curva $w = v^2$ na vizinhança de p_R (ponto de sela) e a profundidade, $\alpha u+\beta v$, varia continuamente (Figura 4.13.c).
2. $(u, v, u^2 - v^2)$: Os pontos na vizinhança de P terão a forma $(-\beta u+\alpha v, -v^2+k)$ em $\mathcal{R}$, onde k deve ser uma função real não negativa, uma vez que $\vec{u}$ é a direção de curvatura principal positiva. Isso significa que $\mathcal{R}$ é limitada inferiormente pela curva $w = -v^2$ na vizinhança de p_R (ponto de sela) e não há descontinuidade na profundidade (Figura 4.13.d).

Observações:

1. Quando $\mathcal{R}$ não contém pontos p_i correspondentes a uma vizinhança de v_i em $\mathcal{M}$, tal que $\| p_i - v_i \| < \epsilon$, com $\epsilon > 0$, não é suficiente concluir a natureza topológica de v_i pela sua imagem. Os pontos $p1$ e $p2$ na Figura 4.14 exemplificam esta situação. Neste exemplo, os dois pontos pertencem a mais de uma borda de profundidade.

2. Vale ressaltar que, quando se trata de pontos de sela, a característica topológica da sua projeção pode ser aparentemente distinta, se a direção da projeção estiver no plano que contém curvaturas negativas destes pontos. Entretanto, isso não contradiz a Proposição 4.8, pois uma análise atenta na vizinhança das suas projeções nos leva a concluir que elas estão em mais de uma borda de profundidade, como ilustram os pontos $p1$ e $p2$ na Figura 4.15.

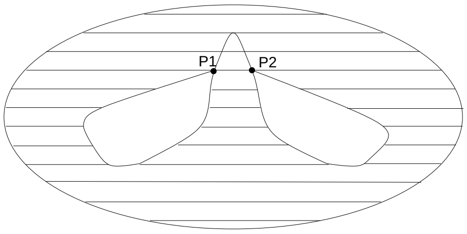


Figura 4.14: Pontos críticos ambíguos.

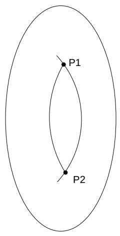


Figura 4.15: Pontos críticos na borda de profundidade.

Quando os valores alturas são descontínuos no domínio (u, v) onde $\mathcal{M}$ está definido, um ponto crítico de f_h não necessariamente corresponde a um ponto crítico de g_h. A solução dada para esta ambiguidade está em considerar que não existe descontinuidade nos valores alturas no domínio (u, v) de $\mathcal{M}$, embora se deva ter mais de um ponto crítico na direção de λ ou pontos críticos escondidos. Então, o número de pontos críticos em g_h não pode ultrapassar o número de pontos críticos em f_h, a partir disso temos o seguinte corolário:

Corolário 4.1 *O número de alças unidimensionais em $\mathcal{R}$ não pode ser superior ao número de alças bidimensionais em $\mathcal{M}$.*

Prova: Da teoria de Morse [52], temos que a topologia de um domínio é completamente determinado pelas mudanças que ocorrem em seus pontos críticos e, como o número de pontos críticos em $\mathcal{R}$ não pode ser superior ao número de pontos críticos em $\mathcal{M}$, temos o resultado. $\triangle$

Como uma consequência, as cirurgias topológicas no modelo reconstruído $\mathcal{M}^k$ serão necessárias sempre que o número de alças unidimensionais em $\mathcal{R}$ for superior ao número de alças bidimensionais de $\mathcal{M}$. Como a topologia de uma superfície é completamente determinada pelas mudanças que ocorrem nos seus pontos críticos, através da determinação dos pontos críticos na imagem de profundidade $\mathcal{R}$ podemos fazer uma boa estimativa da classe topológica do modelo a ser reconstruído, $\mathcal{M}$.

Corolário 4.2 *Seja $\mathcal{R}$ uma imagem de profundidade com valores alturas contínuos. Seja $\mathcal{M}$ uma malha formada por um componente conexo e $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}^k$ dois conjuntos distintos de faces não ancoradas maximamente conexos. Se na iteração J as regiões correspondentes de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ em $\mathcal{R}$ são adjacentes, então g_h possui um ponto crítico (ponto de sela) de junção na vizinhança dessas regiões.*

Prova: Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, respectivamente, as regiões correspondentes a $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ em $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são distintas, $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ também são distintas. Entretanto, como $\mathcal{M}^k$ é formada por um único componente conexo, existe um caminho em $\mathcal{R}$, mas não em $\mathcal{R}_1$, nem em $\mathcal{R}_2$, que conecta qualquer ponto amostrado na borda de $\mathcal{R}_1$ com um ponto da borda de $\mathcal{R}_2$. Então, quando $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ tornam-se adjacentes, devido a uma nova subdivisão em $\mathcal{A}_1$ ou em $\mathcal{A}_2$, devemos "colar" $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, removendo a porção da borda onde ocorre a adjacência. Neste caso, forma-se um caminho fechado em volta de um buraco em $\mathcal{R}$.

Em termos da função altura, isto implica necessariamente na existência de um ponto de sela em g_h, onde dois componentes são unidos, resultando um único componente. $\triangle$

Nas proposições seguintes mostraremos que para manter a consistência topológica entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{M}^k$, qualquer mudança topológica em $\mathcal{R}$ deve estar refletida em $\mathcal{M}^k$. Uma simples, mas eficiente cirurgia topológica, consiste em remover uma face a partir de $\mathcal{R}_1$ e outra a partir de $\mathcal{R}_2$ unindo suas bordas, realizando desta forma uma mudança topológica em $\mathcal{M}^k$.

Proposição 4.9 *A união de dois conjuntos de faces não ancoradas maximamente conexas incrementa o número de alças bidimensionais em uma unidade.*

Prova: A característica de Euler de uma variedade bidimensional (superfície) fechada, $\chi(\mathcal{S})$, é dada por [21, 49]

$$\chi(\mathcal{S}) = V - E + F = 2 - 2g(\mathcal{S}),$$

onde V, E, F e g representam o número de vértices, arestas, faces e gênero (alças bidimensionais), respectivamente. Adicionalmente, a característica de Euler da união de dois componentes conexos fechados, S, a partir de S_1 e S_2 pode ser obtida por [49]

$$\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{S}_1) + \chi(\mathcal{S}_2) - nf,$$

onde nf é o número de faces removidas em $\mathcal{S}_1$ e em $\mathcal{S}_2$.

Do ponto de vista topológico, a união de dois conjuntos, através de um tubo triangulado, é equivalente a unir $\mathcal{M}^k$ e uma esfera, removendo duas faces de cada componente, $nf = 4$. Então,

$$\chi(\mathcal{M}^{k+1}) \quad = \quad \chi(\mathcal{M}^k) + 2 - 4 = \chi(\mathcal{M}^k) - 2 = 2 - 2g(\mathcal{M}^k) - 2 = 2 - 2(g(\mathcal{M}^k) + 1).$$

Como $\chi(\mathcal{M}^{k+1}) = 2 - 2g(\mathcal{M}^{k+1})$, segue-se que, $g(\mathcal{M}^{k+1}) = g(\mathcal{M}^k) + 1$. $\triangle$

Proposição 4.10 *A cirurgia topológica preserva a orientação de $\mathcal{M}$.*

Prova: Na cirurgia topológica são unidos contornos de superfícies com mesma orientação, logo, os contornos unidos têm orientações opostas (Figura 4.16). A proposição segue imediatamente [49]. $\triangle$

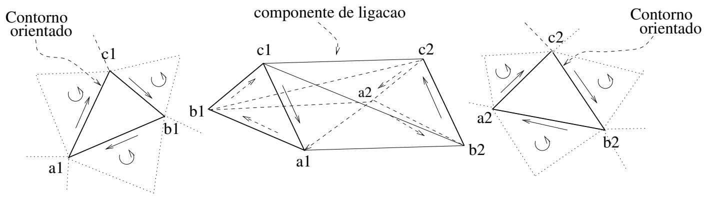


Figura 4.16: Contornos orientados.

Capítulo 5

Implementação e Resultados

Neste capítulo destacaremos alguns detalhes da implementação do algoritmo proposto, como também, algumas dificuldades encontradas na implementação. Mostraremos ainda alguns exemplos simples para ilustrar o desempenho do algoritmo implementado, além disso, mostraremos os detalhes do algoritmo que não foram tratados nesta implementação e, por fim, compararemos os resultados alcançados com os resultados dos trabalhos existentes.

Na reconstrução do modelo do fluxo radial, a partir de uma única imagem de profundidade representada por matrizes retangulares $m \times n$, usaremos um conjunto de imagens sintéticas e reais simples, com o intuito de observar o seu comportamento com relação a cada uma das características demonstradas na Seção 4.3 e implementadas.

5.1 Implementação

Implementamos o algoritmo em linguagem C na plataforma UNIX. Ele é executável em SUN-SPARC e PC (Linux). Quase todas as funcionalidades apresentadas na Seção 4.2 foram consideradas, exceto:

- aquelas relacionadas com o refinamento na borda do modelo (em nossa implementação são consideradas somente modelos com bordas topologicamente equivalentes a uma circunferência) e aquelas referentes ao ajuste, com subdivisão no interior das faces (Figura 4.6) que evitam o aparecimento de erros negativos (passo 2(b)ii do algoritmo apresentado na Seção 4.2).

- as funcionalidades da deteção do número de gêneros e a costura topológica (passo 5 do algoritmo).

Mesmo assim, conseguimos obter resultados que validam as principais idéias do nosso algoritmo.

Para visualizar os modelos reconstruídos usamos as funções da biblioteca gráfica Mesa [51], que é um clone *freeware* da interface gráfica OpenGl [54] e o pacote Geomview [28].

5.1.1 Estrutura de dados

Para representar e gerenciar o modelo do fluxo radial, usamos o **Módulo de Dados Topológicos** - TDM, desenvolvido por Wu [82, 81]. TDM é um esquema de representação por fronteira, adequado para representar objetos fechados no espaço Euclidiano tridimensional. As entidades topológicas, vértices, arestas, faces e sólidos, são organizadas hierarquicamente. Um objeto pode ser construído a partir de vértices, os quais são ligados por arestas, e uma sequência fechada de arestas forma uma face. Um conjunto de entidades maximamente conectadas determina um componente.

O conjunto de funções disponíveis permite ao usuário criar, manipular, e obter a topologia do objeto, sem o conhecimento profundo da estrutura de dados. As funções providas pelo TDM podem ser classificadas em:

- construtivas - adicionam novas entidades topológicas ao modelo;
- destrutivas - removem entidades topológicas dos modelos;
- de consultas - permitem consultar todas as informações topológicas do modelo;
- miscelâneas - permitem atribuir informações geométricas às entidades topológicas do modelo e outras.

O TDM provê mecanismos que permitem a atualização das características topológicas do modelo, mantendo a validade da representação, durante todo o processo.

No nosso caso, ele não somente assegura a consistência topológica (novos arranjos topológicos) em cada subdivisão, como também nos ajuda a obter informações sobre a topologia do modelo, tais como contornos orientados de conjunto de triângulos e a sua vizinhança. A estrutura de dados não possui, em si mesma, nenhuma noção da dimensão do espaço no qual o objeto está imerso. Os conceitos da forma do objeto estão em suas características geométricas, que são associadas pelo `TDM` a cada entidade topológica.

5.1.2 Determinação dos parâmetros

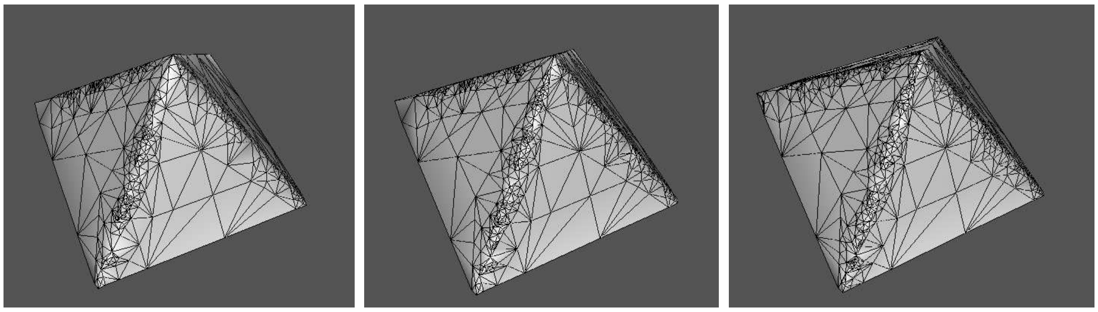
Na Seção 4.1 vimos que o algoritmo proposto requer a definição dos valores de 3(três) parâmetros:

- Um limiar para o comprimento das arestas do modelo a ser reconstruído, $\mathrm{L}^{k,h}$, que determina quando uma aresta pode subdividida;
- Um parâmetro de controle do erro χ, que determina um percentual de tolerância da precisão do modelo com relação aos dados amostrados;
- Um parâmetro de tolerância para o erro de reconstrução τ, que determina a precisão do modelo reconstruído.

Em nossa implementação deixamos somente o parâmetro de controle da precisão do erro, τ, para ser controlado pelo usuário.

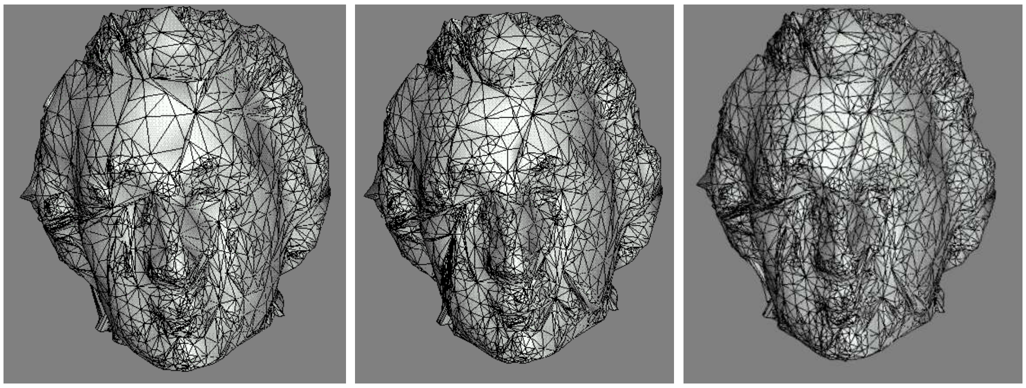
Usamos como limiar inicial para o comprimento da aresta no primeiro ângulo sólido de crescimento o raio r^0, que representa a menor distância entre os pontos da imagem ao centro (origem) do ângulo sólido inicial, ou seja, $L^{0,1} = r^0$. Esse mesmo valor é usado como o passo inicial de crescimento garantindo que o modelo não ultrapassará a imagem na primeira iteração de crescimento.

Em nossos experimentos, fixamos o parâmetro de controle do erro χ em 80%. Essa escolha foi feita empiricamente, a partir de observações. Notamos que em imagens pouco ruidosas, o efeito obtido com $\chi = 80\%$ ou um limiar próximo a 100% não foram significativos. Figuras 5.1(a, b e c), 5.2(a, b e c) ilustram o efeito da escolha de χ na reconstrução da malha 3D de uma pirâmide e da face de Chopin, usando $\chi = 60\%$, $\chi = 80\%$ $\chi = 95\%$, respectivamente.



(a) (b) (c)

Figura 5.1: Variação do parâmetro χ na reconstrução de uma pirâmide.



(a) (b) (c)

Figura 5.2: Variação do parâmetro χ na reconstrução da face de Chopin.

5.1.3 Principais dificuldades

O nosso modelo é baseado na teoria de espaços de funções contínuas. A conversão dessas idéias para o espaço discreto nos trouxe algumas dificuldades implementacionais. Ressaltaremos a seguir as dificuldades relacionadas com a correspondência biunívoca e a subdivisão adaptativa e suas soluções.

Correspondência biunívoca. Para superar as dificuldades no estabelecimento da correspondência biunívoca entre os vértices da malha e os pontos amostrados na imagem dada, como já mencionamos na Seção 4.1.5, destacamos aqui três ações:

1. Escolha do ponto correspondente;

2. Determinação do ponto mais próximo da direção radial;

3. Determinação do novo ângulo sólido de crescimento.

Para escolher um ponto p_j correspondente a um candidato a vértice v_j do modelo, verificamos se p_j pertencente à região associada as faces adjacentes à aresta a ser subdividida e ao ângulo sólido determinado por essas faces, considerando:

- o raio $\vec{p}_j$, determinado pelo ponto p_j a partir da origem do ângulo de crescimento radial;
- os planos P_i, $i = 1, 2$ que contêm as faces adjacentes F_i, respectivamente;
- o ponto de interseção, v_{pj}, do raio $\vec{p}_j$ com o plano P_i.

Se o ponto v_{pj} pertencer ao interior de uma da faces F_i, então o ponto p_j pertence ao ângulo sólido determinado pelas faces adjacentes a aresta a ser subdividida. Se o ângulo sólido de procura conter pontos preferenciais (pontos com descontinuidades de profundidade ou pontos mínimos), o ponto preferencial com menor ρ será considerado como o ponto p_j correspondente. Caso contrário, o ponto considerado será o ponto amostrado mais próximo da direção de crescimento radial determinada pelo vértice v_j (Figura 5.3). As coordenadas

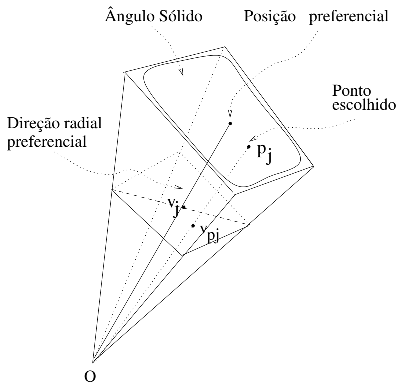


Figura 5.3: Ponto mais póximo da direção radial.

de v_j são subistituídas pelas coordenadas do ponto v_{pj}.

Para determinar o ponto mais próximo da direção radial dada pelo candidato a vértice do modelo, v_j, procuramos o seu correspondente p_j em uma vizinhança da direção radial determinada por ele. Essa vizinhança é formada por uma região conexa, de pontos da imagem, pertencente ao ângulo sólido determinado pelas faces adjacentes à aresta a ser subdividida. Para fixar a direção radial em cada ponto usamos os valores de ϕ e θ de suas coordenadas esféricas. Para determinar se um ponto p_j é o ponto mais próximo da direção radial dada pelo vértice v_j, determinamos a posição preferencial do ponto correspondente, como sendo a posição (ρ, θ, ϕ), onde ϕ e θ são dadas por v_j e ρ é dada pelo ponto p_j a ser testado. O ponto p_j escolhido será aquele cuja distância a posição preferencial é mínima.

Para determinar um novo ângulo sólido de crescimento radial, conforme explicado na Seção 4.1.5, devemos determinar um novo eixo central de crescimento e um novo centro de crescimento a partir das faces que geram os novos ângulos sólidos de crescimento, que são faces com erro maior do que a tolerância dada τ, remanescentes do ângulo sólido de crescimento radial anterior.

A escolha natural para a nova direção de crescimento da frente seria na direção perpendicular ao conjunto de faces de $\mathcal{A}_h$. Mas essa escolha pode nos levar a direções onde não existam pontos na imagem, dificultando, com isso, as novas associações. Procuramos, então, orientar o novo eixo de forma a garantir que tenhamos um ângulo sólido de $45°$ em torno do eixo que contém todos os pontos associados ao modelo. Denotamos por $n_h = O_h - B_h$, a direção do eixo central, onde B_h é o centróide do polígono planar que melhor se aproxima de $\mathcal{A}_h$ e O_h é um ponto da região na imagem associada a $\mathcal{A}_h$, que será denotada por U_h. Distinguimos três situações na determinação do ponto O_h.

1. $\mathcal{A}_h$ não contém pontos de descontinuidades. Neste caso, O_h é o ponto de U_h cuja projeção, no plano $z = 0$, está mais próxima do centróide da região plana determinada pela projeção dos pontos correspondentes aos vértices de $\mathcal{A}_h$, contidos em U_h, em $z = 0$.

2. $\mathcal{A}_h$ contém pontos de descontinuidades. Aqui o centróide O_h é determinado considerando uma subregião contida em U_h circundada por pontos de descontinuidade, onde O_h é o ponto de U_h cuja projeção, no plano $z = 0$, está mais próxima do centróide da região plana determinada pela projeção dos pontos de descontinuidades, contidos em U_h, em $z = 0$. Se o ponto O_h é um ponto de descontinuidade, então o ponto B_h do modelo será recalculado de forma a pertencer a face associada a região da imagem que contém O_h, da seguinte forma:

   - Determinamos as coordenadas baricêntricas de O_h, considerando a região triangular determinada pelos pontos da imagem correspondentes aos vértices da face associada;

- Determinamos, então, o ponto B_h como sendo o ponto que pertence à face associada e que possui as mesmas coordenadas baricêntricas de O_h.

3. $\mathcal{A}_h$ contém pontos da borda do modelo. Aqui o ponto O_h será considerado como o centro do ângulo sólido inicial $S^{0,1}$, isto é, $O_h = 0$. Esta escolha se deve ao fato que, em nosso trabalho, estamos considerando apenas os casos onde a borda da imagem é homeomorfa a uma circunferência e os pontos de borda do modelo devem ser associados aos pontos de borda da imagem. Portanto, a direção preferencial dos vértices para alcançar esses pontos é a direção paralela ao eixo $z = 0$.

O novo centro do ângulo sólido de crescimento deve ser determinado a partir de um ponto central do conjunto de faces que determinam a nova frente de crescimento, $\mathcal{A}_h$, de tal forma que um ângulo de aproximadamente $45°$ em torno do eixo central de crescimento atinja toda a a região da imagem associada a $\mathcal{A}_h$.

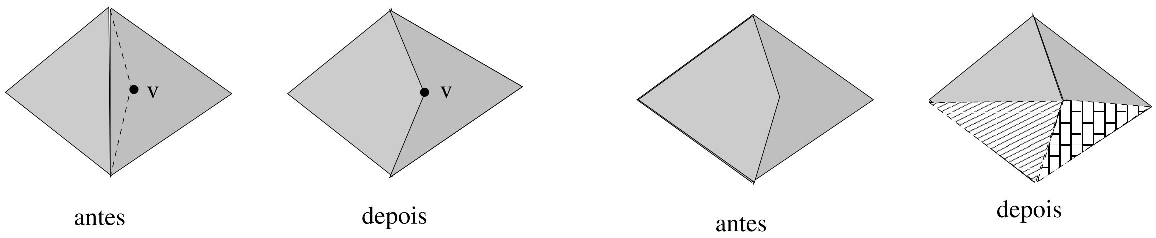
Para escolher o novo centro determinamos um ponto p_0 sobre a reta na direção do eixo central de crescimento de tal forma que o conjunto $\mathcal{A}_h$ esteja situado em apenas um dos lados do plano determinado pelo ponto p_0 e normal ao eixo de crescimento. Na determinação do ponto p_0 rotacionamos os vértices da borda do conjunto de faces $\mathcal{A}_h$ e os pontos da imagem associada, de forma que o eixo central de crescimento tenha a direção $z = (0,0,1)$. Calculamos, então, o centróide, (x_m, y_m, z_{min}), da projeção dos vértices da borda rotacionados em um plano $z = z_{min}$, onde $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$ é o ponto cuja coordenada z é mínima entre os pontos $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ da borda de $\mathcal{A}_h$. A nova origem será dada por $p_0 = (x_m, y_m, z_0)$, onde z_0 será determinado considerando que o vetor $(x_{min} - x_m, y_{min} - y_m, z_{min} - z_0)$ deve formar um ângulo de $45°$ com o eixo z, ou seja,

$$z_o = z_{min} - \sqrt{(x_{min} - x_m)^2 + (y_{min} - y_m)^2}.$$

Subdivisão adaptativa. Cada face F_m do modelo é associada a uma região R_m da imagem, no momento de sua criação. Essa associação é feita pela correspondência biunívoca entre as faces de $\mathcal{M}^0$ e as regiões em $\mathcal{R}$, conforme explicado na Seção 4.1.1. Para determinar os pontos da imagem associados a uma face usamos o algoritmo que determina se um ponto pertence ao interior de um polígono, descrito na Seção 2.9.2, considerando a região poligonal determinada pelos pontos correspondentes aos vértices da face.

Quando uma subdivisão é realizada, o rótulo da região associada às faces envolvidas na subdivisão deve ser atualizado, considerando os rótulos das novas faces. Exemplificaremos a seguir a rerotulação quando uma face é bissecada.

1. O rótulo de cada uma das faces adjacentes à aresta subdividida é adaptado de acordo com a posição do novo vértice **v** (Figura 5.4(a)).
2. Após a subdivisão das faces os rótulos são atualizados de acordo com os rótulos das novas faces (Figura 5.4(b)).



(a) (b)

Figura 5.4: Atualização dos rótulos das regiões associadas as faces.

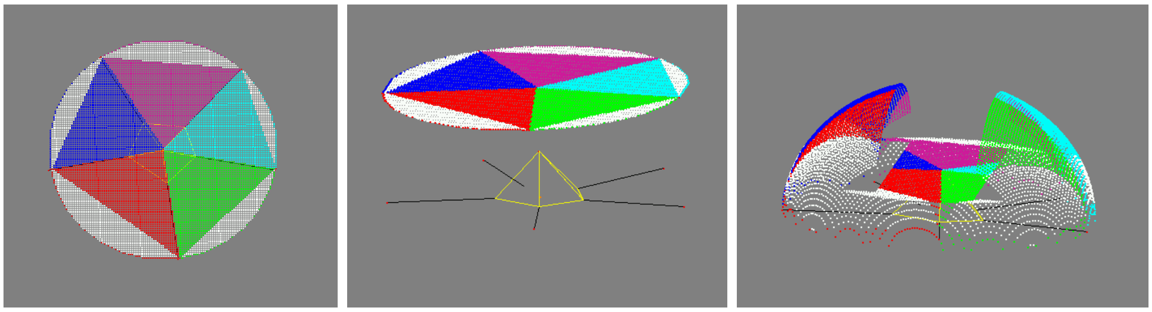
Quando se trata de faces de borda, de imagens de objetos com gênero diferente de 0, a subdivisão pode levar a rotulação de pontos da imagem ainda não alcançados pelo ângulo sólido inicial, como já mencionamos, esta parte não é contemplada na nossa implementação.

5.2 Exemplos

Nesta seção são apresentados alguns resultados de reconstrução com a finalidade de testar o comportamento do nosso algoritmo quanto as propriedades destacadas na Seção 4.3.

5.2.1 Convergência

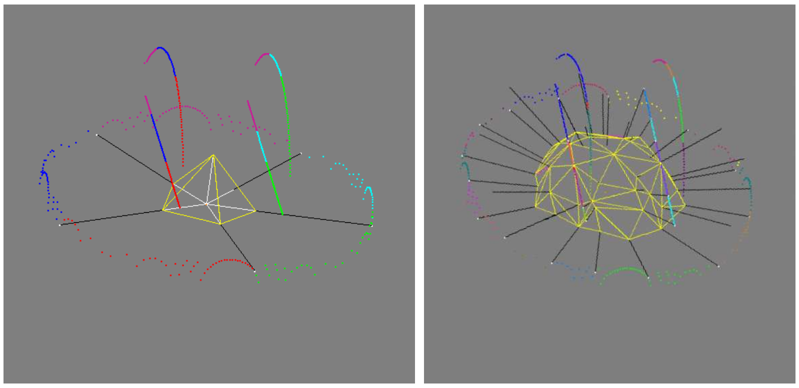
Figura 5.5 mostra a malha inicial dada, definida pela estrutura de um decaedro, fixada no centro das direções radiais do primeiro ângulo sólido. As direções radiais estão representadas pelas retas que aparecem na Figura 5.5(b), cujo comprimento de cada uma delas representa a distância do vértice ao seu ponto correspondente. As Figuras 5.5(a) e (b) mostram a imagem dada projetada em um plano $z = k$ e a Figura 5.5(c) na posição espacial dos pontos amostrados. A triangulação vista na imagem é a triangulação induzida pelas faces do modelo, marcando as regiões correspondentes a cada uma delas.



(a) (b) (c)

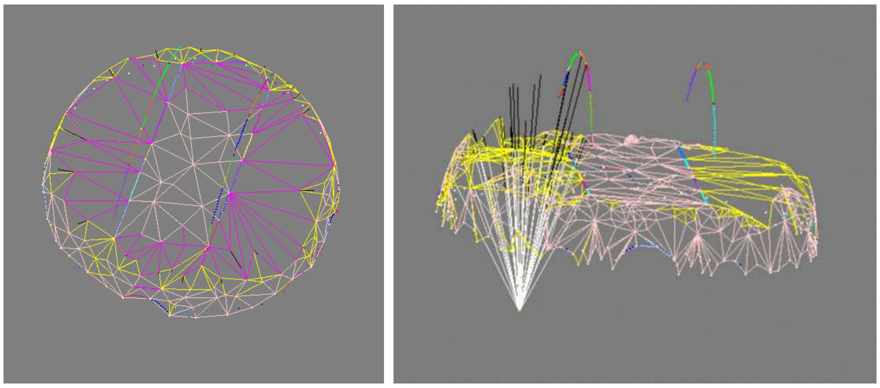
Figura 5.5: A malha inicial

Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram uma sequência de malhas convergentes para a imagem dada, a partir da malha inicial, geradas pelo algoritmo proposto (destacando os pontos com descontinuidade de profundidade e a borda da imagem). Podemos observar que a malha gerada em um determinado estágio intermediário, entre a malha inicial e o modelo reconstruído (Figuras 5.6(a) - 5.8(h)), está sempre entre a malha do estágio anterior e os dados (Figura 5.5(c)), como mostramos na Seção 4.3.1. Podemos observar,

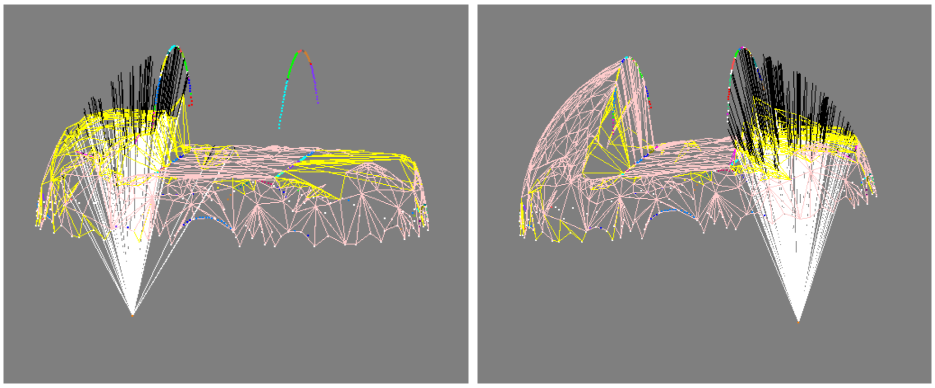


(a) (b)

Figura 5.6: Crescimento inicial.

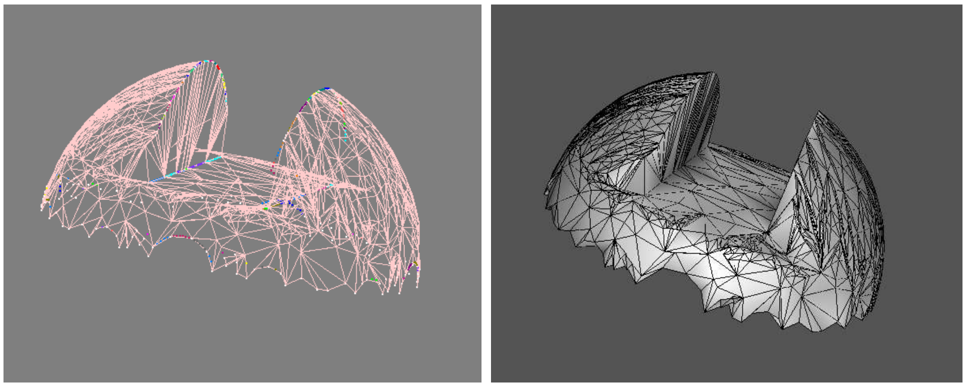


(c) (d)



(e) (f)

Figura 5.7: Novas frentes de crescimento.



(g) (h)

Figura 5.8: Malha final.

também, que durante o crescimento, surgiram regiões com faces paralelas (Figura 5.7(c)), e novos ângulos sólidos foram necessários para o ajuste da malha aos dados (Figura 5.7 (d)-(f)). Outra característica interessante do nosso método construtivo, que procura se aproximar adaptativamente dos pontos amostrados, é a garantia da reconstrução de uma malha 3D fechada, mesmo que a imagem dada apresente bordas de profundidade. As Figuras 5.8(g)-(h) mostram a malha reconstruída e uma imagem da malha renderizada por Geomview [28], respectivamente. Observe que as bordas de descontinuidade foram naturalmente interpoladas no processo de crescimento.

Para gerar essas malhas usamos uma imagem sintética (128×128) com 16684 pontos, uma tolerância absoluta de $\tau = 1.0$, que equivale a uma tolerância de 0.016 nos dados normalizados. O processo realizou 5 estágios de crescimento, com um total de 346 iterações, e construiu um modelo com 2840 faces e 1422 vértices.

5.2.2 Controle de precisão

O nosso algoritmo gera malhas com densidades diferentes, conforme a geometria intrínseca do objeto amostrado e do parâmetro de precisão dado, τ. Para ilustrar o efeito causado na malha, com a variação do parâmetro τ, dependendo da geometria do objeto, mostraremos três exemplos de imagens sintéticas (128×128). A primeira, de um objeto com curvatura variável, a segunda com curvatura constante não nula e a terceira com curvatura nula, tomando os seguintes valores para o parâmetro $\tau = 0.25$ e $\tau = 2.5$.

Figura 5.9 mostra a reconstrução de uma pirâmide, imagem de profundidade com 16128 pontos, onde a malha apresenta uma densidade maior no ápice e nas quatro quinas (regiões de maior curvatura). Podemos observar que com o aumento do parâmetro de tolerância τ as quinas foram suavizadas.

Um exemplo típico que ilustra a correlação entre a densidade da malha e a curvatura da superfície e o τ é a reconstrução de uma semi-esfera (superfície com curvatura constante não nula), cuja imagem de profundidade contém 12303 pontos. Figura 5.10 apresenta as malhas reconstruídas, onde podemos notar que a densidade da malha diminui com o aumento do valor de τ.

Figura 5.11 ilustra a reconstrução de uma rampa (superfície com curvatura constante

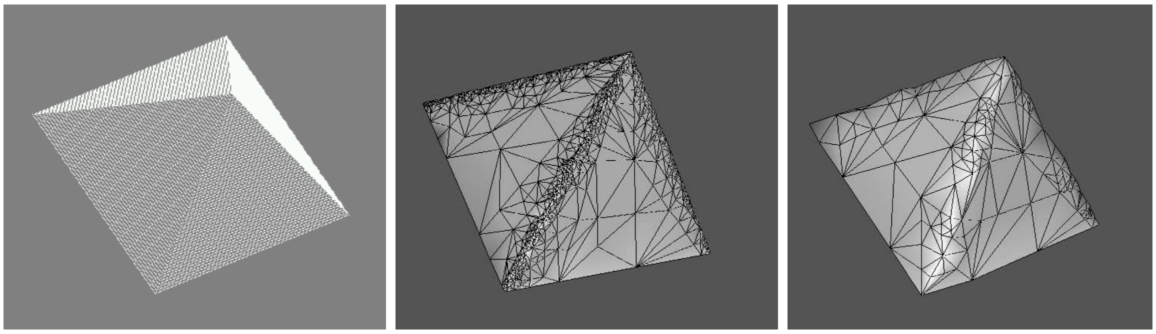


Figura 5.9: Suavização das quinas determinada pela tolerância de erro.

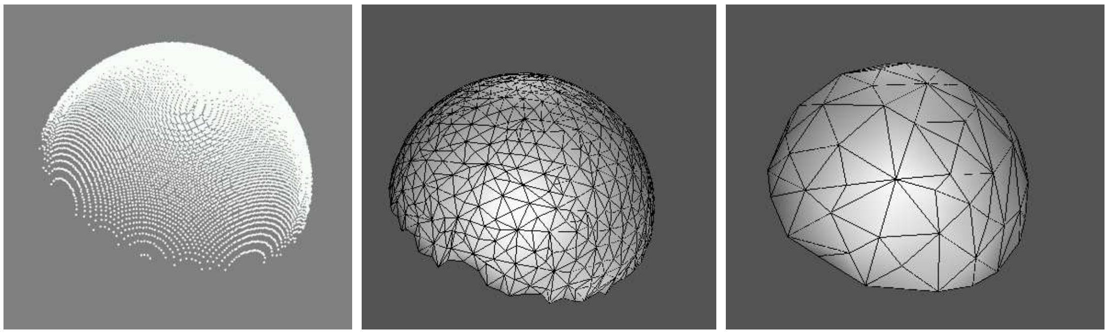


Figura 5.10: Reconstrução de semi-esfera com a variação da tolerância de erro.

e igual a zero em todos os seus pontos), cuja imagem de profundidade contém 16336 pontos. Notamos, como esperado, que a densidade da malha não alterou muito com a variação do parâmtero τ. Observa-se, entretanto, que nas regiões fora do ângulo de $45°$ as faces se tornam menos uniformes. Esse comportamento é devido aos pontos correspondentes estarem mais distantes do eixo central de reconstrução, onde vértices com direções radiais igualmente espaçadas podem ser associados a pontos na imagem em posições com diferentes espaçamentos, gerando faces finas e compridas. Mas essas possíveis deformações podem ser corrigidas, com um pós-processamento, onde as faces coplanares adjacentes são reagrupadas e retrianguladas de forma conveniente.

5.2.3 Subdivisão adaptativa

É interessante observar que, na reconstrução do objeto com curvatura nula, mesmo pequena, ainda há uma variação na densidade da malha com a diminuição de τ. Isso se deve ao nosso método construtivo, no qual as arestas que ultrapassam do limiar $L^{k,h}$ são sempre

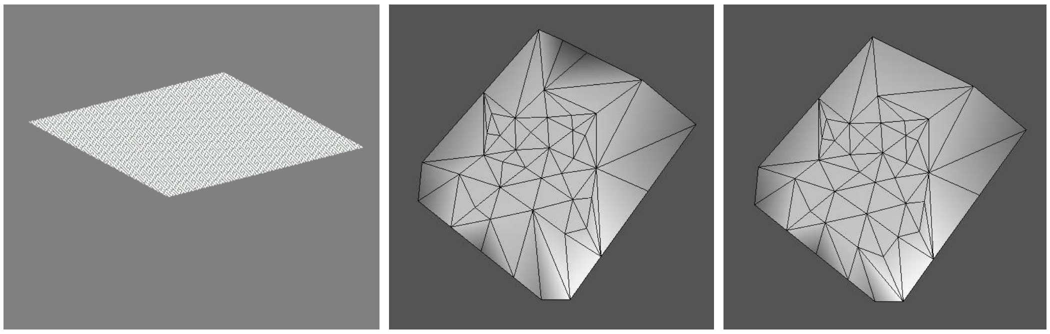


Figura 5.11: Reconstrução da rampa com a variação da tolerância de erro.

subdivididas em cada passo de crescimento, não considerando a geometria do objeto. Para valores muito pequenos de τ, o deslocamento dos vértices aos seus correspondentes é mais lento, pois ele é função da menor distância do modelo à imagem, conforme explicado na Seção 4.2, aumentando o número de passos e, consequentemente, o número de subdivisões.

Vimos na Seções 4.1.3 e 4.1.5 que o ajuste de uma malha se dá basicamente de duas formas:

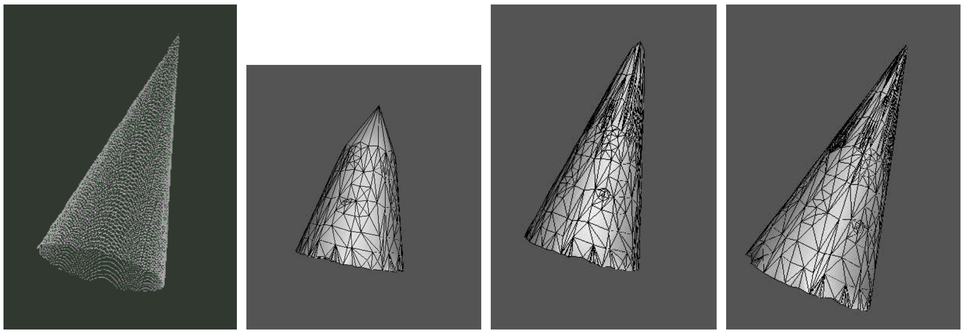
- Pelo refinamento da malha dentro do mesmo ângulo sólido, de acordo com o comprimento máximo permitido a uma aresta, $L^{k,h}$;

E quando esta possibilidade for esgotada,

- pela definição de uma nova frente de crescimento com um novo ângulo sólido.

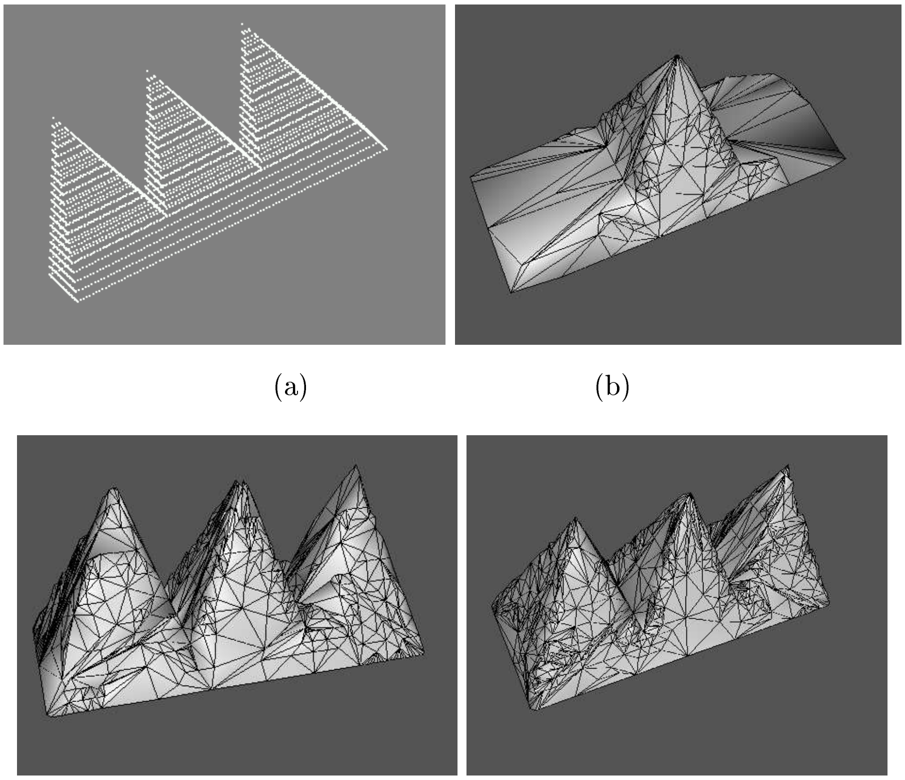
O refinamento é ilustrado, primeiramente, com o crescimento dos vértices do cone na direção do ápice, a partir de uma imagem de profundidade sintética 128×128 com 12303 pontos. Figura 5.12 mostra a imagem de profundidade e três etapas da reconstrução com τ=1.0. Na primeira etapa de crescimento, devido a tensão dos vértices ancorados, foi possível chegar à malha apresentada na Figura 5.12(b). No novo ângulo sólido de crescimento, um novo comprimento máximo para as arestas é determinado possibilitando novas subdivisões (Figura 5.12(c)) e assim, sucessivamente, o modelo alcança o ápice (Figura 5.12(d)).

Figura 5.13 exemplifica a segunda situação, mostrando a reconstrução de três pirâmides através de uma imagem sintética 100×40 com 4000 pontos (Figura 5.13(a)). Neste caso, durante o processo de crescimento, surgiram regiões com faces cujo ângulo sólido de procura



(a) (b) (c) (d)

Figura 5.12: Subidivisões adaptativas.



(c) (d)

Figura 5.13: Faces paralelas e os novos ângulos sólidos.

não ancança todos os pontos amostrados associados a elas, gerando faces paralelas (Figura 5.13(b)). Podemos ver que para cada conjunto, maximamente conexo, de faces com erro, foi criado um novo ângulo sólido de crescimento que favoreceu o ajuste do modelo aos pontos amostrados (Figura 5.13(c e d)).

5.3 Imagens reais

Para testar nosso algoritmo com objetos complexos, reconstruimos a imagem real de uma conexão e dos bustos de Chopin e de Mozart. As imagens foram obtidas na base de dados de imagens de profundidade MSU/WSU [78]. Em todos os casos, experimentamos a capacidade de nosso algoritmo para a reconstrução de objetos com "formas diferentes de uma estrela". Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 mostram as imagens de profundidade, a malha

Figura 5.14: A imagem de profundidade e o modelo 3D da conexão.

reconstruída e o modelo 3D. Podemos observar que os pequenos detalhes geométricos do objeto amostrado foram capturados pelo nosso modelo. Vale ressaltar que os itens do algoritmos que não foram convenientemente implementados causaram problemas na malha reconstruída com a degeneração de algumas faces. Uma análise desses problemas será feita na próxima Seção.

Figura 5.14 mostra o modelo 3D da conexão. O modelo 3D foi gerado com uma

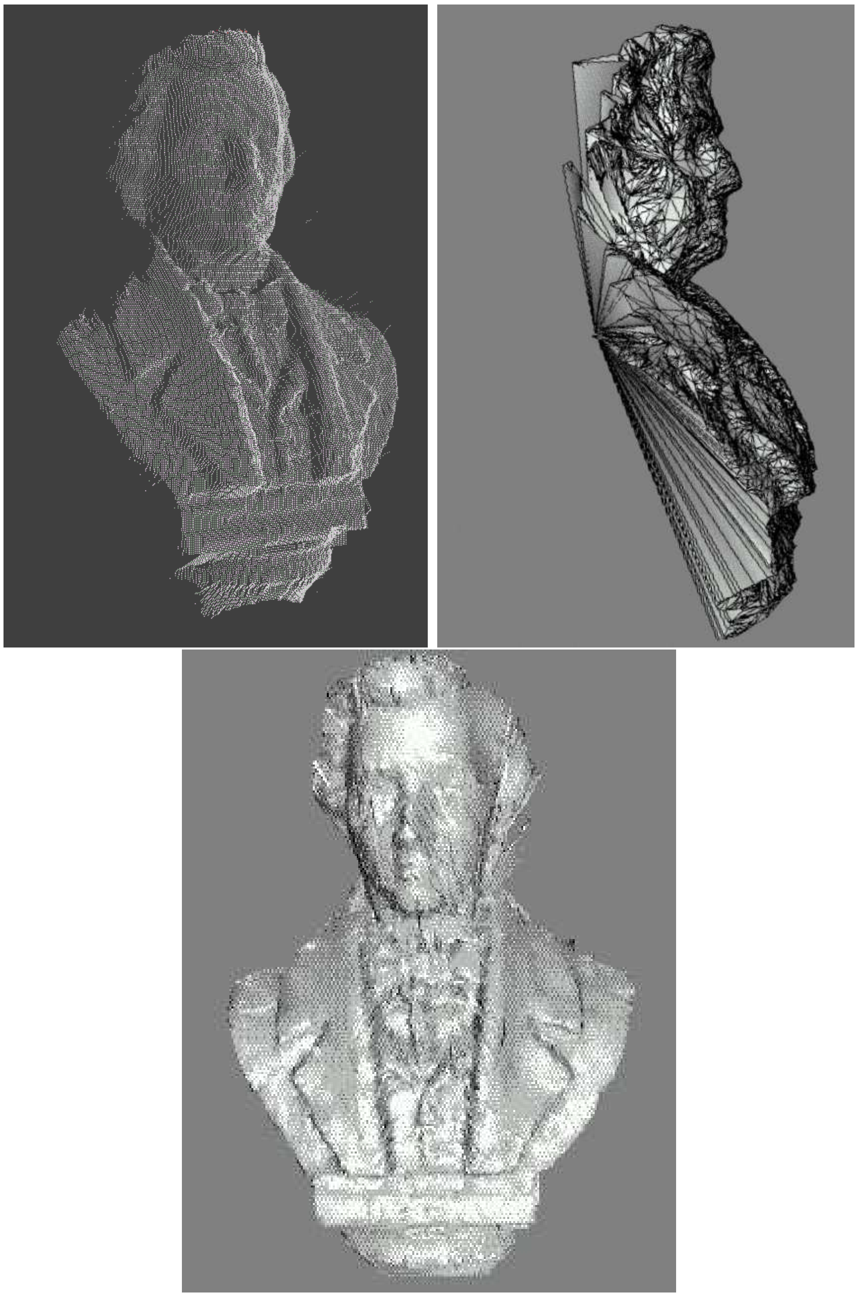


Figura 5.15: A imagem de profundidade e o modelo 3D do busto de Chopin.

tolerância absoluta de $\tau = 1.0$, que equivale a uma tolerância de 0.2 dos dados normalizados a partir de uma imagem (225×185) com 21345 pontos. O processo realizou 56 estágios de crescimento, com um total de 976 iterações, e construiu um modelo com 2448 faces e 1226 vértices. Figura 5.15 mostra o modelo 3D do Busto de Chopin, que foi reconstruído

Figura 5.16: A imagem de profundidade e o modelo 3D do busto de Mozart

a partir de uma imagem (359×232) com 45230 pontos, com uma tolerância absoluta de $\tau = 1.0$, que equivale a uma tolerância de 0.005 nos dados normalizados. O processo realizou 10 estágios de crescimento, com um total de 2878 iterações, e construiu um modelo com 24878 faces e 12441 vértices, e Figura 5.16 mostra o modelo 3D do busto de Mozart que foi reconstruído a partir de uma imagem (399×263) com 61426 pontos. O modelo 3D foi gerado com uma tolerância absoluta de $\tau = 1.0$, que equivale a uma tolerância de 0.005 nos dados normalizados. O processo realizou 12 estágios de crescimento, com um total de 1588 iterações, e construiu um modelo com 15368 faces e 7686 vértices.

A Tabela 5.1 resume os resultados obtidos com os experimentos nas imagens dadas.

Imagens	Dimensão (pontos)	Tolerância	Vértices	Faces	Estágios	Iterações
Esfcub	128×128 (12449)	1.0	1380	2756	4	416
Esfera	128×128 (12303)	0.25	197	390	2	15
Rampa	128×128 (12449)	0.25	849	1694	4	86
Pirâmide	128×128 (16128)	0.25	1329	2624	3	1029
Três Pirâmides	100×40 (4000)	1.0	901	1798	39	307
Cone	128×128 (12303)	1.0	197	390	3	15
Busto de Chopin	356×232 (45191)	1.0	12441	24878	10	2878
Busto de Mozart	399×263 (61426)	1.0	7686	15368	211	1588
Face de Chopin	131×142 (13026)	1.0	1697	3390	123	532
Conexão	185×225 (21345)	1.0	1226	2448	56	976

Tabela 5.1: Resumo dos resultados.

5.4 Problemas na implementação

Os módulos destacados no fluxograma (Figura 5.17) foram parcialmente implementados. Das funcionalidades referentes à consistência topológica somente as que evitam auto-interseções foram implementadas, garantindo que a projeção da malha reconstruída na direção z não tenha auto-interseção. Não implementamos as funcionalidades que permitem a reconstrução de objetos com gênero diferente de zero (cirurgias topológicas). Figura 5.18 mostra o modelo 3D de um toro, parcialmente reconstruído, onde pode-se observar o surgimento de frentes de crescimento que concorrem a regiões adjacentes na imagem, sugerindo uma possível cirurgia topológica. Observa-se, também, que para implementar essas funcionalidades, deve-se tratar os pontos da borda da imagem de forma que permita a subdivisão das faces da base (faces que contêm um vértice inativo e não possuem regiões correspondentes na imagem) para evitar a sobreposição dessas faces.

Também não foi implementada a detecção de pontos preferenciais na borda da ima-

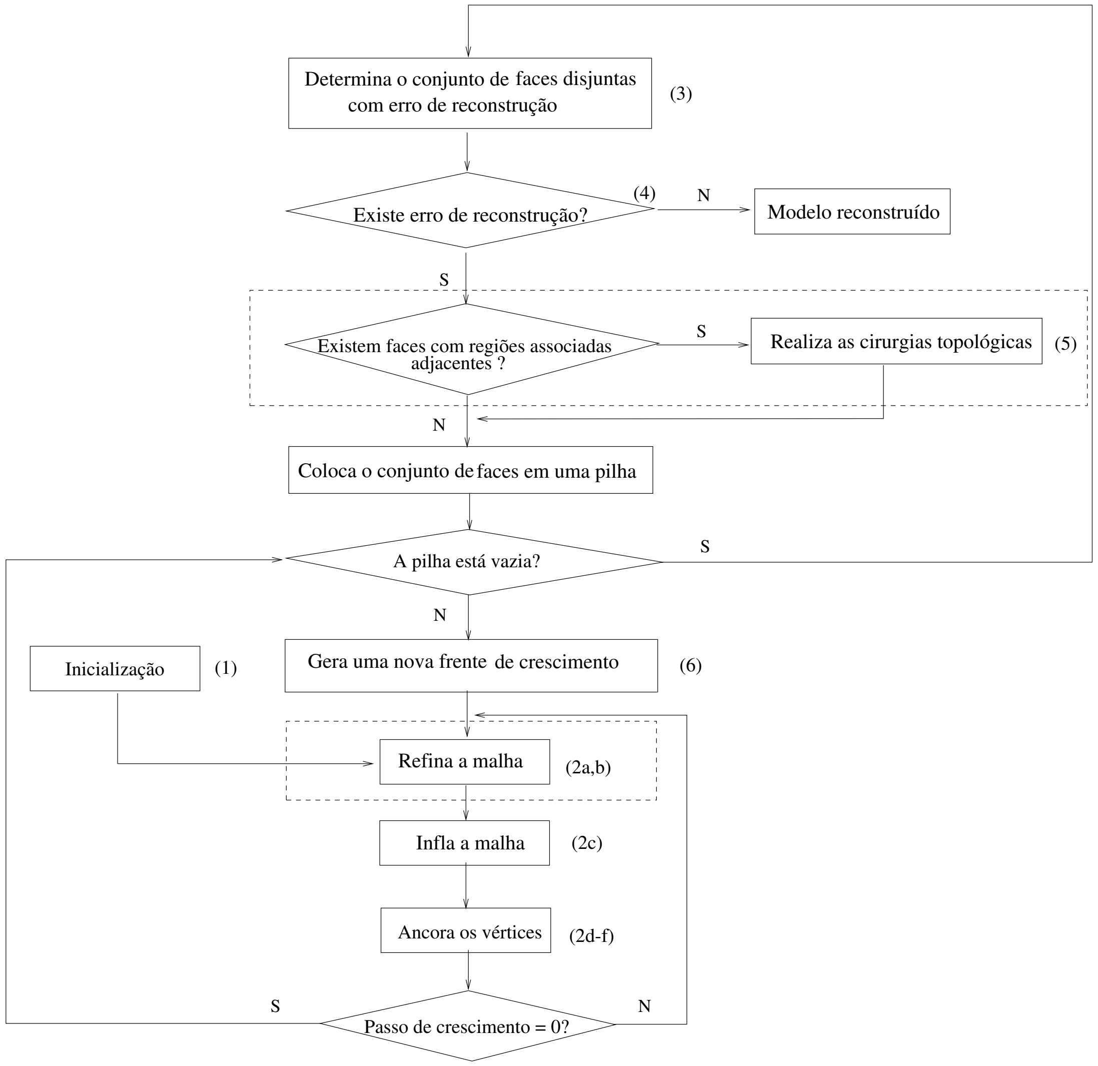


Figura 5.17: Fluxograma.

gem (pontos de descontinuidades de profundidade, máximos e mínimos). Pode-se observar que uma má associação na borda, não dando preferência aos pontos com descontinuidade de profundidade, pode levar à reconstrução errônea do objeto imageado (Figura 5.19).

Outra funcionalidade implementada parcialmente, refere-se à seleção de um ponto preferencial (mínimo ou máximo) em uma região com um conjunto de pontos, muito próximos, com essa característica. Na reconstrução da face de Chopin (Figura 5.20) nota-se uma região de faces distorcidas causada pela escolha de dois novos vértices associados preferencialmente a dois pontos de mínimo muito próximos, situados na região do olho direito da imagem. Efeito semelhante observa-se no corpo do busto de Mozart (Figura 5.21), onde

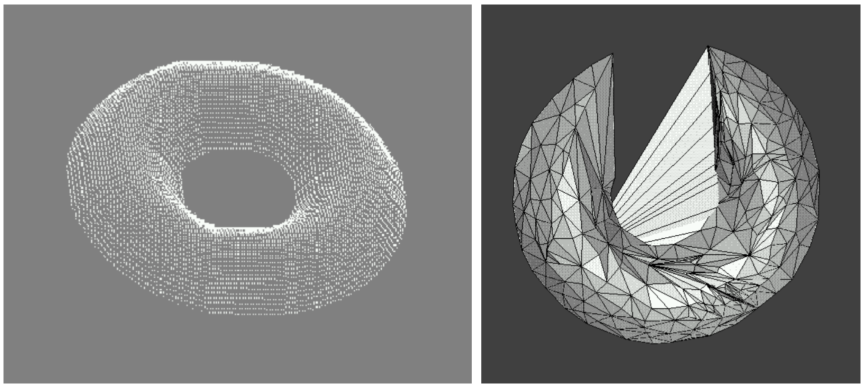


Figura 5.18: Toro.

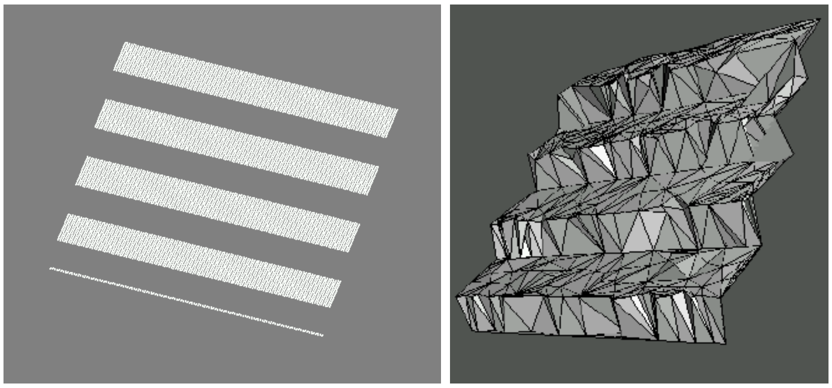


Figura 5.19: Escada.

a procura preferencial originou faces muito finas e compridas. Esse conjunto de faces é ampliado pela geração de um face paralela que contém uma aresta de borda, essa aresta é

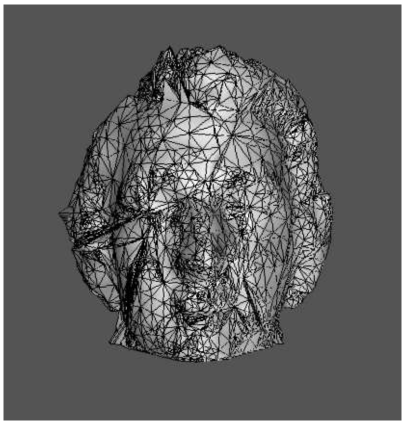


Figura 5.20: Face de Chopin.

subdividida, originando outras faces paralelas contendo arestas de borda que também são subdivididas, criando, dessa forma, uma família de faces finas e paralelas. Nessa mesma imagem pode-se observar o efeito causado pela falta de ajuste de faces que ultrapassam o modelo (outra funcionalidade do nosso algoritmo, passo 2(b)ii, não implementada). A

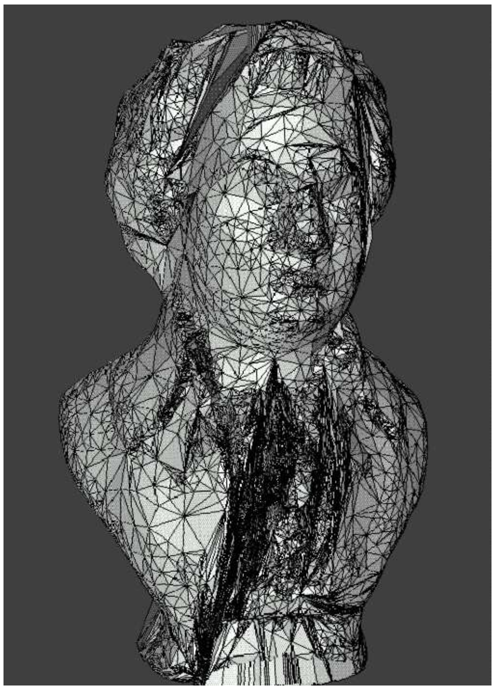


Figura 5.21: Busto de Mozart.

correspondência preferencial aos novos vértices gerou um conjunto de faces paralelas, no lado direito da cabeça do modelo de Mozart, que ultrapassou a imagem em muitos pontos, criando uma região na imagem contendo pontos com erro negativos. Nos testes para a determinação do erro de reconstrução, devido a tolerância dada, as faces estavam suficientemente próximas dos dados, sendo consideradas sem erro e ancoradas, não gerando a nova frente de crescimento necessária para o ajuste desse conjunto de faces aos dados.

Figura 5.22 mostra o efeito causado pela inclusão de um ruído nos pontos de borda que levou à criação de um sulco e de faces inexistentes na base do modelo. Mostrando que a implementação do algoritmo de determinação da borda da imagem de profundidade não é robusta com relação à detecção de ruídos.

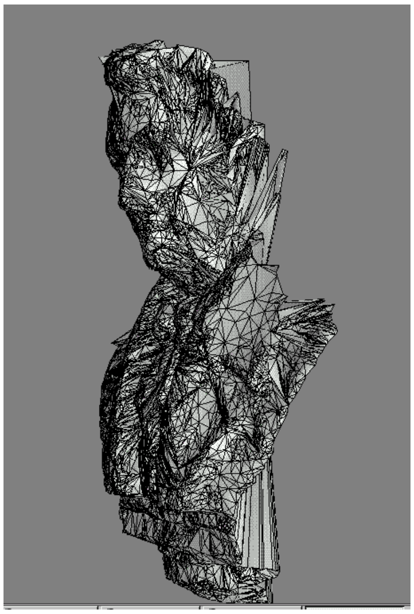


Figura 5.22: Busto de Chopin.

5.5 Comparações

Nesta Seção vamos comparar os resultados obtidos com a nossa implementação em relação aos métodos mencionados no Capítulo 3.

5.5.1 Modelos segmentados

Os métodos, nesta abordagem, geram modelos 3D de forma incremental, através da integração de malhas construídas separadamente. Como já salientamos anteriormente, o processo de "costurar" essas malhas sem fendas é um problema de difícil solução.

O nosso algoritmo, baseado em modelos deformáveis, não tem problemas com ajuste de "buracos" ou fendas, uma vez que inicia o processo com uma malha fechada, e se nenhum corte for realizado durante o processo de deformação e ajuste, gera modelos fechados com as características geométricas extraídas dos dados.

Critério de precisão. Com relação ao critério de precisão proposto por Tanaka [69], mostramos na Seção 4.3.2 que o nosso critério de precisão é equivalente àquele, com a vantagem de não necessitar de nenhuma estimativa prévia da curvatura da superfície. Em [69] a avaliação da precisão é baseada na razão entre a curvatura estimada e sua aproximação linear. Estimativas grosseiras da curvatura, isto é, se uma curva com a curvatura estimada não se ajustar corretamente aos pontos amostrados, pode levar a estimativas errôneas do erro ou a uma inadequada subdivisão da malha. No nosso caso, a avaliação da precisão depende somente dos dados de entrada e, portanto, é mais realista.

5.5.2 Modelos volumétricos

Nesta abordagem os métodos estão fundamentados no esquema de enumeração espacial, onde os vértices das células cúbicas (*voxel*) são marcadas como pertencentes ou não à superfície amostrada. Uma interpolação através desses pontos marcados determinam a superfície. Podemos destacar dois problemas nesta abordagem. O primeiro refere-se a não ambiguidade topológica da malha reconstruída, pela interpolação dos pontos marcados como pertencentes à superfície, que leva a malhas muito densas, e o segundo está relacionado com o volume de dados necessários para reconstruir um objeto com a precisão requerida.

O nosso algoritmo é baseado em informações geométricas que podem ser extraídas diretamente dos dados, tendo a vantagem de não inferir nenhuma forma à superfície a ser reconstruída. O ajuste da forma inicial aos dados é feito através das deformações necessárias, que são baseadas apenas nas informações obtidas localmente na imagem dada, durante o processo de crescimento, gerando um modelo topologicamente equivalente ao objeto amostrado, com uma malha que se adapta às características geométricas contidas nos dados e, além disso, conseguir reconstruir parcialmente com precisão objetos amostrados em uma única vista.

5.5.3 Modelos deformáveis

Abordagem contínua. Os modelos deformáveis baseados em minimização global [72], ajustam um modelo inicial predeterminado, com a topologia do objeto amostrado, aos dados. Esse ajuste é feito transformando o problema de reconstrução na resolução numérica de um sistema de equações do movimento através da estimativa, a partir dos dados, de parâmetros físicos que representam forças que simulam a equação do movimento de uma membrana deformável, ao longo do tempo. Nessa abordagem destacamos dois problemas relevantes. O primeiro, de difícil tratamento, é a estimativa, a partir dos dados, dos parâmetros físicos referentes à suavidade e continuidade da superfície. O segundo refere-se à estimativa do modelo inicial, que deve ser próximo ao objeto a ser modelado. Isto requer um processamento preliminar dos dados, para registrar o conjunto de imagens, e estimar a forma do modelo inicial.

Como já mencionamos, o algoritmo proposto pode ser baseado em informações geométricas extraídas diretamente dos dados, tem a vantagem, sobre os métodos de ajuste global, de não exigir nenhum conhecimento prévio da forma geométrica ou topológica do objeto a ser reconstruído. O ajuste da forma inicial aos dados é feito através das deformações e das cirurgias topológicas necessárias, que são baseadas apenas nas informações obtidas localmente na imagem dada, durante o processo de crescimento. Além disso, podemos destacar a simplicidade do nosso algoritmo como uma de suas vantagens sobre os métodos de ajuste global.

Abordagem discreta. Os métodos de deformação discreta, como o método proposto e o apresentado por Chen e Medione [15], usam as informações locais dos dados para ajustar a superfície de um modelo inicial aos dados amostrados.

Destacaremos a seguir os ganhos qualitativos do nosso trabalho comparativamente com o *modelo do balão inflável*, criado por Chen e Medione [15].

O modelo do balão inflável pode gerar malhas com auto-interseção, devido ao ajuste local. Evitamos este problema através da triangulação na imagem de profundidade, induzida pela projeção da malha triangulada nessa imagem, durante o refinamento, em cada iteração, evitando-se, assim, a correspondência indevida entre os novos vértices da malha refinada e os pontos dados na imagem de profundidade.

A nossa estratégia de crescimento radial permite ao algoritmo um melhor aproveitamento das informações contidas em uma imagem, uma vez que todos os pontos amostrados em uma imagem são atingidos pelas direções radiais, o que não ocorre com o crescimento na direção normal a cada vértice, estratégia de crecimento usada por Chen e Medione no seu modelo, conforme exposto na Seção 3.3.2.

Chen e Medioni [15] refinam a malha usando o critério de subdivisão da maior aresta de cada triângulo, quando a sua área exceder um limiar determinado a partir da estimativa da curvatura do objeto a ser modelado, independentemente de sua associação aos dados. Na malha triangulada obtida pelo nosso método, a criação de cada vértice durante o refinamento da malha depende, além do critério de ajuste à superfície que define o comprimento máximo permitido à aresta em cada ângulo sólido, da existência de um ponto na imagem de profundidade que será associado ao novo vértice, evitando-se desta forma a inserção de vértices fictícios.

Os modelos reconstruídos por Chen e Medione são dependentes da topologia da forma inicial (homeomorfos à esfera). Mostramos na Seção 4.3.3 que o nosso algorimo pode se adaptar à topologia do objeto durante o processamento, de acordo com as informações obtidas localmente na imagem dada.

Tanto o nosso método quanto o de Chen e Medioni são técnicas que usam a estratégia de crescimento por frentes (ângulo sólido de crescimento) e, como já foi observado por eles, esta estratégia de crescimento é paralelizável, já que o desenvolvimento em cada frente é independente das demais.

.

Capítulo 6

Comentários Finais

Apresentamos neste trabalho um novo algoritmo de reconstrução de uma malha triangulada 3D fechada, a partir de uma imagem de profundidade não registrada. O algoritmo baseia-se nas técnicas de modelos discretos deformáveis [15].

O nosso algoritmo gera, iterativamente, a partir de malha inicial triangulada fechada, geometricamente simples, uma sequência de malhas que converge para os dados amostrados. Durante o processamento, essas malhas são ajustadas às características geométricas da superfície automaticamente, de uma forma robusta, empregando a técnica da triangulação no domínio da malha. Essa técnica permite estabelecer de uma forma eficiente a correspondência entre os dados e os vértices da malha reconstruída, sem necessitar de uma estimativa inicial da geometria do objeto.

No Capítulo 4 apresentamos o modelo do fluxo radial e fizemos uma análise do método proposto, formalizando os pontos mais relevantes relacionados com à convergência da malha, à precisão, e à topologia do objeto a ser reconstruído. Mostramos que:

- O critério de crescimento nas direções radiais, sem ultrapassar a imagem, permite o ajuste perfeito da malha aos dados, quando a distância de qualquer ponto dado ao modelo tende ao valor da tolerância dada;
- Diferentemente dos trabalhos existentes, o nosso critério de controle da precisão de ajuste local, usando um parâmetro de tolerância, permite um controle global no erro de reconstrução. Portanto, de acordo com a tolerância dada, o algoritmo pode adaptar automaticamente o comprimento máximo permitido a cada aresta da malha,

em cada estágio de crescimento, permitindo a adaptação do modelo à geometria dos dados;

- Através dos pontos críticos (pontos extremos e pontos de sela) estimados em uma imagem de profundidade, podemos estimar o limite inferior do gênero da superfície a ser reconstruída, eliminando, assim, a restrição dos modelos deformáveis à topologia do modelo inicial.

Os experimentos realizados com imagens sintéticas permitiram uma avaliação do modelo proposto, no que se refere às idéias demonstradas no Capítulo 4. De acordo com essas avaliações e as comparações feitas com as técnicas conhecidas (Seção 5.5), o nosso trabalho trouxe melhoramentos com relação aos modelos de reconstrução 3D. Podemos sintetizar as principais características do modelo proposto como segue:

1. Características positivas
   - É simples.
   - Gera malhas adaptativas à geometria dos dados.
   - Não tem problemas com o ajuste de buracos na reconstrução.
   - Permite a reconstrução de objetos amostrados em imagens de profundidade, independente de sua geometria e/ou topologia.
   - Evita auto-interseções na malha reconstruída.
   - Utiliza todas as informações dadas em uma imagem de profundidade.
   - Permite que a precisão pontual da reconstrução seja avaliada a partir de um parâmetro de tolerância global.
2. Características negativas
   - O tratamento de ruídos "negativos" não é robusto, ou seja, pontos associados a faces não convexas onde a força de tensão dos vizinhos não é aplicável, podendo gerar características geométricas inexistentes na superfície reconstruída.
   - Tempo de processamento muito longo, quando a imagem amostrada apresenta regiões com grandes curvaturas. Nestes casos, com o refinamento da malha, durante o processo de crescimento, o passo de crescimento se torna próximo do

limiar, devido a força de tensão gerada pelos pontos já ancorados, fazendo com que a velocidade de crescimento decresca a cada estágio.

Como continuidade deste trabalho propomos:

- Melhororamentos na implementação corrente.
  - Na Seção 5.4 relatamos alguns problemas com a implementação do algoritmo. A superação desses problemas pode ser obtida com a implementação de funções que comtemplem os problemas ali mencionados.
  - A malha gerada pelo nosso algoritmo depende das características geométricas e da tolerância de erro. A velocidade de deslocamento de cada vértice é variável em cada iteração de crescimento. O resultado obtido, geralmente é uma malha não uniforme. Uma uniformização da triangulação da mesma pode ser obtida por um algoritmo de pós-processamento.
- O estudo da complexidade do algoritmo.
  - Na análise do algoritmo realizada na Seção 4.3 não estudamos a complexidade do algoritmo proposto. Esse estudo viria completar esta análise.

Propomos, também, os seguintes problemas em aberto:

- Implementar as funcionalidades do algoritmo proposto referentes a consistência topológica, as quais podem ser separadas em dois módulos:
  - Automatizar a determinação da origem do ângulo sólido inicial de crescimento radial, quando o objeto a ser modelado não é homeomorfo à esfera;
  - Implementar as cirurgias topológicas sugerida no texto.
- Desenvolver um mecanismo que integre dinamicamente outras imagens de profundidade, permitindo a adaptação incremental. Um possível tratamento seria seguir as idéias desenvolvidas por Curless e Levoy [20].

Referências Bibliográficas

[1] A. Adán, C. Cerrada, and V. Feliu. A fast mesh deformation method to build spherical representation models of 3D objects. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'98, pp. 282-289.* Springer-Verlag, 1998.

[2] M.E. Algorri and F. Schmitt. Deformable models for reconstructing unstructured 3D data. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, pp.420-428.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[3] J.Y. Aloimonos. Visual shape computation. *Proceedings of the IEE*, 76(8):899–916, 1988.

[4] E. Bardinet, L. Cohen, and N. Ayache. Tracking medical 3D data with a deformable parametric model. *Proceedings Lecture Notes in Computer SienceComputer Vision - ECCV'96*, volume 1064, pp. 317-328, Springer-Verlag, 1996.

[5] O.R.P. Bellon. *Imagens de Profundidade: Segmentação e Representação por superfícies Planares.* Tese de Doutorado, Univesidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, 1997.

[6] P.J. Besl and N.D. McKay. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):239–256, 1992.

[7] A. Blake and C. Marinos. Shape from texture: Estimation, isotropy e moments. *Artificial Intelligence*, 45:323–380, 1990.

[8] A. Blake, A. Zisserman, and G. Knowles. *Robot Vision.* Capítulo Surface Description from Stereo and Shading, pp. 27-52. The MIT Press, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.

[9] J. Bloomenthal and P. Ning. An evaluation of implicit surface tilers. *Computer Graphics and Applications*, 45, 1993.

[10] R.M. Bolle and B.C. Vemuri. On three-dimensional surface reconstruction methods. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(1):1–13, 1991.

[11] B. Boufama, D. Weinshall, and M. Werman. Shape from motion algorithms: a comparative analisis of scaled orthography and perspective. In *Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'94*, volume 800, pp. 199-204. Epringer-verlang, Berlin Heidelberg, 1994.

[12] E. Boyer and M-O. Berger. 3D surface reconstruction using occluding contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(3):219–233, 1997.

[13] M. Brady and A. Yuille. An extremum principle for shape from contour. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(3):288–301, 1984.

[14] Y. Chen and G. Medioni. Object modeling by registration of multiple range images. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2724-2729*, Sacramanto, California, 1991.

[15] Y. Chen and G. Medioni. Description of complex objects from multiple range images using an inflating balloon model. *Computer Vision and Image Understanding*, 61, pp. 325-334(3), 1995.

[16] W.L. Chia and G. Medioni. Surface approximation of complex 3-D objects. Technical report, scu, http://iris.usc.edu/Outlines/papers.html, 1994.

[17] L.D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image Understanding*, 53(2):211–218, 1991.

[18] L.D. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and ballons for 2D and 3D images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1131–1147, 1993.

[19] J.E. Cryer, P.S. Tsai, and M. Shah. Integration of shape from shading and stereo. *Pattern Recognition*, 28(7):1033–1043, 1995.

[20] B. Curless and M. Levoy. A volumetric method for building complex models from range images. In *In computer Graphics Proceedings, pp. 303-312*, New Orleans, Louisiana, Agosto 1996. SIBGRAPH 96.

[21] M.P. do Carmo. *Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[22] C. Dorai, G. Wang, A.K. Jain, and C. Mercer. Registration and integration of multiple object views for 3D model construction. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(1):83–89, 1998.

[23] C. Dorai, J. Wang, and A.K. Jain. Optimal registration of object views using range data. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(10):1131–1138, 1997.

[24] P. Dupuis and J. Oliensis. Shape from shading: Provably convergent algoritms and uniqueness. In *Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'94*, volume 800, pp.259-268. Epringer-verlang, Berlin Heidelberg, 1994.

[25] J. Gårding. Shape grom texture for smooth curved surfaces. *J. Math. Imag. Vision*, 2, 1992.

[26] J. Gårding. Shape from texture and contour by weak isotropy. *Artificial Intelligence*, 64:243–297, 1993.

[27] A.V. Gelder and J. Wilhems. Topological considerations in isosurface generation. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):337–375, 1994.

[28] Geomview. http://www.geom.umn.edu/software/ download/geomview.html.

[29] J.M. Gomes and L. Velho. *Image Processing for Computer Graphics*. Springer-Verlag, New York-USA, 1997.

[30] E. Gülch. Deformable models as a photogrammetric measurement tool - potential and problems. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, volume xxxi(B3), pp. 279-284, Vienna, 1996.

[31] J.C. Hart. Morse theory for computer graphics. Technical Report EECS-97-002, Washington State University, 1997. Também em: SIGGRAPH'97 Course #14 Notes "New Frontiers in Modeling and Texturing".

[32] J.K. Hasegawa. *Shape from Shading com projeção Perspectiva e Calibração de Câmera*. Tese de Doutorado, Univesidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, 1997.

[33] P.S. Heckbert, editor. *Graphics Gems IV*. Academic Press, Inc., Palo Alto, California, 1994.

[34] Y. Heung, M. Herbert, K. Ikeuchi, and R. Reddy. An integral approach to free-form object modeling. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(12):1366–1370, 1997.

[35] K. Higuchi, M. Herbert, and K. Ikeuchi. Building 3-D models from unregistered range images. *Ghraphical Models and Image Processing*, 57(4):315–333, 1995.

[36] A. Hoover. *The Space Envelope Representation for 3D Scenes.* PhD thesis, University of South Florida, http://marathon.csee.usf.edu/ hoover, 1994.

[37] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. In *ACM Computer Graphics, pp.71-78*, Chicago, Julho 1992. SIBGRAPH 92.

[38] B.K.P. Horn and M.J. Brooks. *Shape from Shading.* The MIT Press Cambridge, London, 1989.

[39] J.Y. Jau and R.T. Chin. Shape from texture using the wigner distribution. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 52:248–263, 1990.

[40] E. Koh, D. Metaxas, and N. Badler. Hierarchical shape representation using local adaptative finite elements. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'94*, volume 800, pp.440-446. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[41] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[42] F. Leberl et al. Surface reconstruction. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, volume xxxi(B3), pp. 421-428, Vienna, 1996.

[43] A. Leonardis, A. Jaklic, and F. Solina. Superquadrics for segmenting and modeling range data. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(11):1289–1295, 1997.

[44] E.L. Lima. Introdução a teoria de morse. *Anais do segundo Colóquio Brasileiro de Matemática*, volume 1, pp. 99 – 124, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 1958.

[45] E.L. Lima. Introdução à topologia diferencial. In *Notas de Matemática*, volume 21. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 1961.

[46] E.L. Lima. *Curso de Análise*, volume 2, terceira edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Projeto Euclides, Rio de Janeiro, RJ, 1989.

[47] W.E. Lorensen and H.E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *ACM Computer Graphics*, 21(4):163–169, July 1987.

[48] S. Mason. 3D building reconstruction using composites of surfaces promitives: Concept. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, volume xxxi(B3), pp. 517-522, Vienna, 1996.

[49] W.S. Massey. *Algebraic Topology - An Introduction.* Springer - Verlag, Ney York, 1967.

[50] T. Masuda and N. Yokota. Robust method for registration and segmentation of multiple range images. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(3):295–307, 1995.

[51] Mesa. http://mesa3d.sourceforge.net/.

[52] J. Milnor. *Morse Theory.* Princeton University Press, Princeton, Ney Jersey, 1963.

[53] B.K. Natarajan. On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples. *The Visual Computer*, 11:52–62, 1994.

[54] J. Neider, T. Davis, and M. Woo. *OpenGL Programming Guide.* Addison-Wesley Publisshing Company, New York, USA, 1996.

[55] W. Neuenschwander et al. Velcro surfaces: Fast initialization of deformable models. *Computer Vision and Image Understanding*, 65(2):237–245, 1997.

[56] P.J. Neuguebauer and K. Klein. Adaptative triangulation of objects reconstructed from multiple range images. Technical report, Fraunhofer Institute for Computer Graphics, 1998.

[57] F.M.A. Nogueira. *Geração Automática de Mapas de Disparidade em Visão Estéreo.* Dissertação de Mestrado, Univesidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, 1997.

[58] A.W. Paeth, editor. *Graphics Gems V.* Academic Press, Inc., Palo Alto, California, 1995.

[59] H. Pedrini. *Reconstrução 3D a partir de seções Transversais de Objetos.* Dissertação de Mestrado, Univesidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, 1994.

[60] N. Pfeifer and H. Pottmann. Surface models on the basis of a triangular mesh - surface reconstruction. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, volume xxxi(B3), pp. 638-643, Vienna, 1996.

[61] W.H. Press et al. *Numerical Recipes in C - The Art of Scientif Computing.* Cambridge - University Press, 1992.

[62] Usf range image database. http://marathon.csee.usf.edu/range/DataBase.html.

[63] D.F. Rogers. *Procedural Elements for Computer Graphics.* McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1985.

[64] C. Rothwell et al. Representing objects using topology. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'96*, volume 1144, pp. 79-108. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[65] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Japão, terceira edição, 1964.

[66] C. Schültz, T. Jost, and H. Hügli. Semi_automatic 3D object digitizing system using range images. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'98*, volume pp. 490-497. Springer-Verlag, 1998.

[67] X. Shen and D. Hogg. Shape models from image sequences. In *Proceedings Lecture Notes in Computer Sience, Computer Vision - ECCV'94*, volume 800, pp. 225-230. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[68] B.T. Stander and J.C. Hart. Guaranteeing the topology of an implicit surface polygonization for interactive modeling. Technical report, Washington State University, 1997.

[69] H.T. Tanaka. Accuracy-based sampling and reconstruction with adaptative meshes for parallel hierarchical triangulation. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(3):335–350, 1995.

[70] C.J. Taylor and D.J. Kriegman. Structure and motion from line segments in multiple images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(11):1021–1032, 1995.

[71] D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problemas involving discontinuities.

IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-8(4):413–424, 1986.

[72] D. Terzopoulos. The computation of visible-surface representations. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4):417–438, 1988.

[73] D. Terzopoulos and D. Metaxas. Dynamic 3D models with local and global deformations: Deformable superquadrics. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):703–714, 1991.

[74] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraints on deformable models: Recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 38:91–123, 1988.

[75] G. Turk and M. Levoy. Zippered polygon meshes from range images. In *Computer Graphics Proceedings*, pp. 311-318. Orlando, Florida, Julho 1994. SIBGRAPH 94.

[76] F. Ulupinar and R. Nevatia. Perception of 3D surfaces from 2D contours. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(1):3–18, 1993.

[77] F. Ulupinar and R. Nevatia. Shape from contour: Straight homogeneus generalized cylinders and constant cross section generalized cylinders. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2):120–135, 1995.

[78] OSU (MSU/WSU) range database. test images. computer vision homepage. http://www.cs.cmu.edu/ afs/cs/project/cil/ftp/html/vision.html.

[79] I. Weiss. 3D shape representation by contours. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 41(1):80–100, 1988.

[80] I. Weiss. Shape reconstruction on a varying mesh. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(4):345–361, 1990.

[81] T.S. Wu. TDM - módulo de dados topológico. http://www.dca.fee.unicamp.br/ ting/tdm.

[82] T.S. Wu. Non-manifold data models: Implementational issues. In *Proceedings of MICAD'92, pp. 38-56*, Paris, França, 1992.

[83] J.Y. Zheng. Acquiring 3D models from sequences of contours. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2):163–178, 1994.

[84] J.Y. Zheng, Y. Fukagawa, and N. Abe. 3D surface estimation and model construction from specular motion in image sequence. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(5):513–520, 1997.

[85] Modelo do Fluxo Radial. http://www.dca.fee.unicamp.br/projects/prosim/rfm/.